

INFORMATICA PER LA COMUNICAZIONE



Reti e grafi

Reti casuali e reti reali

- Alcune proprietà delle reti reali **non sono consistenti** con il modello basato sulle reti casuali
 - ▣ Clusterizzazione
 - ▣ Presenza di nodi **altamente connessi**



Hub e legge di potenza



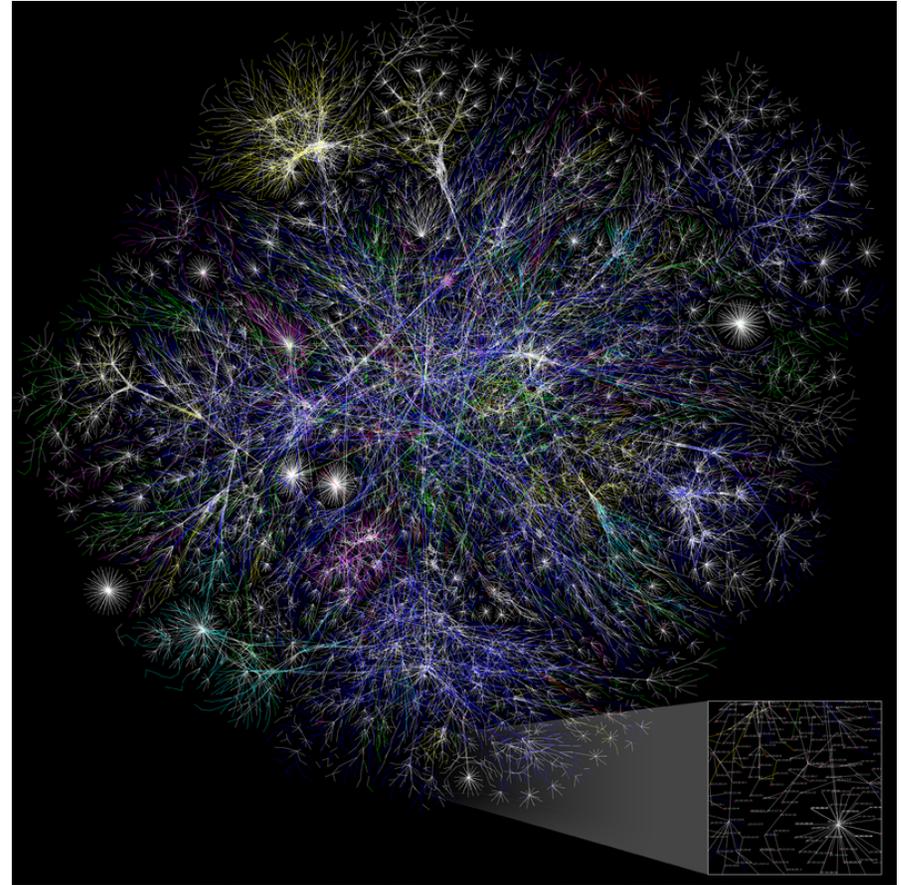
Connettori

- Le analisi di alcune reti hanno dimostrato l'**esistenza di nodi con un numero molto elevato di connessioni**
 - ▣ Reti di attori: Kevin Bacon
 - ▣ Collaborazioni scientifiche: Paul Erdos
 - ▣ Web: Google
 - ▣ ...



Hub

- Un **hub** (connettore), all'interno di una rete è un nodo con un grado estremamente **elevato**
- **L'esistenza di hub**: non spiegabile dal modello delle reti casuali



Fonte: By Matt Britt - English Wikipedia

Hub

- Reti casuali descrivono una situazione **egualitaria** tra i nodi
- Ogni nodo ha un ruolo simile (numero di collegamenti)
- In molte reti reali → situazione non verificata

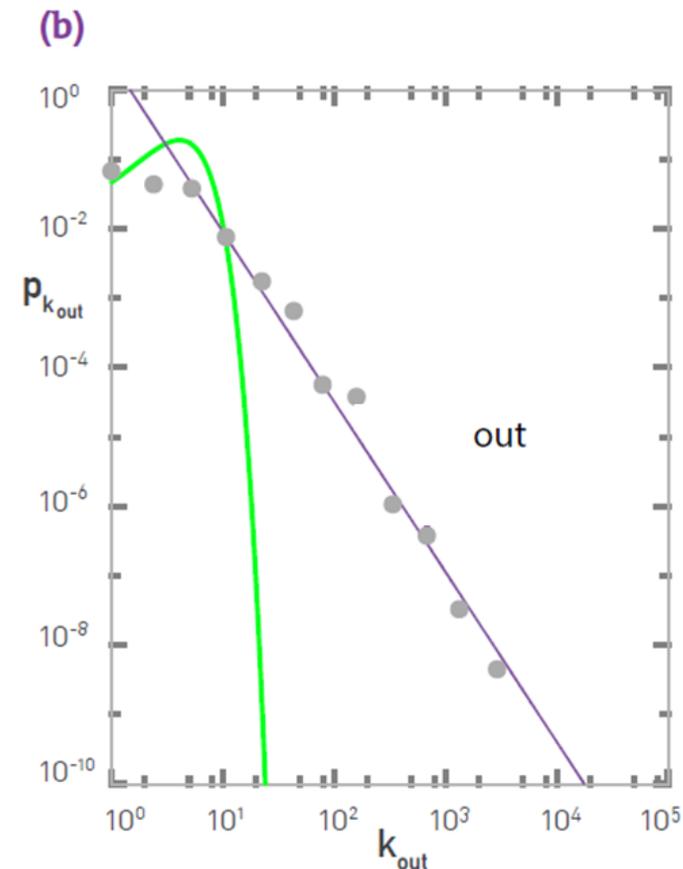
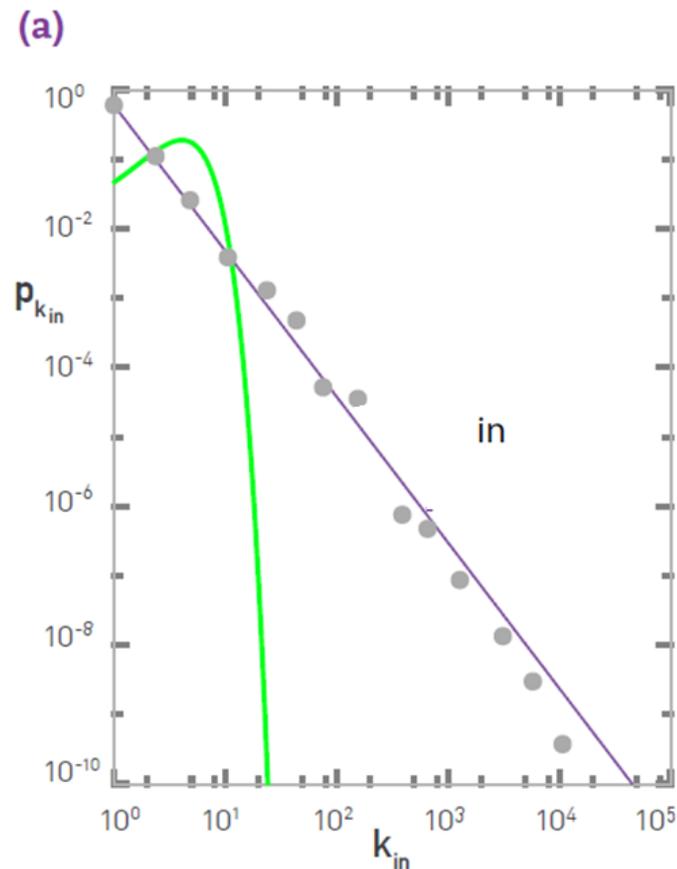


Hub

- **Nell'analisi del Web (Albert et al, 1999)**
 - ▣ 203.000.000 di pagine analizzate
 - ▣ **90% di pagine con meno di 10 link entranti**
 - ▣ **Tre pagine con circa 1.000.000 link entranti**
 - ▣ Se il Web fosse una rete casuale: **probabilità 10^{-99} di avere nodi con 500 di link entranti**



