Programma.

- Successioni limitate e successioni convergenti: definizione, esempi e contro esempi. Ogni successione convergente è limitata, è falso il viceversa. Teorema di unicità del limite. Successioni divergenti ed irregolari.

- Successioni monotone e teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate e non limitate. Le successioni q^n e n^α.

- Algebra dei limiti (dimostrazione del prodotto). Estensione dell'algebra alle successioni divergenti. Teoremi del confronto per successioni convergenti e divergenti. Esempi. Forme di indecisione.

- Definizione del numero di Nepero come $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Limiti notevoli: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha-1}{\varepsilon_n}$, con $\varepsilon_n\to 0$.

- Definizione di infinito e di infinitesimo. Confronto fra infiniti e confronto fra infinitesimi. Definizione di asintotico. Principio di sostituzione degli asintotici. Esempi. Gerarchia degli infiniti. Teorema di permanenza del segno per successioni.

Definizione. Si definisce successione una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno e un solo numero reale a_n. Si indica con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Quindi il numero di partenza è n che sta in $\mathbb{N}$, mentre la sua immagine a_n sta in $\mathbb{R}$. L'insieme delle immagini è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (questo significa che se è limitato superiormente ammette estremo superiore finito).

Come per gli insiemi, anche le successioni possono essere superiormente limitate, inferiormente limitate oppure limitate.

Successione superiormente limitata

Successione inferiormente limitata

Successione limitata

Esercizio. Fare un esempio di successione limitata solo superiormente, di successione limitata solo inferiormente e di successione limitata.

Definizione. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice convergente a ℓ se per ogni $\varepsilon > 0$ esite N tale che per ogni $n \geqslant N$ allora vale $|a_n - \ell| < \varepsilon$.
Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

Analizziamo la definizione:

- $\forall\varepsilon > 0$: è la prima variabile che compare nella definizione. ε è un numero reale positivo. Ciò che segue deve valere per **TUTTI** i numeri reali positivi

- Esiste N tale che per ogni $n \geqslant N$ serve a dire che ciò che compare dopo non deve necessariamente valere per ogni n la solo per n abbastanza grande. Qualcuno dice anche «definitivamente».

- $|a_n - \ell| < \varepsilon$: questo è ciò che deve valere. Se togliamo il modulo si ottiene $-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$, che equivale a $\ell - \varepsilon < a_n < \varepsilon + \ell$: i valori a_n sono compresi tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$.

Mettiamo insieme tutte le informazioni:

- per ogni ε reale positivo, da un certo punto in poi (da un certo n_0 in poi, che dipende dalla ε scelta) si ha che le immagini a_n hanno valori compresi tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$.

- Se ε è un positivo reale molto grande, i numeri $|\ell - \varepsilon|$ e $\ell + \varepsilon$ sono molto grandi. Dire che le immagini a_n hanno valori compresi tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$ è quasi ovvio.

- Se ε è un positivo reale molto piccolo, i numeri $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$ sono molto vicini a ℓ. Dire che le immagini a_n hanno valori compresi tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$ non è più ovvio.

Esercizio. Verificare applicando la definizione che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

Uno dei teoremi più importanti di questa parte è il seguente:

Teorema. *Una successione convergente non può avere due limiti distinti*

Dimostrazione. Questa dimostrazione è per assurdo.

Esercizio. Fare un esempio di successione limitata ma non convergente.

Un altro teorema molto importante è il seguente:

Teorema. *Una successione convergente è limitata*

Dimostrazione.

Scrivere la definizione di successione divergente a $+\infty$:

Scrivere la definizione di successione divergente a $-\infty$:

Una successione che non è convergente e nemmeno divergente, si dice irregolare.

Esercizio. Verificare con la definizione che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty.$$

Attenzione! Il limite può solo essere per $n \to +\infty$! Non ha alcun senso fare un limite per $n \to -\infty$ perché n è un numero naturale, quindi positivo e non può avvicinarsi a $-\infty$. Non ha alcun senso fare un limite per $n \to 5$, perché n è naturale e può essere uguale a 5 e si può benissimo calcolare quanto vale a_5.

