Programma d'esame preso in considerazione.

- Limiti di funzioni e continuità. Richiami sulle funzioni reali di una variabile reale: immagine, grafico, funzioni pari, dispari, limitate, periodiche, monotone. Funzioni composte. Funzioni inverse.
- Definizione successionale di limite. Limite destro e sinistro. Definizione topologica (ϵ-δ) di limite. Le definizioni successionale e topologica di limite sono equivalenti.
- Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo. Punti di discontinuità (o singolarità). Singolarità a salto, singolarità eliminabile, funzione prolungabile per continuità ed altri tipi di singolarità. Le funzioni elementari sono continue nel loro campo di esistenza.
- Algebra dei limiti, estesa anche a casi di limite infinito. Teoremi del confronto. Teorema di permanenza del segno. Teorema di cambiamento di variabile nei limiti. Forme di indecisione e limiti notevoli. Algebra delle funzioni continue. Continuità della funzione composta. Definizione di asintotico. Gerarchia degli infiniti. Asintoti orizzontali e verticali. Asintoti obliqui, definizione e caratterizzazione. Esempi. Funzioni con andamento lineare, sopralineare e sottolineare all'infinito. Esempi di utilizzo degli asintotici per disegnare il grafico locale di una funzione.
- Teorema degli zeri, discussione sulla essenzialità delle ipotesi. Teorema di Weierstrass, discussione sulla essenzialità delle ipotesi. Teorema dei valori intermedi. Invertibilità e continuità su un intervallo.

Funzioni

Scrivi la definizione di funzione pari:

Scrivi la definizione di funzione dispari:

Esercizio 1. Fai un esempio di funzione pari e un esempio di funzione dispari.

Scrivi la definizione di funzione monotona crescente:

Una funzione per cui vale $f(x) \leq f(x+1)$ è crescente?

☐ sì

☐ no

Scrivi la definizione di limite di funzione finito al finito:

Scrivi la definizione di limite di funzione infinito al finito:

Scrivi la definizione di limite di funzione finito all'infinito:

Scrivi la definizione di limite di funzione infinito all'infinito:

Stabilisci qual è la definizione di funzione continua in un punto x_0:

☐ Una funzione f è continua in un punto x_0 se succede che

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

☐ Una funzione f è continua in un punto x_0 se succede che

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

☐ Una funzione f è continua in un punto x_0 se succede che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Scrivi la definizione di punto di discontinuità a salto:

Esercizio 2. Fai un esempio di funzione con una discontinuità a salto.

Scrivi la definizione di punto di discontinuità di seconda specie:

Esercizio 3. Fai un esempio di funzione con una discontinuità di seconda specie.

Scrivi la definizione di punto di discontinuità eliminabile:

Esercizio 4. Fai un esempio di funzione con una discontinuità eliminabile.

Limiti notevoli

Diamo per buono che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

che equivale a dire

$$\sin x \sim x \quad \text{per } x \to 0.$$

Scrivi il limite notevole del coseno (anche come asintotico) e dimostralo:

Prendiamo ora

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Scrivi il limite notevole del logaritmo (anche come asintotico) e dimostralo:

Scrivi il limite notevole con l'esponenziale (anche come asintotico) e dimostralo:

Scrivi tutti i limiti notevoli che conosci con argomento $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to c$ (con $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) anche con l'asintotico:

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti di funzione:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2 - 1} \right)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{4 + x^2} - 2}$

4. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{2^{\cos x} - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\tan\left(\frac{2}{x}\right)\left(e^{-1/x} - 1\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{\log x + 1 - x^2}$

Scrivi la definizione di asintoto orizzontale:

Scrivi la definizione di asintoto verticale:

Scrivi la definizione di asintoto obliquo. Poi scrivi come si calcola:

Esercizio 6. Calcola l'insieme di definizione e il segno delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\log(x-1)-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4-x^2}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x-6}$
4. $f(x) = \log(x^3-2x)$
5. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2+2e^x}$
6. $f(x) = \log\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$

Esercizio 7. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4-x^2}.$$

Determinare insieme di definizione, zeri, segno, eventuali simmetrie, limiti nei punti di frontiera dell'insieme di definizione, equazioni di eventuali asintoti. Tracciare poi, sommariamente, il grafico probabile. Determinare il comportamento asintotico della funzione negli zeri.

Esercizio 8. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{27}{x}}.$$

Se ne determini un grafico approssimativo deducibile dalle sole informazioni su campo di esistenza, segno e continuità, dai limiti ai bordi del campo di esistenza e dalla presenza o meno di asintoti.

Esercizio 9. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x(3-x)}} - 1}{(x-6)^2}.$$

Determinarne campo di esistenza, segno, limiti ai bordi del dominio e disegnarne un grafico approssimativo utilizzando stime asintotiche della funzione nell'intorno dei punti in cui essa si annulla ed eventualmente all'infinito.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema degli zeri. Sia f continua in $[a, b]$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Ipotesi 1: Sia f continua in $[a, b]$. Perché è essenziale?

Ipotesi 2: Sia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Perché è essenziale?

Scrivi la definizione di massimo assoluto e di minimo assoluto per una funzione:

Teorema di Weierstrass. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f assume massimo e minimo assoluti in $[a, b]$.

Quali sono le ipotesi? Perché sono essenziali?

