

Cognome e Nome _____ Matr. _____

- 1) Introdurre la costruzione dei numeri interi relativi \mathbb{Z} , dando per noto l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} munito delle operazioni di somma e prodotto. Introdurre quindi somma e prodotto in \mathbb{Z} elencando le loro proprietà. In particolare, mettere in evidenza quali nuove proprietà sono verificate in \mathbb{Z} rispetto a \mathbb{N} .
- 2) Fornire la definizione di numero primo e di numeri primi fra loro. Spiegare perché 1 non può essere considerato un numero primo. Dimostrare che i numeri primi sono infiniti.
- 3) (a) Enunciare il teorema di decomposizione di un numero naturale in una base b qualunque.
(b) Convertire i numeri $[145]_{10}$ e $[35]_{10}$ in base 12, utilizzando come simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B. In seguito sommarli, sempre in base 12 e infine verificare il risultato ottenuto ripassando alla base 10 ed effettuando la somma anche in base 10.
- 4) Enunciare gli assiomi di Peano e definire somma e prodotto in \mathbb{N} secondo la teoria di Peano.
- 5) (a) Fornire la definizione di relazione di equivalenza e fornire, giustificandolo, un esempio di relazione di equivalenza.
(b) Fornire la definizione di classe di equivalenza e dimostrare che due classi di equivalenza sono disgiunte oppure coincidenti.
- 6) Si consideri questa uguaglianza: $0, \overline{3} + 21, \overline{6} = 21, \overline{9}$. Se è vera, dimostrarla rigorosamente, mentre se è falsa fornire una rigorosa argomentazione del perché è falsa.
- 7) Mostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ il numero $4^n - 1$ è divisibile per 3.