Distribuzione del grado del Web



Da A. L. Barabasi, *Network Science*



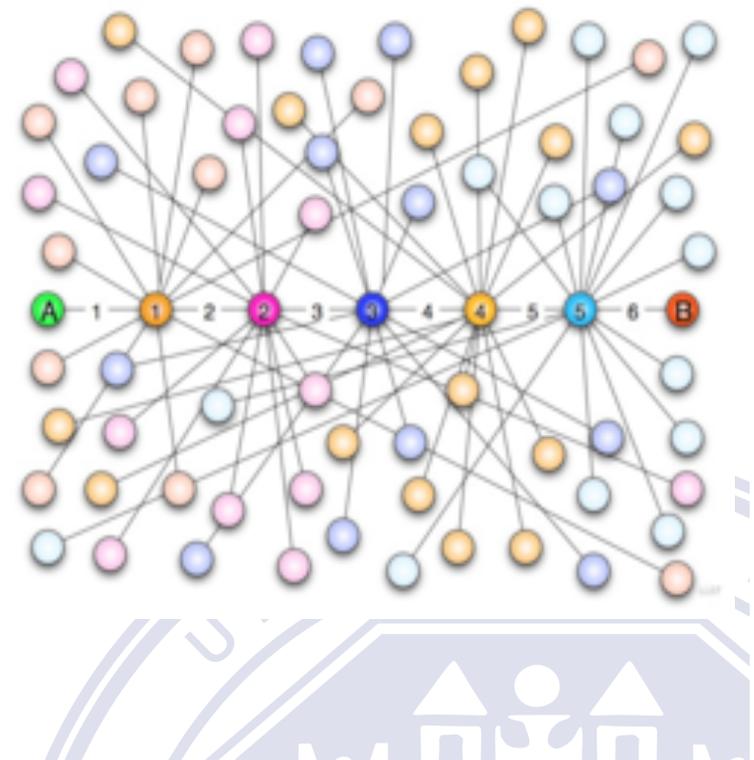
Hub e gradi di separazione

- La presenza di hub può essere utilizzata per spiegare il **grado di separazione** limitato
- Nodi del grafo collegati a hub con **cammini brevi**
- Utilizzando hub: **cammini brevi tra ogni coppia di nodi**



Importanza degli hub

- **Numero limitato** di nodi hub nella rete
- Permettono l'interscambio tra nodi sparsi nella rete



Importanza degli hub

Esempio: Rete aeroportuale



Legge di potenza

- La presenza di hub all'interno di una rete viene spiegata con un nuovo modello: reti che seguono una legge di potenza o a invarianza di scala



Legge di potenza

Reti sociali e grafi



Distribuzione del grado

Reti casuali

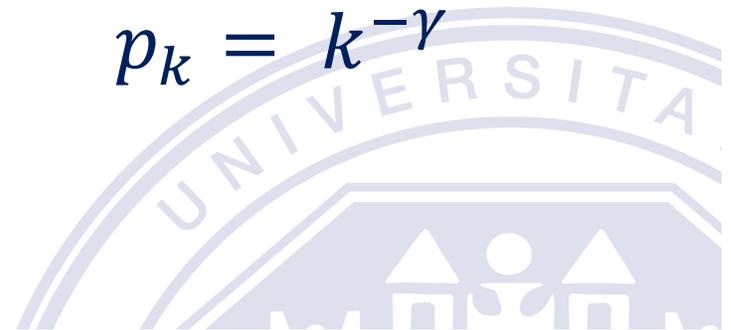
- Distribuzione del grado segue distribuzione di Poisson

$$p_k = e^{-\bar{k}} \frac{\bar{k}^k}{k!}$$

Reti reali

- Distribuzione del grado segue una **legge di potenza**

$$p_k = k^{-\gamma}$$



Legge di potenza

Definiamo

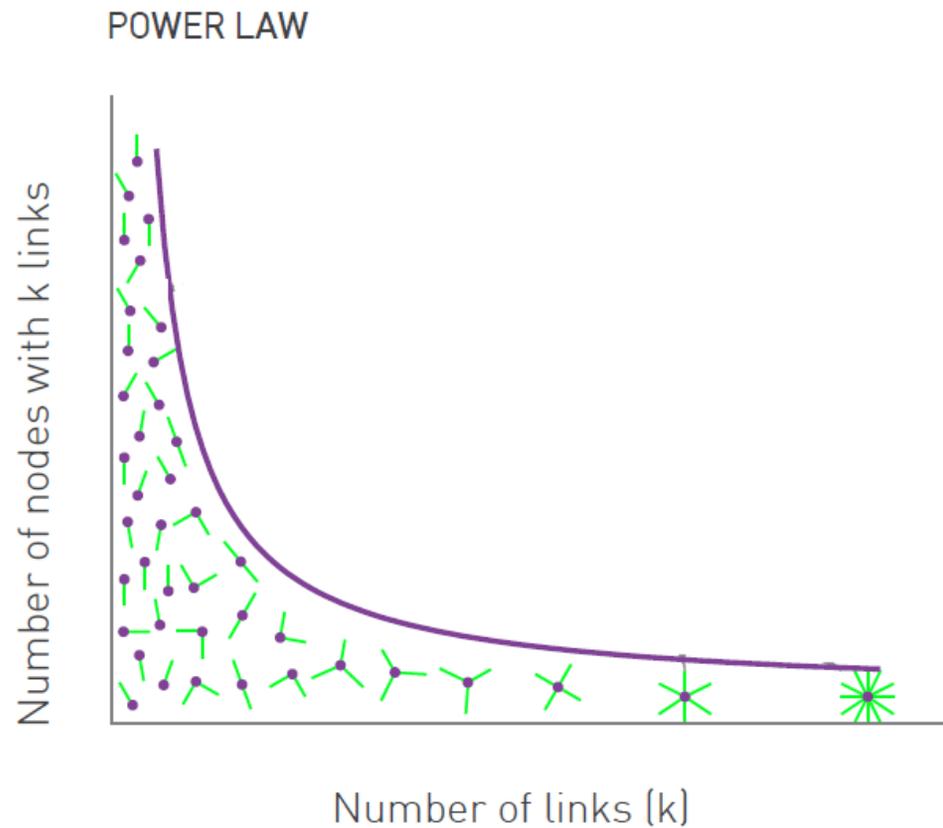
- p_k : probabilità nodi con grado k
- p_k segue **legge di potenza** se:

