Università degli Studi di Bergamo — Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria
Matematiche Complementari — Tema 17 aprile 2024

Cognome e Nome ______________________________________ Matr. ____________

1) Fornire la definizione di numero primo. Dimostrare che i numeri primi sono infiniti.

2) Si consideri la proposizione seguente: "ogni successione convergente è limitata" che supponiamo vera. Di ogni proposizione che segue, stabilire se è vera, se è falsa o se nulla si può dire basandosi unicamente sulla verità della proposizone precedente.

   (a) Se una successione non è convergente, allora non è limitata.
   (b) Se una successione è limitata, allora è convergente.
   (c) Se una successione non è limitata, allora non è convergente.

3) (a) Fornire la definizione di relazione d'ordine su un insieme X generico.
   (b) Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seguente: se $n,\ m \in X$ poniamo $n\ \mathcal{R}\ m$ se e solo se n è divisibile per m (cioè esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $n = qm$). Dimostrare che si tratta di una relazione d'ordine.

4) Siano $q_1 = 5,0\overline{3}$ e $q_2 = 0,21$. Calcolare $z = q_1 \cdot q_2$ esprimendo il risultato come allineamento decimale e come frazione. L'ordine di grandezza del risultato ottenuto è plausibile? Giustificare tutti i propri ragionamenti.

5) Sia $p(x,y)$ la proprietà seguente: "il professore x insegna la materia y". Utilizzando i simboli $\forall$, $\exists$ e **non p**(x,y) scrivere le proposizioni seguenti:

   a) Ogni professore insegna almeno due materie diverse.
   b) Tutti i professori insegnano la stessa materia.
   c) C'è un professore che non insegna alcuna materia.
   d) C'è una materia che nessuno insegna.

   Fornire poi la negazione della proposizione b) sia in italiano che in linguaggio matematico.

6) Fornire la definizione di Massimo Comune Divisore (MCD) di due numeri naturali a e b, di numeri naturali primi fra loro ed enunciare il teorema di Bézout. Utilizzando l'algoritmo delle divisioni successive per calcolare $\mathrm{MCD}(1092, 408)$, ricavare l'uguaglianza

$$12 = 3 \cdot 1092 - 8 \cdot 408$$

7) Sia $P(n)$ la proprietà seguente: $6^n - 1$ è divisibile per 5. Mostrare per induzione che la proprietà $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.