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. Se la successione $\{a_n\}$ converge, allora:

(a) è monotona
(b) è infinitesima
(c) è limitata
(d) è strettamente monotona

2. Condizione sufficiente affinché una successione converga è che sia
   (a) monotona
   (b) monotona e limitata
   (c) limitata
   (d) monotona strettamente crescente

3. Sia $\{a_n\}$ una successione reale inferiomente limitata. Allora
   (a) non esiste $\sup\{a_n\}$
   (b) non esiste $\min\{a_n\}$
   (c) esiste $\inf\{a_n\} \in \mathbb{R}$
   (d) nessuna delle altre risposte

4. Sia $\{a_n\}$ una successione reale strettamente decrescente. Allora
   (a) esiste $\max\{a_n\}$
   (b) esiste $\min\{a_n\}$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$
   (d) nessuna delle altre risposte

(Soluzioni: C B C A)

Scrivere la definizione di successione monotona crescente:

Scrivere la definizione di successione monotona decrescente:

Esercizio. Fare un esempio di successione monotona crescente e di successione monotona decrescente, verificando la definizione.

Una successione monotona può essere convergente o divergente, non è mai irregolare.

Teorema. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata. Allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione.

Nella dimostrazione si usa la proprietà dell'estremo superiore (assioma di completezza) di $\mathbb{R}$: in $\mathbb{Q}$ il teorema non vale!

Scrivere l'enunciato del teorema per una successione monotona decrescente e inferiormente limitata.

Successioni base

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} & q > 1 \\ & q = 1 \\ & -1 < q < 1 \\ & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} & \alpha > 0 \\ & \alpha = 0 \\ & \alpha < 0 \end{cases}$$

Calcolo di limiti per successioni convergenti

Quando si ha a che fare con successioni convergenti, non ci sono problemi nel calcolo di limiti, come affermato dal seguente teorema.

Algebra dei limiti Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Allora

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = ab$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ con $b_n, b \neq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b$ con $a_n, a \neq 0$

Un altro teorema molto importante è il seguente:

Teorema del confronto per successioni convergenti. Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che $a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente. Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell.$$

Dimostrazione.

Calcolo di limiti per successioni divergenti

L'algebra dei limiti si può estendere anche alle successioni divergenti, con particolare attenzione alle **forme di indecisione** che si possono trovare:

Scrivi le forme di indecisione:

Anche per le successioni divergenti esiste il teorema del confronto:

Teorema del confronto per successioni divergenti. Siano a_n, b_n due successioni tali che $a_n \le b_n$ definitivamente.

1. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.
2. Se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Anche questo teorema si può dimostrare facilmente usando la definizione di limite.

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti usando algebra dei limiti e teoremi del confronto:

a. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

b. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3}\right)$

c. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

d. $\lim_{n\to+\infty} \left(2\log(n) - \log(5n^2+2)\right)$

e. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}+1}$

f. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log\sqrt{n^3}-\log\sqrt[4]{n}}{5\log n}$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite al variare di b:

$$\lim_{n\to+\infty} n^b(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2})$$

Limiti notevoli e asintotico

Partiamo dalla seguente definizione:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Da questo momento in poi, chiamiamo $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che converge a zero.

Vale la seguente estensione del precedente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\varepsilon_n)^{(1/\varepsilon_n)} = e.$$

Da questo limite, ne discendono altri:

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1\\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1\\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha-1}{\varepsilon_n} = \alpha\end{aligned}}$$

A questi si aggiungono

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1\\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}}$$

Consideriamo ora due successioni a_n e b_n. Diciamo che sono asintotiche se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Si indica con $a_n \sim b_n$.

$$\boxed{a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1}$$

Attenzione! Asintotico non vuol dire uguale! Due successioni asintotiche hanno lo stesso comportamento (entrambe convergenti allo stesso limite, entrambe divergenti). L'asintotico funziona solo con prodotti e quozienti, ma non con somme e esponenziali.