$$p_k = C k^{-\gamma}$$

- Al crescere di $k \rightarrow$ diminuisce p_k



Legge di potenza



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Legge di potenza

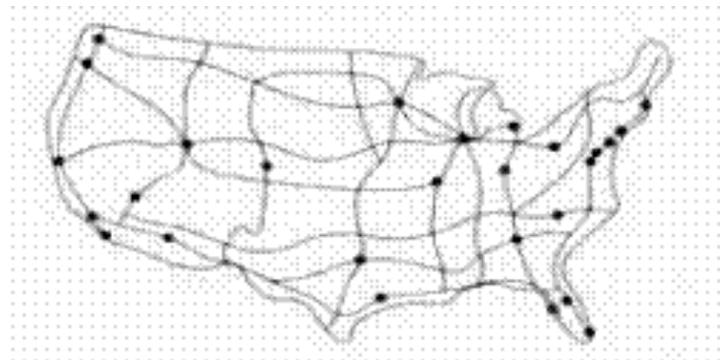
- Confrontiamo i due modelli di reti
 - ▣ Reti casuali
 - ▣ Reti che obbediscono alla legge di potenza (*Power Law*)



Reti casuali e legge di potenza

Rete casuale

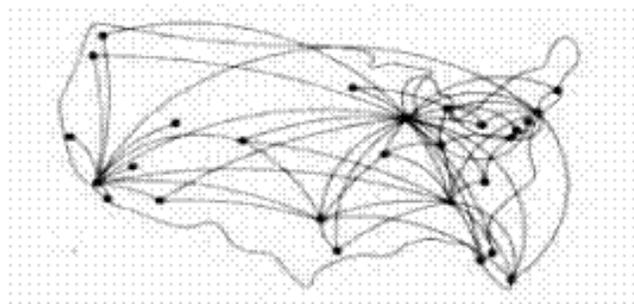
- Distribuzione del grado di nodi:
 - ▣ Distribuzione di Poisson
 - ▣ Pochi nodi **più connessi** della media
 - ▣ **Non esistono hub**



