Programma dettagliato del corso di Matematiche Complementari
a.a. 2023-2024 prof.ssa Giulia Furioli

M. Bramanti, G. Travaglini, Matematica. Questione di metodo, Zanichelli, 2009
M. Cazzola, Matematica per scienze della formazione primaria, Carocci, 2017

- Introduzione - linguaggio (un, uno, o, tutti, soli,....). I quantificatori "esiste $\exists$" e "per ogni $\forall$". Linguaggio: le negazioni. Implicazioni e controesempi. Richiami su elementi di teoria degli insiemi: elemento, appartenere, insieme vuoto, inclusione, intersezione, unione, differenza, complementare.
- Proposizioni e proprietà. Variabili libere e quantificate (o mute).
- Costruzione di una teoria matematica: enti primitivi e assiomi, definizioni e teoremi. Dimostrazioni: condizione necessaria e sufficiente.
- Introduzione alla teoria assiomatica dei numeri naturali: gli assiomi di Peano. Definizione e proprietà della somma nei numeri naturali. Prodotto nei numeri naturali: definizione e proprietà. La "proprietà dissociativa" non è una proprietà della somma, è un metodo di calcolo.
- La struttura della dimostrazione per induzione. Esempi di dimostrazione per induzione. Esercizi sul principio di induzione.
- Definizione di prodotto cartesiano di insiemi ed esempi. Definizione ed esempi di corrispondenze fra insiemi. Diagramma sagittale e diagramma a doppia entrata. Funzioni fra insiemi ed esempi. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biunivoca. Definizione di relazione su un insieme. Esempi. Relazioni riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive: definizioni ed esempi.
  Relazioni di equivalenza e classi di equivalenza: definizioni ed esempi. Due classi di equivalenza sono o disgiunte o coincidenti (con **dimostrazione**).
  Relazioni d'ordine: definizione ed esempi. Proposizione: la divisione euclidea. Definizione di classi di resti modulo n. La relazione di minore o uguale in $\mathbb{N}$. Relazione di ordine totale o non totale. Esempi.
- La sottrazione in $\mathbb{N}$: definizione e proprietà. La divisione esatta in $\mathbb{N}$: definizione e proprietà.
- La scrittura posizionale dei numeri naturali: teorema di decomposizione in una base qualunque maggiore o uguale a 2. Esempi con basi qualsiasi. Somme in base diversa da 10.
- Definizione di divisore ed esempi. Proposizione: se $a = qb$ con a, b e q naturali non nulli allora $q \leq a$ e $b \leq a$ (con **dimostrazione**). Massimo Comune Divisore (MCD). Proposizione: dati a, b non entrambi nulli, i divisori comuni di a e b sono tutti e soli i divisori di $\text{MCD}(a, b)$ (con **dimostrazione**). Algoritmo di Euclide delle divisioni successive.
- Proposizione: Siano a e b naturali non entrambi nulli e $a > b$. Sia $a = qb + r$ con $q \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < b$. Si ha che d è un divisore comune di a e b se e solo se d è un divisore comune di b e r (con idea della **dimostrazione** fatta su esempi numerici). Teorema di Bézout (con idea della **dimostrazione** fatta su esempi numerici).

- Numeri primi e numeri primi fra loro. Crivello di Eratostene. Se $n = pq$ con $n \in \mathbb{N}$ e p, q primi, allora almeno uno fra p e q è minore o uguale a $\sqrt{n}$ (con **dimostrazione**). Teorema Proprietà di Euclide: se p è un numero primo che divide il prodotto ab, allora p divide a oppure divide b (con **dimostrazione**). Teorema fondamentale dell'aritmetica (con **dimostrazione**). Perché 1 non è un numero primo. I numeri primi sono infiniti (con **dimostrazione**).

- Numeri interi relativi $\mathbb{Z}$: definizione tramite la retta dei numeri, definizione di somma e prodotto. Definizione di opposto rispetto alla somma e notazione $-a$. Sottrazione. Il significato del simbolo $-$ come opposto e come sottrazione: la sottrazione è l'addizione con l'opposto. Giustificazione della "regola dei segni" tramite la proprietà distributiva e altre proprietà. Estensione di ordinamento, di successivo e di multiplo in $\mathbb{Z}$.

- Numeri razionali $\mathbb{Q}$: definizione come classi di equivalenza di coppie di interi. Introduzione delle frazioni. Definizione di somma e prodotto in termini di frazioni. Proposizione: $\mathbb{Z}$ si identifica con un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$. Esistenza dell'inverso rispetto al prodotto. Divisione in $\mathbb{Q}$. La divisione in $\mathbb{Q}$ è il prodotto con l'inverso. Interpretazione di $\frac{a}{b}$ come divisione di interi in $\mathbb{Q}$. Frazioni ridotte ai minimi termini. Estensione a $\mathbb{Q}$ della relazione d'ordine. Proposizione: $\mathbb{Q}$ è denso (con **dimostrazione**).

- Scrittura posizionale dei numeri razionali: allineamenti decimali e conversioni tra frazione ed allineamento decimale. Conversione tra allineamento decimale e frazione generatrice. Il 9 periodico è una scrittura equivalente dell'1 alla posizione precedente: esempio $0,\overline{9} = 1$. Caratterizzazione delle frazioni corrispondenti a un allineamento decimale finito (con **dimostrazione**). Numerabilità di $\mathbb{Q}$.

- Grandezze commensurabili e incommensurabili. La diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili.