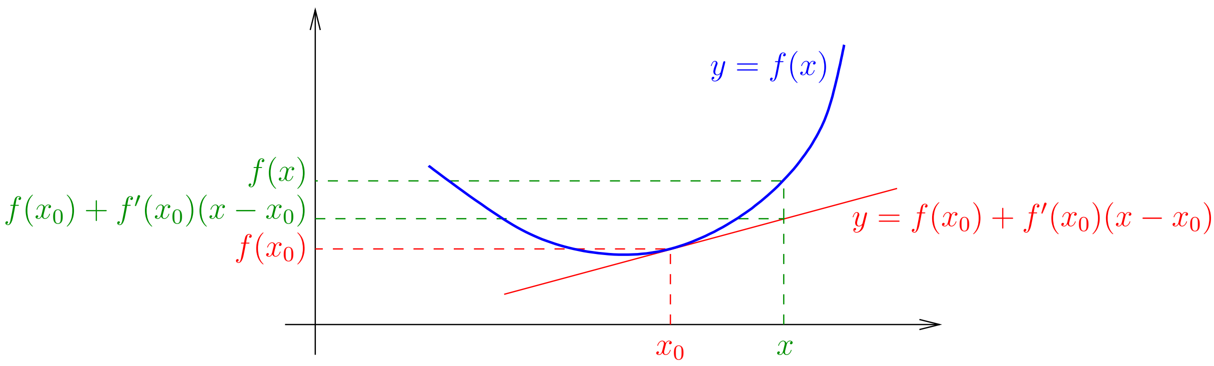
Convessità e derivabilità

Definizione 1 (convessità per funzioni derivabili)
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su (a, b). Diremo che f è **convessa** *o* **concava** *su (a, b) se per ogni $x_0 \in (a, b)$ il grafico di f sta tutto dalla stessa parte rispetto alla retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. Precisamente:*

1. *f convessa $\iff$ per ogni $x_0 \in (a, b)$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x \in (a, b)$;*

2. *f concava $\iff$ per ogni $x_0 \in (a, b)$ si ha $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x \in (a, b)$.*



Osservazione: Si potrebbe dare una definizione di convessità e concavità che non richiede la derivabilità della funzione e che è equivalente alla definizione data se la funzione è derivabile. Tuttavia, per semplicità abbiamo deciso di dare la definizione supponendo che la funzione sia derivabile.

Operativamente, la definizione data non è facile da verificare. Dimostriamo allora la caratterizzazione seguente:

Teorema 2
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su (a, b). Si ha:

(1) f convessa su (a, b) $\iff$ $f'(x)$ è crescente su (a, b),

(2) f concava su (a, b) $\iff$ $f'(x)$ è decrescente su (a, b).

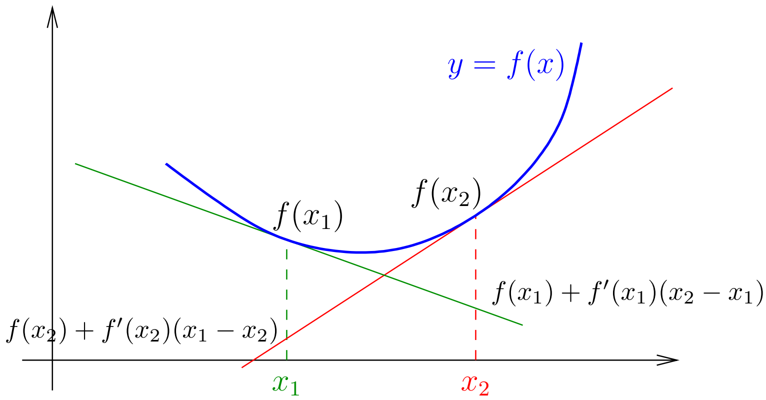
Dimostrazione: Dimostriamo solo (1), poiché (2) è totalmente analogo. Supponiamo dapprima che f sia convessa su (a, b) e mostriamo che allora f' è crescente, cioè $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$, si ha $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Siano dunque $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Utilizziamo la definizione di convessità considerando dapprima la retta tangente al grafico di f in $(x_2, f(x_2))$ e poi in $(x_1, f(x_1))$: si ha:

