Analisi Matematica 1

Proff. L. Brandolini, G. Furioli, G. Gigante, B. Gariboldi

Testo utilizzato:

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 1, Zanichelli, ed. 2008 e seguenti.

Eserciziari proposti:

- Giulia Furioli Temi d'esame di Analisi Matematica I, Edizioni La Dotta
- Marco Bramanti Esercitazioni di Analisi Matematica I, Progetto Esculapio, Bologna

Programma d'esame

- **Insiemi numerici.** Terminologia e ripasso sulla teoria degli insiemi. Richiami sulle proprietà degli insiemi numerici. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi ordinati. $\sqrt{2}$ non è razionale (*). Definizioni di insieme superiormente, inferiormente limitato e limitato con esempi; definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo con esempi. Definizione di estremo superiore ed estremo inferiore con esempi. La proprietà dell'estremo superiore (o assioma di continuità o di completezza) di $\mathbb{R}$. In $\mathbb{Q}$ non vale la proprietà dell'estremo superiore.
- **Successioni.** Introduzione, successioni limitate e successioni convergenti: definizione, esempi e contro esempi. Ogni successione convergente è limitata (*), è falso il viceversa. Teorema di unicità del limite (*). Successioni divergenti ed irregolari. Successioni monotone e teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate (*) e non limitate (*). Le successioni q^n (*) e n^α (*). Algebra dei limiti (dimostrazione del prodotto (*)). Estensione dell'algebra alle successioni divergenti. Teoremi del confronto per successioni convergenti (*) e divergenti (*). Esempi. Forme di indecisione. Definizione del numero di Nepero come $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Limiti notevoli: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$ (*), $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2}$ (*), $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$ (*), $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n}$ (*), $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha-1}{\varepsilon_n}$ (*), con $\varepsilon_n\to 0$. Definizione di infinito e di infinitesimo. Confronto fra infiniti e confronto fra infinitesimi. Definizione di asintotico. Principio di sostituzione degli asintotici. Esempi. Gerarchia degli infiniti. Teorema di permanenza del segno per successioni (*).
- **Serie numeriche.** Definizione di somma parziale e di serie numerica. Definizione di serie convergente, divergente ed irregolare. Esempi. La serie geometrica (*). Le serie telescopiche. La serie di Mengoli (*). Condizione necessaria per la convergenza di una serie (*). Esempio di serie che soddisfa la condizione necessaria ma non converge. Serie a termini positivi: le serie a termini positivi possono solo convergere o divergere a $+\infty$ (*). I criteri del confronto (*), del confronto asintotico, del rapporto e della radice. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ (con dimostrazione per $\alpha\le 1$ e $\alpha\ge 2$ (*)).
  Serie a termini di segno qualunque. Convergenza assoluta. La convergenza assoluta è sufficiente per la convergenza semplice (*). Esempi. Criterio di Leibniz ed esempi. Esempio di serie che converge semplicemente ma non assolutamente.
- **Limiti di funzioni e continuità.** Richiami sulle funzioni reali di una variabile reale: immagine, grafico, funzioni pari, dispari, limitate, periodiche, monotone. Funzioni composte. Funzioni inverse.
  Definizione successionale di limite. Limite destro e sinistro. Definizione topologica (ϵ-δ) di limite. Le definizioni successionale e topologica di limite sono equivalenti. Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo. Punti di discontinuità (o singolarità). Singolarità a salto, singolarità eliminabile, funzione prolungabile per continuità ed altri tipi di singolarità. Le funzioni elementari sono continue nel loro campo di esistenza. Algebra dei limiti, estesa anche a casi di limite infinito. Teoremi del confronto. Teorema di permanenza del segno. Teorema di cambiamento di variabile nei limiti. Forme di indecisione e limiti notevoli (*). Algebra delle funzioni continue. Continuità della funzione composta. Definizione di asintotico. Gerarchia degli infiniti. Asintoti orizzontali e verticali. Asintoti obliqui, definizione e caratterizzazione. Esempi. Funzioni con andamento lineare, sopralineare e sottolineare all'infinito. Esempi di utilizzo degli asintotici per disegnare il grafico locale di una funzione.
  Teorema degli zeri (*), discussione sulla essenzialità delle ipotesi. Teorema di Weierstrass, discussione sulla essenzialità delle ipotesi. Teorema dei valori intermedi (*). Invertibilità e continuità su un intervallo.
- **Derivate.** Definizione di derivata tramite il limite del rapporto incrementale. Significato geometrico della derivata: la retta tangente. Derivata sinistra, destra. Ogni funzione derivabile è anche continua (*). La condizione è solo sufficiente e non necessaria. Esempi. Derivate delle funzioni elementari con la definizione (*). Punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale.
  Regole di calcolo per le derivate: somma, prodotto (*), reciproco, quoziente. Derivata di una funzione composta. Funzioni inverse. Derivata di una funzione inversa. Le derivate delle funzioni "arcsin" (*), "arccos" (*), "arctan"

(*).
Ottimizzazione: massimo, minimo assoluti e relativi e punti di massimo, minimo assoluti e relativi. Teorema di Fermat (*). Discussione sull'essenzialità delle ipotesi. Teorema di Lagrange (*) e teorema di Rolle (*). Discussione sull'essenzialità delle ipotesi. Test di monotonia (*). Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla su un intervallo (*).
Definizione di convessità e concavità per una funzione derivabile. Caratterizzazione della convessità e concavità tramite la monotonia della derivata prima (*). Convessità e concavità e derivata seconda (*). Punti di flesso.
Teorema di De l'Hôpital. Esempi, controesempi. Definizione di o-piccolo. Formula di Taylor con resto di Peano: enunciato ed esempi. Formula di Taylor con resto di Lagrange. La convergenza dello sviluppo in serie di MacLaurin della funzione esponenziale (*).

- **Integrali.** Definizione di primitiva e di integrale indefinito. La primitiva è unica a meno di una costante su un intervallo (*). Primitive immediate. Metodi di calcolo di primitive: integrazione per scomposizione. Esempi. Metodo di integrazione per parti. Esempi. Metodo di integrazione per sostituzione. Esempi.
  Definizione di integrale definito come limite delle somme di Cauchy-Riemann. Legame tra integrale definito e area. Integrabilità delle funzioni continue. Proprietà dell'integrale definito (linearità, monotonia, additività rispetto all'intervallo di integrazione). Teorema della media integrale (*), teorema sulla derivata della funzione integrale (*), teorema fondamentale del calcolo integrale (*).
- **Integrali generalizzati.** Definizione di integrale generalizzato di una funzione illimitata su un intervallo limitato. Esempi. Studio dell'integrale generalizzato di $1/(x-a)^\alpha$ su $(a, b]$. Criteri di integrabilità: confronto e confronto asintotico. Esempi.
  Definizione di integrale generalizzato su un intervallo illimitato. Esempi. Studio dell'integrale generalizzato di $1/x^\alpha$ su $[1, +\infty)$. Criteri di integrabilità per funzioni positive: confronto e confronto asintotico. Esempi.

Di TUTTI gli argomenti indicati nel programma è richiesta la comprensione e la padronanza. Dei risultati contrassegnati da (*) è richiesta ANCHE la conoscenza della dimostrazione.