TUTORATO 6
Integrali

Programma d'esame preso in considerazione.

- **Integrali.** Definizione di primitiva e di integrale indefinito. La primitiva è unica a meno di una costante su un intervallo. Primitive immediate. Metodi di calcolo di primitive: integrazione per scomposizione. Esempi. Metodo di integrazione per parti. Esempi. Metodo di integrazione per sostituzione. Esempi.

  Definizione di integrale definito come limite delle somme di Cauchy-Riemann. Legame tra integrale definito e area. Integrabilità delle funzioni continue. Proprietà dell'integrale definito (linearità, monotonia, additività rispetto all'intervallo di integrazione). Teorema della media integrale, teorema sulla derivata della funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale.

- **Integrali generalizzati.** Definizione di integrale generalizzato di una funzione illimitata su un intervallo limitato. Esempi. Studio dell'integrale generalizzato di $1/(x-a)^\alpha$ su $(a,b]$. Criteri di integrabilità: confronto e confronto asintotico. Esempi.

  Definizione di integrale generalizzato su un intervallo illimitato. Esempi. Studio dell'integrale generalizzato di $1/x^\alpha$ su $[1,+\infty)$. Criteri di integrabilità per funzioni positive: confronto e confronto asintotico. Esempi.

Scrivi la definizione di primitiva:

Teorema. Siano F e G due primitive di una stessa funzione f in un intervallo $[a,b]$. Allora esiste una costante C tale che

$$G(x) = F(x) + C.$$

Dimostrazione.

Scrivi la definizione di integrale indefinito:

Abbiamo

$$\int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq 1) =$$
$$\int \frac{1}{x}dx =$$
$$\int \sin x dx =$$
$$\int \cos x dx =$$
$$\int e^{x}dx =$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

Ricorda:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \left[\int f(t)dt\right]_{t=\phi(x)}$$

Esercizio 1. Determinare i seguenti integrali indefiniti

a) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)(\sqrt{\arctan^2 x + 2})}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+2x+2}\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{x}\sin(3x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(3x)\,dx$

Definiamo ora la somma di Cauchy-Riemann di una funzione limitata f su intervallo $[a,b]$. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli (x_i, x_{i+1}) di stessa lunghezza con $i = 0, \cdots, n$ e chiamiamo $a = x_0$ e $b = x_n$. In ciascuno di questi intervalli (x_i, x_{i+1}) scegliamo un punto ξ_i. Siamo pronti per definire la somma di Cauchy-Riemann, che corrisponde alla somma delle aree con segno dei rettangoli di base un intervallo (x_i, x_{i+1}) e di altezza $f(\xi_i)$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

Definizione. Diciamo che la funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **limitata** è integrabile su $[a,b]$ se esiste finito il limite delle somme di Cauchy-Riemann e questo limite non dipende da come si scelgono i punti ξ_i. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Le funzioni continue sono integrabili.

Teorema della media. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua**. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dimostrazione. Il primo passo è usare il teorema di Weierstrass. Scrivi l'enunciato del teorema di Weierstrass:

Usa ora la proprietà di monotonia dell'integrale:

A questo punto serve il teorema dei valori intermedi. Scrivi l'enunciato:

Concludi la dimostrazione:

Chiamiamo funzione integrale la seguente funzione:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Teorema della derivata della funzione integrale. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua**. Allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che la funzione integrale è derivabile, cioè che esiste finito il limite del suo rapporto incrementale.

Scrivi il suo rapporto incrementale e semplificalo:

Applica ora il teorema della media alla funzione f sull'intervallo $[x, x+h]$:

Concludi:

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua**. Sia G una primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Scrivi la **dimostrazione** usando il teorema precedente:

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^2+9x+1}{x^2+4x-5}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x}{x^2+x^4+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{|x|}{x^2+2}\,dx$

Integrali generalizzati: funzione illimitata su un intervallo limitato

Sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continua con un asintoto verticale di equazione $x = a$, cioè

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty.$$

Quando la funzione f è integrabile?

Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \begin{cases} & \alpha < 1 \\ & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} & \alpha < 1 \\ & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} & \alpha < 1 \\ & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Esistono due criteri per studiare l'integrabilità al finito:

- criterio del confronto
- criterio del confronto asintotico

Criterio del confronto:

Criterio del confronto asintotico:

Integrali generalizzati: funzione su un intervallo illimitato

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua.

Quando la funzione f è integrabile?

Se $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{c} f(x)dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{c}^{M} f(x)dx$$

(se i due limiti esistono finiti separatamente).

Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} & \alpha \leq 1 \\ & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esistono due criteri per studiare l'integrabilità di funzioni di segno definitivamente costante su intervalli illimitati.

- criterio del confronto
- criterio del confronto asintotico

Supponiamo che f sia positiva.

Criterio del confronto:

Criterio del confronto asintotico:

Esercizio 3. Stabilire con un opportuno criterio la convergenza dei seguenti integrali generalizzati e, in caso positivo, calcolarli:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\log\left(x^2\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int_3^{4} \frac{\sin(3-x)}{(x^2-6x+9)^{3/4}}\,dx$ (Non calcolare)

Quiz. Scegliere la risposta corretta.

1. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua,

Risposta 1

A) allora $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *è derivabile in* $[a,b]$ *e* $F'(x)=f(x)+c$

B) allora $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *è derivabile in* $[a,b]$ *e* $F'(x)=f(x)$.

C) allora $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *è non negativa su* $[a,b]$.

D) se F *è una primitiva di* $f(x)$ *allora* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, e sia F una primitiva di f su $[a, b]$.

Risposta 2

A) *Allora* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
B) *Allora* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
C) *Allora* $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$.
D) *Allora* $\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

Risposta 3

A) $\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{b-a} f(c)$
B) $f(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$
C) $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$
D) $f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Quale delle seguenti successioni converge a $\int_0^1 f(x)\,dx$?

Risposta 4

A) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$
B) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
C) $S_n = \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$, *con* F *una primitiva di* f *su* $[0, 1]$.
D) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \frac{1}{n}$

5. Sia $f(x) = \sin(3x)$. La funzione $f(x)$ è una primitiva della funzione

Risposta 5

A) $-\frac{1}{3}\cos(3x)$
B) $-3\cos(3x)$
C) $-\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
D) $3\cos(3x)$

6. Sia $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$. Allora

Risposta 6

A) $F'(1) = 0$

B) $F'(1) = e^{-2}$
C) $F'(1) = e^{-1}$
D) *nessuna delle altre risposte*

7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(2t)\,dt =$

Risposta 7

A) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2$
B) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log 2$
C) $-\frac{2}{9}$
D) $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\log 2$

8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx$

Risposta 8

A) $3x^2\cos x - 6\cos x + x^3\sin x - 6x\sin x + C$
B) 0
C) $-6\pi^2 + 12$
D) $-\pi^3$

9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx$

Risposta 9

A) 0
B) $\frac{1}{80}\cos 5x - \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{1}{8}\cos x + C$
C) $\frac{4}{15}$
D) 2

10. Calcolare il seguente integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$

Risposta 10

A) $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} + c.$
B) $x^2\arctan(x^2) + c.$
C) $\arctan(x^2) + c.$
D) *Nessuna delle altre.*

11. Calcolare il seguente integrale indefinito $\displaystyle\int \log x\,dx$

Risposta 11

A) $\dfrac{1}{x} + c.$

B) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c.$

C) $x \log x - x + c.$

D) *Nessuna delle altre.*

12. Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato se

Risposta 12

A) *esiste finito* $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt.$

B) *esiste finito* $\lim_{x \to a^+} f(x).$

C) *detta* F *una primitiva di* f *si ha* $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$

D) *esiste finito* $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt.$

13. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste in senso generalizzato se e solo se:

Risposta 13

A) $\lim_{z \to +\infty} \int_1^z |f(x)|\, dx$ *esiste finito*

B) $\lim_{z \to +\infty} \int_1^z f(x)\, dx$ *esiste finito*

C) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} f(x)\, dx$ *esiste finito*

D) *nessuna delle altre risposte*

14. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{2x} dx =$

Risposta 14

A) $-\frac{1}{2}e^{-2}$

B) *l'integrale non converge*

C) e

D) $\frac{1}{2}$

(Soluzioni: B A C A D — C A B A C — C D B B)

Esercizi dagli esami

1.(Gennaio 2022) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$$

2.(Settembre 2021) Calcolare i seguenti integrali

$$A = \int_4^5 \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 3} dx$$
$$B = \int (\log x)^2 dx$$

3.(Luglio 2021) Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato e, in caso converga, calcolarlo

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx.$$

4.(Giugno 2021) Calcolare i seguenti integrali

$$A = \int \sin(4x)e^x dx$$
$$B = \int_0^1 \frac{x+1}{x+3}dx$$

5.(Febbraio 2021) Calcolare i seguenti integrali

$$A = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx$$
$$B = \int_0^1 xe^x dx$$

6.(Gennaio 2021) Stabilire se il seguente integrale generalizzato converge

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\log(\cos x)}{\sqrt{1+x^3}-1}dx.$$