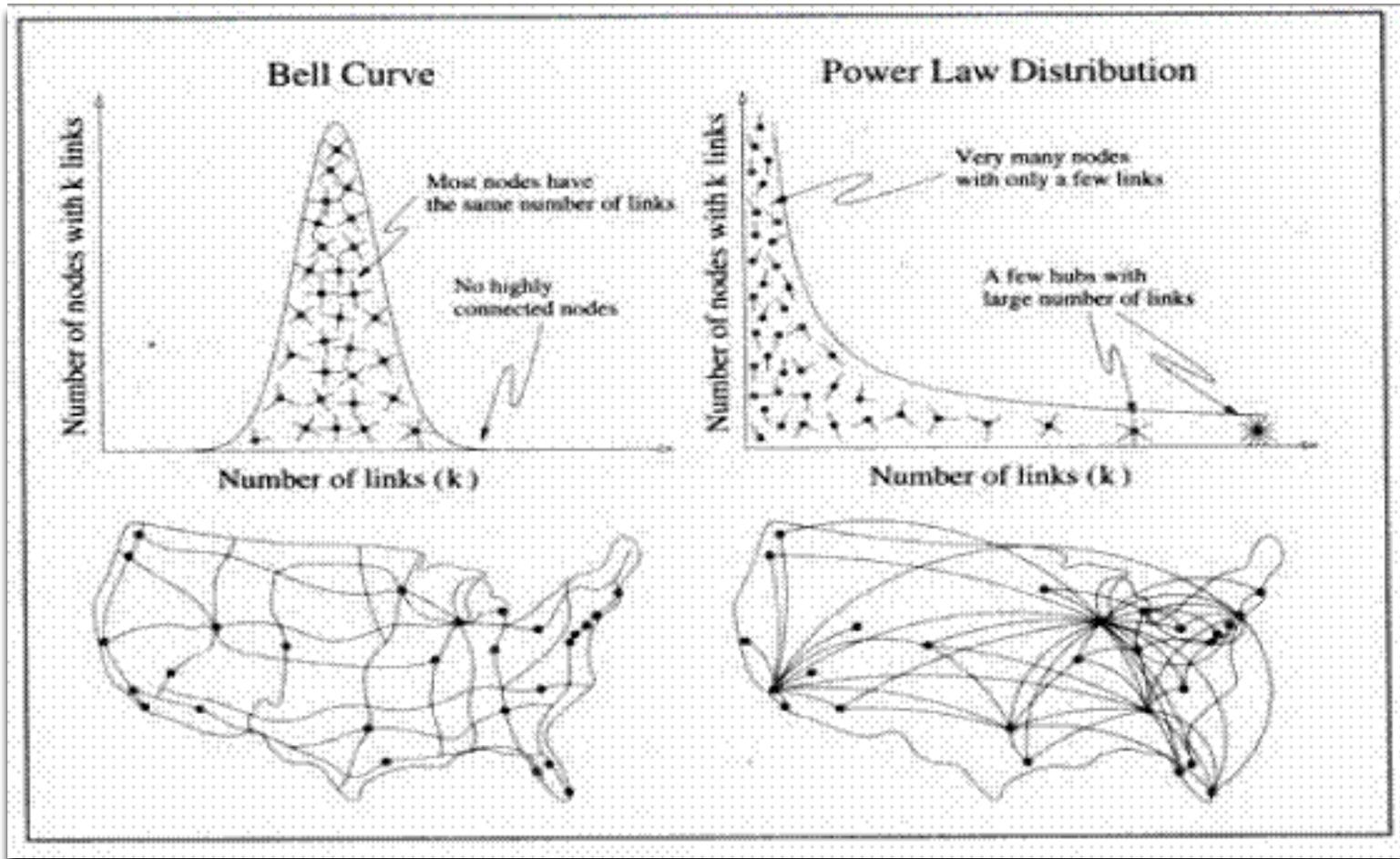
Reti casuali e legge di potenza

Rete che segue legge di potenza

- Distribuzione del grado dei nodi: **legge di potenza**
 - ▣ Molti nodi con grado **limitato**
 - ▣ Parte significativa di nodi **più connessi** della media
 - ▣ Una piccola parte di nodi **molto più connessa** della media
→ **hub**



Reti casuali e legge di potenza



Reti a invarianza di scala

- Una rete che segue una **legge di potenza** viene detta a **invarianza di scala**
- **Invarianza di scala**: rapporto tra numero di nodi e numero di connessioni invariante



Invarianza di scala

- Nelle **reti casuali**, i nodi hanno grado vicino al grado medio: **scala della rete**
- Reti a che seguono **legge di potenza**: a **invarianza di scala**, *scale free*)
 - ▣ I nodi possono avere un grado **arbitrariamente lontano** dalla media
 - ▣ Il grado medio **non rappresenta una scala** della rete



Invarianza di scala

- Nelle **reti casuali**, i nodi hanno grado vicino al grado medio: il grado medio rappresenta una **scala della rete**
- Nelle reti a che seguono **legge di potenza** (dette a **invarianza di scala, *scale free***) i nodi possono avere un grado **arbitrariamente lontano** dalla media: il grado medio **non rappresenta una scala della rete**

