

Cognome e Nome _____ Matr. _____

- 1) Fornire la definizione dell'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} utilizzando una opportuna relazione di equivalenza sull'insieme delle coppie di numeri interi. Spiegare in che senso l'insieme \mathbb{Q} così definito permette di estendere l'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} .
- 2) Fornire la definizione di proprietà e di proposizione. Delle frasi seguenti stabilire, giustificando opportunamente, se si tratta di proprietà, di proposizioni oppure di nessuna delle due.
 - (a) Ogni funzione continua è anche derivabile.
 - (b) Se n è un numero naturale pari, allora n è divisibile per 4.
 - (c) La relazione \mathcal{R} è riflessiva.
 - (d) Il numero p primo seguente.
- 3) Fornire la definizione di Massimo Comune Divisore (MCD) di due numeri naturali a e b , enunciare il teorema di Bézout e dimostrarlo nel caso particolare di $a = 2346$ e $b = 1512$ attraverso la determinazione di $\text{MCD}(2346, 1512)$.
- 4) Fornire la definizione di somma e di prodotto di numeri naturali secondo la presentazione assiomatica di Peano. Utilizzando il principio di induzione, mostrare che la definizione di prodotto sopra richiamato permette di determinare il prodotto $n \cdot m$ per ogni coppia di numeri naturali n, m (dando per noto che la somma di due numeri naturali sia sempre ben definita).
- 5) Siano $x = 0,1\bar{5}$, $y_1 = 0,2\bar{31}$ e $y_2 = 3,5$. Siano poi $z_1 = x \cdot y_1$ e $z_2 = x : y_2$.
 - (a) Senza fare calcoli, possiamo dire se x sarà più grande o più piccolo di z_1 ? Sarà più grande o più piccolo di z_2 ? Giustificare le proprie affermazioni.
 - (b) Convertire x, y_1 e y_2 in frazioni. Calcolare **solo** z_2 utilizzando l'espressione dei numeri sotto forma di frazione e solo alla fine convertire z_2 in allineamento decimale.
 - (c) Senza fare calcoli, era possibile prevedere se l'allineamento decimale di z_2 sarebbe stato finito, infinito periodico oppure infinito non periodico? Perché?
- 6) Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e \mathcal{R} la relazione su X seguente:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (c, a), (a, c), (d, d)\}$$

Disegnare il diagramma sagittale di \mathcal{R} e stabilire, giustificando opportunamente le proprie affermazioni, quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva sono verificate dalla relazione \mathcal{R} . Stabilire quindi se la relazione è di equivalenza, d'ordine oppure nessuna delle due.

- 7)
 - (a) Enunciare il teorema di decomposizione di un numero naturale in una base b qualunque.
 - (b) Convertire i numeri $[145]_{10}$ e $[35]_{10}$ in base 7. In seguito sommarli, sempre in base 7 e infine verificare il risultato ottenuto trasformando il risultato della somma in base 10 ed effettuando la somma anche in base 10.