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

ma anche, scambiando il ruolo di x_1 e x_2:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$



Sommando fra loro le due disuguaglianze, si ottiene:

$$0 \geq 0 + (f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2)$$

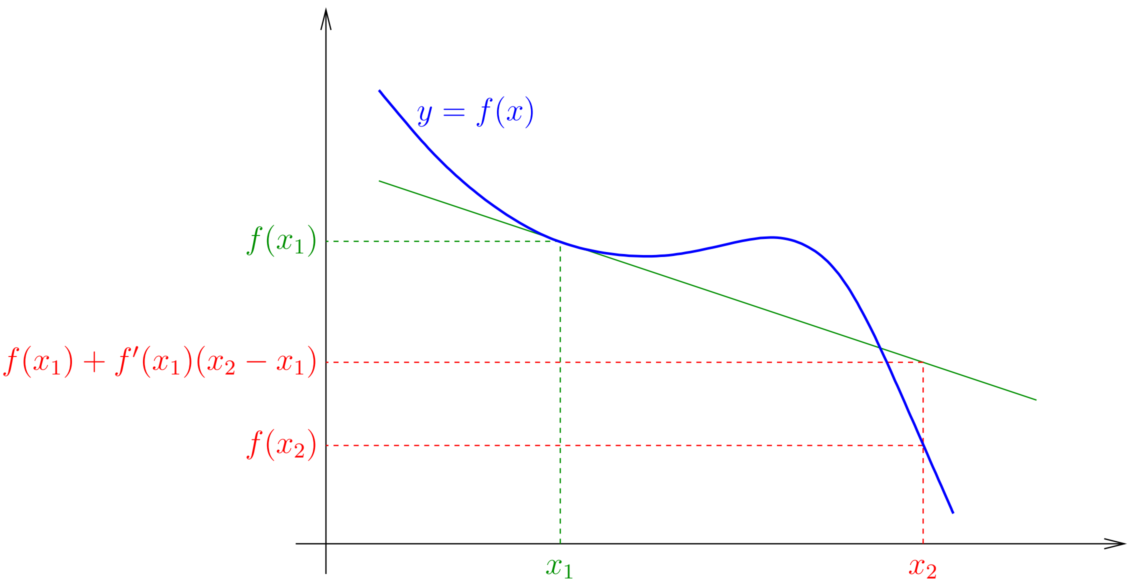
da cui, poiché $x_1 - x_2 < 0$, si deduce che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

Inversamente, supponiamo f' crescente e mostriamo che f è convessa. Per assurdo, supponiamo che non sia vero, cioè che esistano x_1, $x_2 \in (a, b)$ tali che

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \tag{1}$$

cioè

$$f(x_2) - f(x_1) < f'(x_1)(x_2 - x_1).$$



Grazie al teorema di Lagrange applicato alla funzione f nell'intervallo chiuso compreso tra x_1 e x_2, esiste un punto c tra x_1 e x_2 tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, da cui si deduce:

$$f'(c)(x_2 - x_1) < f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Poiché $x_1 \neq x_2$ per la (1), se $x_1 - x_2 > 0$, si deduce che

$$x_2 < c < x_1 \qquad f'(c) > f(x_1)$$

e se $x_1 - x_2 < 0$, si deduce che

$$x_1 < c < x_2 \qquad f'(c) < f(x_1)$$

ed entrambi i casi contraddicono il fatto che f' è crescente. •

Come corollario, si ottiene il seguente

Teorema 3
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* 2 *volte in* (a, b). *Si ha:*

1. f *convessa su* $(a, b) \iff f''(x) \geq 0$ *su* (a, b),
2. f *concava su* $(a, b) \iff f''(x) \leq 0$ *su* (a, b).