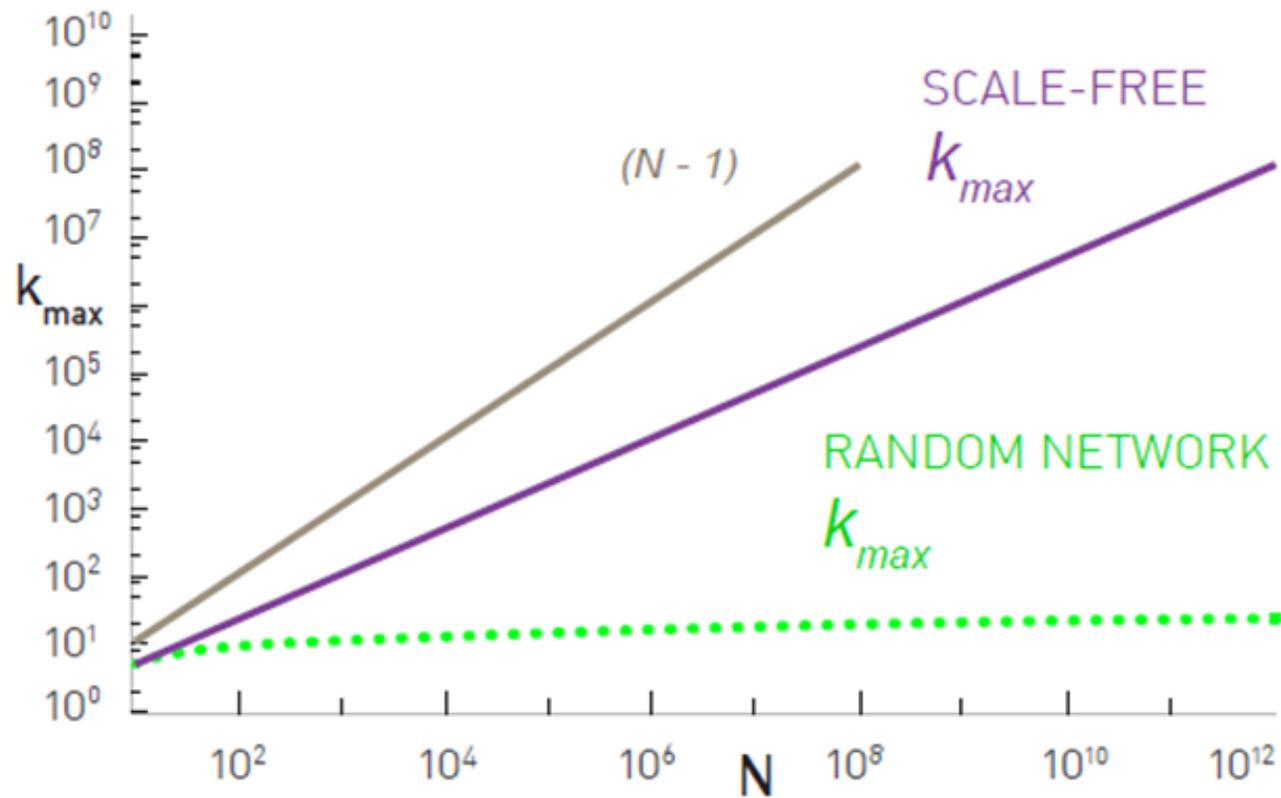


Legge di potenza

- Analizziamo il **grado massimo** di una rete e come cambia in funzione del numero di nodi complessivo
 - ▣ Rete casuale
 - ▣ Rete che segue legge di potenza



Grado massimo



Da A. L. Barabasi, *Network Science*



Legge di potenza

- Rete casuale: assenza di hub
- Rete che segue legge di potenza
 - ▣ Presenza di hub
 - ▣ Pochi hub enormi



Grado massimo

Reti casuali

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\ln N}{\lambda}$$

Legge di potenza

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$k_{max} = k_{min} + \frac{\ln N}{\lambda}$$



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Reti casuali e legge di potenza

- Reti che seguono **legge di potenza** presenti in diversi ambiti
 - Web
 - Reti sociali
 - Economia
 - Interazioni biologiche
 - ...



Legge di potenza

- La legge di potenza viene osservata in economia:
una **minoranza** detiene la parte più consistente della ricchezza
 - ▣ Pareto osserva che l'80% della ricchezza appartiene al 20% della popolazione
- **Regola 80/20**
 - ▣ 80% dei guadagni dovuto al 20% dei dipendenti
 - ▣ 80% dei link verso 15% delle pagine Web
 - ▣ ...



