

Cognome e Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_

- 1) Fornire la definizione dell'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  utilizzando una opportuna relazione di equivalenza sull'insieme delle coppie di numeri interi. Spiegare in che senso l'insieme  $\mathbb{Q}$  così definito permette di estendere l'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z}$ .
- 2) Fornire la definizione di proprietà e di proposizione. Delle frasi seguenti stabilire, giustificando opportunamente, se si tratta di proprietà, di proposizioni oppure di nessuna delle due.
  - (a) Ogni funzione continua è anche derivabile.
  - (b) Se  $n$  è un numero naturale pari, allora  $n$  è divisibile per 4.
  - (c) La relazione  $\mathcal{R}$  è riflessiva.
  - (d) Il numero  $p$  primo seguente.
- 3) Fornire la definizione di Massimo Comune Divisore (MCD) di due numeri naturali  $a$  e  $b$ , enunciare il teorema di Bézout e dimostrarlo nel caso particolare di  $a = 2346$  e  $b = 1512$  attraverso la determinazione di  $\text{MCD}(2346, 1512)$ .
- 4) Fornire la definizione di somma e di prodotto di numeri naturali secondo la presentazione assiomatica di Peano. Utilizzando il principio di induzione, mostrare che la definizione di prodotto sopra richiamato permette di determinare il prodotto  $n \cdot m$  per ogni coppia di numeri naturali  $n, m$  (dando per noto che la somma di due numeri naturali sia sempre ben definita).
- 5) Siano  $x = 0,1\bar{5}$ ,  $y_1 = 0,2\bar{31}$  e  $y_2 = 3,5$ . Siano poi  $z_1 = x \cdot y_1$  e  $z_2 = x : y_2$ .
  - (a) Senza fare calcoli, possiamo dire se  $x$  sarà più grande o più piccolo di  $z_1$ ? Sarà più grande o più piccolo di  $z_2$ ? Giustificare le proprie affermazioni.
  - (b) Convertire  $x, y_1$  e  $y_2$  in frazioni. Calcolare **solo**  $z_2$  utilizzando l'espressione dei numeri sotto forma di frazione e solo alla fine convertire  $z_2$  in allineamento decimale.
  - (c) Senza fare calcoli, era possibile prevedere se l'allineamento decimale di  $z_2$  sarebbe stato finito, infinito periodico oppure infinito non periodico? Perché?
- 6) Siano  $X = \{a, b, c, d, e\}$  e  $\mathcal{R}$  la relazione su  $X$  seguente:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (c, a), (a, c), (d, d)\}$$

Disegnare il diagramma sagittale di  $\mathcal{R}$  e stabilire, giustificando opportunamente le proprie affermazioni, quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva sono verificate dalla relazione  $\mathcal{R}$ . Stabilire quindi se la relazione è di equivalenza, d'ordine oppure nessuna delle due.

- 7)
  - (a) Enunciare il teorema di decomposizione di un numero naturale in una base  $b$  qualunque.
  - (b) Convertire i numeri  $[145]_{10}$  e  $[35]_{10}$  in base 7. In seguito sommarli, sempre in base 7 e infine verificare il risultato ottenuto trasformando il risultato della somma in base 10 ed effettuando la somma anche in base 10.