Dimostrazione: Basta utilizzare il teorema precedente ed applicare il test di monotonia alla funzione derivabile f'. •

Esempi:

1) $f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte (in effetti è derivabile infinite volte) e $f''(x) = e^x > 0$ su $\mathbb{R}$, da cui si deduce che f è convessa su $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte (in effetti è derivabile infinite volte) e $f''(x) = 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui si deduce che f è convessa su $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \ln x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte (in effetti è derivabile infinite volte) e $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, da cui si deduce che f è concava su $\mathbb{R}^+$.

4) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si ha $f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f''(x) = \dfrac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$ per ogni $x \neq 0$ e in $x = 0$ f non ammette derivata seconda. Poiché f' è crescente su $\mathbb{R}$ deduciamo che f è convessa su $\mathbb{R}$. Tuttavia non è derivabile due volte in $x = 0$.

Descriviamo ora il comportamento di f nel caso in cui sia derivabile e cambi concavità in qualche punto del suo dominio.

Definizione 4
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su (a, b). Diremo che $c \in (a, b)$ è un **punto di flesso** *se f cambia concavità in c, cioè se esiste un intorno sinistro di c in cui f è convessa (concava) e un intorno destro di c in cui f è concava (convessa).*

Osservazione: Poiché la curva cambia concavità nel punto di flesso, essa deve necessariamente attraversare la retta tangente in detto punto.

Si parla anche di **flesso a tangente verticale** nel caso in cui la retta tangente esista ma sia verticale (e dunque la funzione non sia derivabile nel punto di flesso) e la funzione cambi di concavità in detto punto.

Vale la seguente

Proposizione 5
Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su (a, b) e sia $c \in (a, b)$. Se f ammette derivata seconda in c punto di flesso, allora $f''(c) = 0$.

Dimostrazione: Per ipotesi, sappiamo che f cambia concavità in c. Dunque esiste un $\delta > 0$ tale che f è, ad esempio, convessa nell'intervallo $(c - \delta, c)$ e concava in $(c, c + \delta)$.

Per il Teorema 2, f' è crescente in $(c - \delta, c)$. Allora per ogni x e y tali che $c - \delta < x < y < c$ si ha

$$f'(x) - f'(y) \leq 0.$$

Poiché f' è derivabile in c, f' è anche continua in c. Dunque

$$\lim_{y \to c-} \left(f'(x) - f'(y)\right) = f'(x) - f'(c).$$

Per il teorema di permanenza del segno, avremo quindi

$$f'(x) - f'(c) \leq 0.$$

Allo stesso modo si dimostra che anche per ogni $x \in (c, c + \delta)$ si ha

$$f'(x) - f'(c) \leq 0.$$

Dunque c è un punto di massimo relativo per f', che è una funzione derivabile in c. Per il teorema di Fermat,

$$f''(c) = (f')'(c) = 0.$$

•

Osservazione: non vale il viceversa, cioè non è detto che se $f''(c) = 0$ allora $x = c$ è un punto di flesso.

Esempio: la funzione $y(x) = x^4$ verifica $y''(x) = 12x^2$, dunque $y''(0) = 0$. Tuttavia $y''(x) \geq 0$ su $\mathbb{R}$ quindi la funzione è convessa su $\mathbb{R}$ e $x = 0$ non è un punto di flesso.

Osservazione: Non è detto che esista la derivata seconda in un punto di flesso.

Esempio: Il punto $x = 0$ è flesso per la funzione $y = x^{\frac{5}{3}}$ sebbene la funzione non ammetta derivata seconda in $x = 0$. Infatti $y'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ è decrescente su $(-\infty, 0)$ e crescente su $(0, +\infty)$ quindi la funzione è concava su $(-\infty, 0)$ e convessa su $(0, +\infty)$. Si ha poi $y''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$ per $x \neq 0$ e in $x = 0$ la funzione non è derivabile due volte.