Reti casuali e a piccolo mondo

NETWORK	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
Science Collaboration	23,133	93,439	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
Citation Network	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03**	4.00*	-
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*



Regimi e invarianza di scala

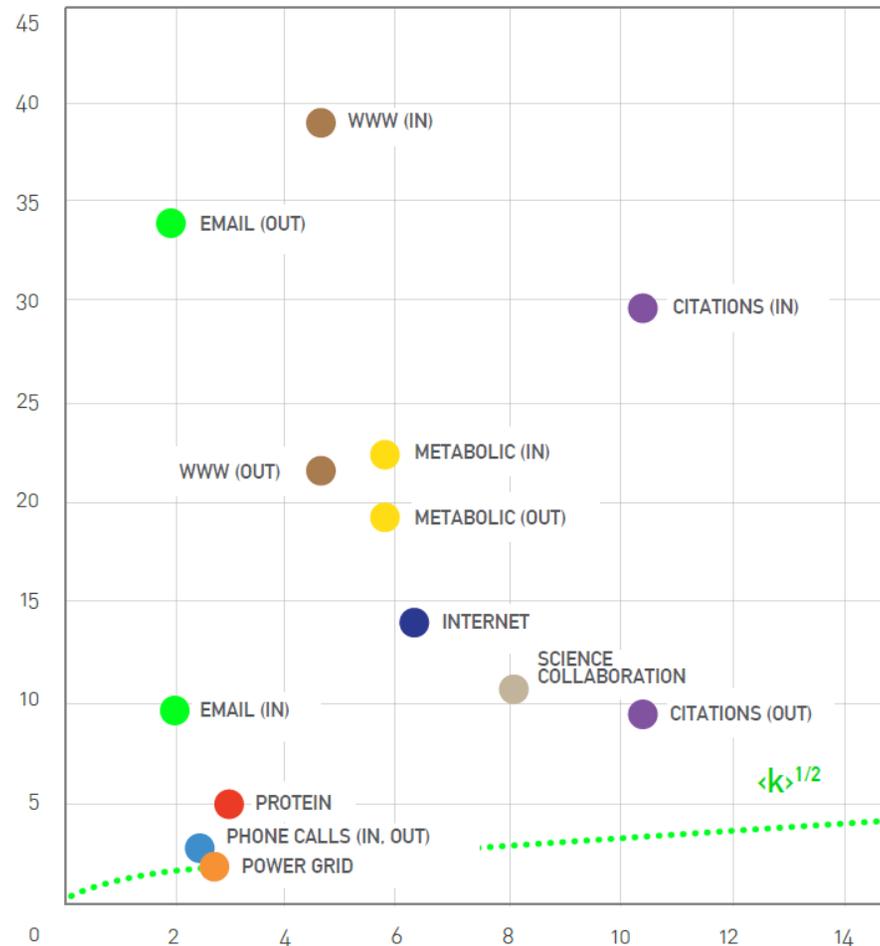
Numero di nodi con grado k :