Teorema dei valori intermedi. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora per ogni λ compreso tra il minimo m e il massimo M si ha che esiste un valore $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = \lambda$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \lambda$. Verifica che a questa funzione si può applicare il teorema degli zeri e concludi:

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ è
   (a) dispari
   (b) pari
   (c) né pari né dispari
   (d) sia pari che dispari

2. La funzione $f(x) = \dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x}$ è
   (a) dispari
   (b) né pari né dispari
   (c) periodica
   (d) pari

3. La funzione $f(x) = \frac{|x|}{x}$ in $x = 0$
   (a) ha un asintoto verticale
   (b) ha un punto di discontinuità di tipo salto
   (c) è continua
   (d) non ammette limite finito né da destra né da sinistra

4. La funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ in $x = 0$
   (a) ha un asintoto verticale da destra
   (b) ha un punto di discontinuità di tipo salto
   (c) è continua
   (d) non ammette limite finito né da destra né da sinistra

5. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \\ e^{x} & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità in $x = 0$

   (a) Se e solo se $\alpha < 0$
   (b) Se e solo se $\alpha \neq 0$
   (c) Per ogni α
   (d) Per nessun α

6. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice pari se:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(-x) = f(x)$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $f(-x) = f(x)$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(-x) = -f(x)$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = -f(x)$

7. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice superiormente limitata se:

   (a) $\exists M$ tale che $\forall x \in A$ si ha $f(x) \leqslant M$
   (b) $\forall x \in A$ $\exists M$ tale che $f(x) \leqslant M$
   (c) $\exists M$ tale che $\forall x \in A$ si ha $|f(x)| \leqslant M$
   (d) $\exists M$ e $\exists x \in A$ tale che $f(x) \leqslant M$

8. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica se:

   (a) $\exists T \neq 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) + T = f(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists T$ tale che $f(x + T) = f(x)$
   (c) $\exists T \neq 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x + T) = f(x)$
   (d) $\exists T$ e $\exists x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x + T) = f(x)$

9. La funzione $f(x) = x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

   (a) ha asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$
   (b) non ha asintoti obliqui
   (c) ha asintoto obliquo a $+\infty$ ma non a $-\infty$
   (d) ha asintoto obliquo a $-\infty$ ma non a $+\infty$

10. Calcolare $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^x - e^3}{x - 3}$

   (a) 0
   (b) e^{-3}
   (c) e^{3}
   (d) 1

11. La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ presenta per $x \to +\infty$

   (a) Un asintoto obliquo di equazione $y = x$
   (b) Un asintoto orizzontale

(c) Un asintoto obliquo di equazione $y = x + \frac{1}{2}$

(d) Un asintoto obliquo di equazione $y = x - \frac{1}{2}$

12. La funzione $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ \alpha + \log(1+5x^2) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è continua in 0 se

    (a) $\alpha = 3/2$

    (b) $\alpha = 3/5$

    (c) $\alpha = 2$

    (d) $\alpha < 0$

13. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$

    (a) è prolungabile per continuità

    (b) ha un asintoto verticale

    (c) ha un punto di discontinuità di tipo salto

    (d) non ammette limite né da destra né da sinistra

14. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 1 + \log(1+x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

    ha una discontinuità in $x = 0$

    (a) Per nessun α

    (b) Se e solo se $\alpha \neq 1$

    (c) Se e solo se $\alpha \neq 0$

    (d) Se e solo se $\alpha > 0$

15. Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ continua. Allora

    (a) se f è limitata è possibile applicare il teorema di Weierstrass e concludere che f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti.

    (b) il teorema di Weiestrass non è applicabile.

    (c) per il teorema di Weierstrass f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo relativi.

    (d) per il teorema di Weierstrass f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti.

16. Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora

    (a) f è limitata.

    (b) f è inferiormente limitata.

    (c) f è superiormente limitata.

    (d) f è continua nel suo dominio di definizione

17. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0)f(1) \geq 0$. Allora

    (a) f è limitata.

    (b) non esiste alcun punto $c \in (0,1)$ tale che $f(c) = 0$.

    (c) f può non essere limitata.

    (d) esiste al più un solo punto $c \in (0,1)$ tale che $f(c) = 0$.

18. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x^2}$. Allora

   (a) per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluto

   (b) f è superiormente limitata ma non inferiormente limitata

   (c) f è superiormente ed inferiormente limitata

   (d) f è inferiormente limitata ma non superiormente limitata

19. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua su $[0,1]$. Se $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$ allora

   (a) f ha massimo assoluto, minimo assoluto e può non avere zeri.

   (b) f ha massimo assoluto, minimo assoluto ed almeno uno zero.

   (c) f ha almeno uno zero e può non avere massimo o minimo assoluti.

   (d) f può non avere massimi, minimi o zeri.

(Soluzioni: A D B A B | A A C A C | D C A A B | D A B B)

Esercizi dagli esami

1.(Gennaio 2022) Sia data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

Fornire uno studio della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, i punti di discontinuità e eventuali asintoti.

2.(Settembre 2021) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

3.(Settembre 2021) Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{4-x^2}\right)}.$$

Fornire uno studio della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, i punti di discontinuità e eventuali asintoti.

4.(Luglio 2021) Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b la seguente funzione è continua in $x = 0$:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax^2}-1}{x^2} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \dfrac{\log(1+bx^2)}{x} & x > 0 \end{cases}$$

5.(Luglio 2021) Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}.$$

Fornire uno studio della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, i punti di discontinuità e eventuali asintoti.

6.(Giugno 2021) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^4}-x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

7.(Giugno 2021) Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}.$$

Fornire uno studio della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, i punti di discontinuità e eventuali asintoti.