Trasforma i limiti notevoli sopra in relazioni con l'asintotico:

Gerarchia degli infiniti. Per $n \to +\infty$ si ha

$$\log_a n \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 0$.

Esercizio. Calcola i seguenti limiti, usando tutti gli strumenti che conosci:

a. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$

b. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}-1}{\sin\frac{1}{n^2}}$

c. $\lim_{n\to+\infty} n^2 \log\left(\dfrac{n^3+3}{n^3+2}\right)\log\left(2^n+n^2\right)$

d. $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n^3}$

e. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(n^5+1)-5\log n}{\sin\frac{1}{n^5}}$

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3}\right) =$
   (a) $+\infty$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   (c) $-\infty$
   (d) 0

2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)}{n+1} =$

(a) $-\frac{1}{2}$
(b) 0
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $+\infty$

3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

   (a) 0
   (b) $+\infty$
   (c) e
   (d) $-\infty$

4. Siano $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+1)!$ e $b_n = (n-1)!$

   (a) $\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore a $\{b_n\}$
   (b) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine
   (c) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti non confrontabili
   (d) $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$

5. Siano $a_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)e^{n+1}$ e $b_n = n^n$

   (a) $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$
   (b) $\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore a $\{b_n\}$
   (c) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine
   (d) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti non confrontabili

6. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\left(n^3+\log n\right)}{n^4+\log^2 n} =$

   (a) $+\infty$
   (b) 0
   (c) $\dfrac{5}{4}$
   (d) 1

7. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^4+e^n}{e^n\log n+e^{-n}} =$

   (a) $+\infty$
   (b) 1
   (c) $-\infty$
   (d) 0

8. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1} =$

   (a) 1
   (b) $+\infty$
   (c) 0
   (d) non esiste

9. Individuare tra $a_n = e^{2n}$, $b_n = 4^n$, $c_n = \log(4^n + 1)$, $d_n = n^{100}$ l'infinito di ordine superiore.

   (a) a_n

   (b) b_n

   (c) c_n

   (d) d_n

10. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\cos\left(\frac{1}{n}\right) - n^2\right] =$

   (a) 0

   (b) $-\infty$

   (c) $+\infty$

   (d) Il limite non esiste

11. La successione $a_n = \frac{n}{n+2}$, per $n \geqslant 1$ è

   (a) monotona crescente

   (b) monotona decrescente

   (c) non superiormente limitata

   (d) nessuna delle altre risposte

12. La successione $a_n = \frac{n^2+1}{n}$, per $n \geqslant 1$ è

   (a) superiormente limitata

   (b) non superiormente limitata

   (c) non inferiormente limitata

   (d) nessuna delle altre riposte

13. Sia $a_n > 0$ per ogni n e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Allora

   (a) $a > 0$

   (b) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n si ha $a_n > a - \varepsilon$

   (c) $a \geqslant 0$

   (d) nessuna delle altre risposte

14. Sia a_n una successione e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a < 0$. Allora

   (a) per ogni n si ha $a_n < 0$

   (b) per ogni n si ha $a_n \leqslant 0$

   (c) esiste N tale che se $n \geqslant N$ allora $a_n < 0$

   (d) nessuna delle altre risposte

15. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni positive. Se sono due infiniti e $a_n \sim b_n$, allora

   (a) $\frac{a_n}{(b_n)^2} \longrightarrow 0$

   (b) $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \longrightarrow 1$

   (c) $a_n - b_n \longrightarrow 0$

   (d) nessuna delle altre risposte

16. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni positive. Se sono due infinitesimi e $a_n \ll b_n$, allora

