Tutorato sugli insiemi numerici

Programma

Terminologia e ripasso sulla teoria degli insiemi. Richiami sulle proprietà degli insiemi numerici. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi ordinati. $\sqrt{2}$ non è razionale. Definizioni di insieme superiormente, inferiormente limitato e limitato con esempi; definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo con esempi. Definizione di estremo superiore ed estremo inferiore con esempi. La proprietà dell'estremo superiore (o assioma di continuità o di completezza) di $\mathbb{R}$. In $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di completezza.

Ricordiamo che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi ordinati, ovvero insiemi in cui sono definite due operazioni che indichiamo con somma e prodotto.

Scrivere le proprietà di somma e prodotto:

e una relazione d'ordine totale:

spiegare cosa è una relazione di ordine totale e quali sono le sue proprietà

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ non sono però lo stesso insieme: infatti, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Teorema. *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è 2.*

Scrivere qui la dimostrazione:

Consideriamo ora un insieme X totalmente ordinato e un suo sottoinsieme E. Puoi immaginare di prendere $X = \mathbb{Q}$ oppure $X = \mathbb{R}$.

Definizione. Un insieme E si dice limitato superiormente in X se esiste un numero $M \in X$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in E$.
Un insieme E si dice limitato inferiormente in X se esiste un numero $m \in X$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in E$.
Un insieme E si dice limitato in X se esiste un numero $m \in X$ e un numero $M \in X$ tale che $m \leq x \leq M$ per ogni $x \in E$.

Esercizio 1. Fai un esempio di insieme limitato solo superiormente, di un insieme limitato solo inferiormente e di un insieme limitato.

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} : n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$$

è superiormente limitato, inferiormente limitato o limitato.

Esercizio 3. Stabilire se l'insieme

$$B = \left\{ \frac{(-1)^n}{1 + n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

è superiormente limitato, inferiormente limitato o limitato.

Definizione. Un elemento $\overline{x}$ è massimo per l'insieme E se

1. $x \leqslant \overline{x}$ per ogni $x \in E$;
2. $\overline{x} \in E$.

Un insieme non limitato superiormente può avere massimo?

- ☐ sì
- ☐ no

Un insieme limitato superiormente ha sicuramente massimo?

- ☐ sì
- ☐ no

Scrivi qui la definizione di minimo.

Un insieme non limitato inferiormente può avere minimo?

- ☐ sì
- ☐ no

Un insieme limitato inferiormente ha sicuramente minimo?

☐ sì

☐ no

Definizione. Sia $E \subseteq X$. Un elemento $k \in X$ si dice **maggiorante** di E se $x \leq k$ per ogni $x \in E$.

Un insieme non limitato superiormente può avere maggioranti?

☐ sì

☐ no

Un insieme limitato superiormente con massimo ha maggioranti?

☐ sì

☐ no

Guarda la definizione di massimo. Il massimo è un maggiorante?

☐ sì

☐ no

Scrivi qui la definizione di minorante.

Il minimo è un minorante?

☐ sì

☐ no

Definizione. Sia $E \subseteq X$. Si chiama **estremo superiore** di E ($\sup E$) il più piccolo dei maggioranti.

Un insieme non limitato superiormente può avere estremo superiore (finito)?

☐ sì

☐ no

Se un insieme ha massimo, questo è sicuramente estremo superiore?

☐ sì

☐ no

Se un insieme ha estremo superiore (finito), questo è sicuramente massimo?

☐ sì

☐ no

Scrivi qui la definizione di estremo inferiore.

Attenzione! L'estremo superiore e l'estremo inferiore vivono nell'universo che si sta considerando! In particolare, se l'universo è $\mathbb{R}$, l'estremo superiore di un insieme superiormente limitato esiste sempre finito. Se l'universo è $\mathbb{Q}$, non è detto che l'estremo superiore di un insieme superiormente limitato esista. Questo segue direttamente dal fatto che in $\mathbb{R}$ vale **l'assioma di completezza**. Possiamo quindi affermare che

un insieme $E \subset \mathbb{R}$

- non vuoto
- superiormente limitato

ammette sempre estremo superiore in $\mathbb{R}$ (perché il suo insieme dei maggioranti ammette minimo).

Nel caso in cui l'estremo superiore non esiste perché l'insieme è superiormente illimitato, si può scrivere $\sup E = +\infty$.

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. L'estremo superiore dell'insieme $\{\cos x : x \in (-\pi, -\pi/2)\}$ è
   (a) 0
   (b) -1
   (c) non esiste
   (d) $-\pi/2$
2. L'estremo inferiore dell'insieme $\{e^x : x \in (0, 2)\}$ è
   (a) e^2
   (b) 1
   (c) 0
   (d) non esiste
3. Sia $A = \left\{1 - \frac{1}{n^2} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$. Allora
   (a) A non è limitato
   (b) A è limitato e $\inf A = 1$
   (c) A è limitato e $\sup A = 1$
   (d) $\inf A$ non esiste
4. Sia $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 3} > x\right\}$, allora
   (a) $\sup A$ non esiste poiché $A = \emptyset$
   (b) $\sup A = +\infty$
   (c) $\inf A = \sqrt{3}$

(d) $\sup A = -\sqrt{3}$

5. Sia $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{3 - x^2}\right\}$, allora

   (a) $\inf A = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e non esiste il minimo di A

   (b) $\min A = -\sqrt{3}$

   (c) $\inf A = -\sqrt{3}$ e non esiste il minimo di A

   (d) $\min A = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

(Soluzioni: a b c d a)

Svolgere i seguenti esercizi:

1. Sia
$$D = \left\{x : \sqrt{9 - x^2} > x\right\}.$$
Calcolare estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme D. Stabilire se i valori trovati sono anche (rispettivamente) massimo e minimo dell'insieme giustificando adeguatamente la risposta

2. Determinare, fornendo le necessarie giustificazioni, estermo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo del seguente insieme:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{2x+3}{x-2}\right| < 2\right\}.$$

3. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente, limitati inferiormente, e determinarne l'eventuale estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo:
$$E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2 - 1}{n + 2} \text{ dove } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\right\},$$
$$F = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x + 1} > x\right\}.$$
Giustificare le risposte fornite.