(a) $\log(a_n) - \log(b_n) \longrightarrow +\infty$

(b) $\frac{a_n}{b_n^2} \longrightarrow 0$

(c) $\frac{(a_n)^2}{b_n} \longrightarrow 0$

(d) nessuna delle altre risposte

17. Si dice che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se

    (a) $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0$ tale che se $n \geqslant n_0$ allora $|a_n - \ell| < \varepsilon$

    (b) $\forall\varepsilon > 0$ e $\forall n_0\ \exists n \geqslant n_0$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$

    (c) $\forall M > 0\ \exists n_0$ tale che se $n \geqslant n_0$ allora $|a_n - \ell| > M$

    (d) $\exists n_0$ tale che $\forall\varepsilon > 0$ e $\forall n \geqslant n_0$ si ha $|a_n - \ell| < \varepsilon$

18. Si dice che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

    (a) $\forall M > 0$ e $\forall n_0\ \exists n \geqslant n_0$ tale che $a_n > M$

    (b) $\forall M > 0\ \exists n_0$ tale che se $n \geqslant n_0$ allora $a_n > M$

    (c) $\forall M > 0\ \exists n_0$ tale che se $n \geqslant n_0$ allora $|a_n| < M$

    (d) $\exists n_0$ tale che $\forall M > 0$ e $\forall n \geqslant n_0$ si ha $a_n > M$

19. Il numero di Nepero “ e ” si definisce come

    (a) $2,718281828459$

    (b) un numero compreso tra 2 e 3.

    (c) $\lim_{n\to+\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$

    (d) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

20. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq 0$. Allora

    (a) se $\{a_n\}$ converge allora anche $\{b_n\}$ converge.

    (b) se $\{b_n\}$ diverge a $+\infty$ allora anche $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

    (c) se $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ allora anche $\{b_n\}$ diverge a $-\infty$.

    (d) se $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ allora anche $\{b_n\}$ diverge a $+\infty$.

21. Individuare la disposizione di infiniti corretta

    (a) $n^2 \ll \log^3 n \ll 2^n \ll n!$

    (b) $\log^3 n \ll n^2 \ll n! \ll 2^n$

    (c) $\log^3 n \ll n^2 \ll 2^n \ll n!$

    (d) $\log^3 n \ll 2^n \ll n^2 \ll n!$

(Soluzioni: A C B D B | A D C A B | A B C C A | C A B D D | C)

Esercizi dagli esami

1.(Giugno 2021) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n! + (n-1)!)\log\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{(n+1)!\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}$$

2.(Gennaio 2021) Determinare la più semplice successione asintotica a

$$a_n = \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e\right)}{\sqrt[4]{n^4+n} - n}$$

3.(Settembre 2020) Si considerino le successioni

$$a_n = n\log n \quad b_n = \sqrt{n}\log n \quad c_n = e^{\frac{1}{n}}\log n \quad d_n = n\log\left(1+e^{\frac{1}{n}}\right).$$

(a) Per ognuna di esse determinare (se possibile) la più semplice successione asintotica.

(b) Disporre poi le successioni a_n, b_n, c_n, d_n in ordine crescente di infinito giustificando opportunamente la propria disposizione.

4.(Febbraio 2020) Sia

$$a_n = \frac{\left(\log(1+e^{2n})\right)^2 \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\log n}.$$

(a) Determinare la più semplice successione asintotica ad a_n.

(b) Determinare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(c) Stabilire se a_n è di ordine superiore, inferiore, di ugual ordine o di ordine non confrontabile rispetto alla successione $b_n = n\log n$.

5.(Gennaio 2020) Determinare la più semplice successione asintotica alla seguente

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}{(n+5)^2}$$

6.(Gennaio 2022) Siano date le seguenti successioni:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{n!}{(n-3)!}\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
b_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}\\
c_n &= n\log\left(1+e^{\sqrt{n}}\right)\\
d_n &= (2n+e^{-n})\log(n).
\end{aligned}$$

a. Trovare la più semplice successione asintotica a ciascuna di esse.

b. Disporre le successioni in ordine crescente di infinito giustificando la propria disposizione calcolando opportuni limiti.