$$p_k = C k^{-\gamma}$$

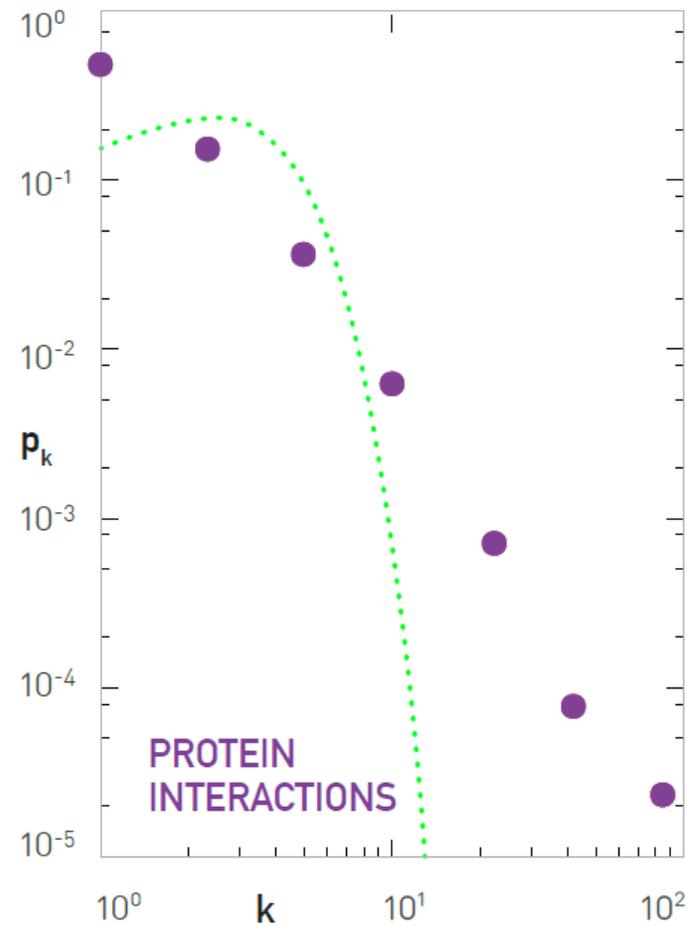
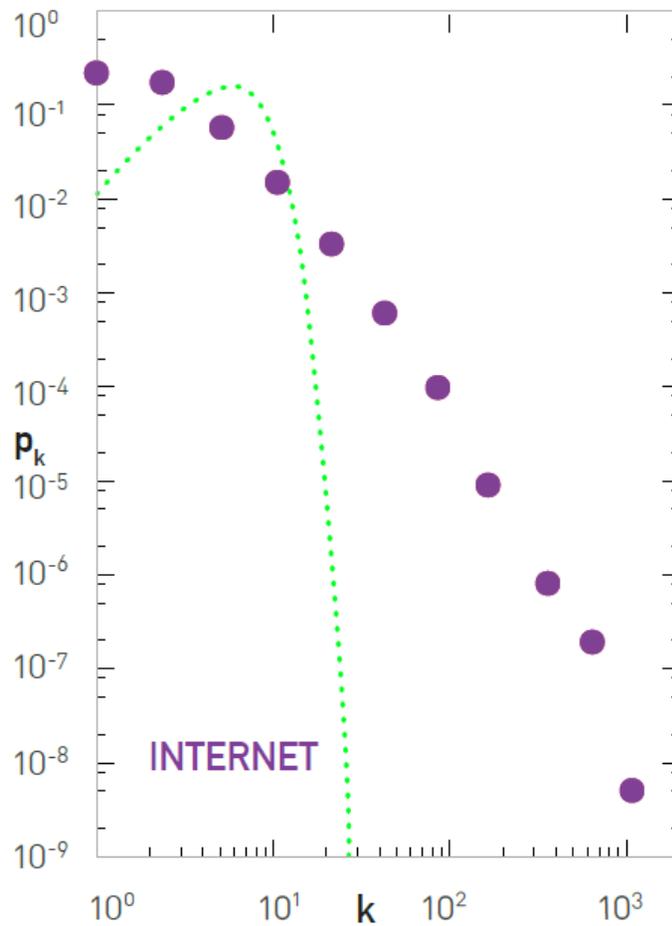
Nelle reti reali?



Reti casuali e a piccolo mondo



Reti casuali e invarianza di scala



Regimi e invarianza di scala

Numero di nodi con grado k :

$$p_k = C k^{-\gamma}$$

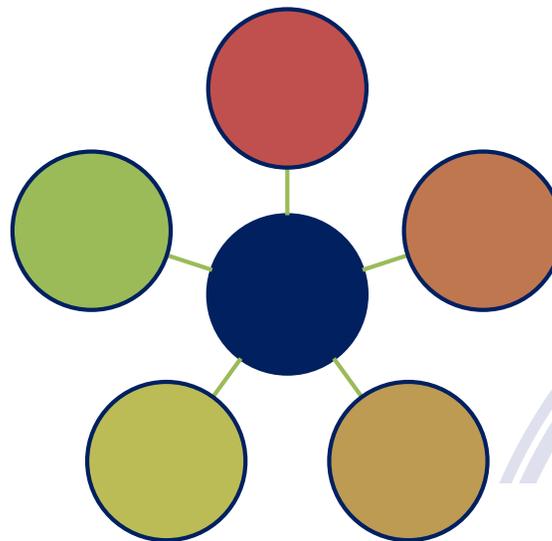
A seconda del **valore di γ** , una rete a **invarianza di scala** può trovarsi in uno dei seguenti **regimi**:

- Anomalo
- Ultra-piccolo
- Punto Critico
- Piccolo mondo



Regimi e invarianza di scala

- **Regime anomalo ($\gamma=2$)**
 - ▣ I nodi sono praticamente tutti collegati a un **hub centrale**
 - ▣ Distanza limitata e indipendente da N



Regimi e invarianza di scala

- **Regime ultra-piccolo ($2 < \gamma < 3$)**
 - I nodi hanno distanza media $\ln \ln N$
 - La presenza degli **hub** **riduce le distanze** tra i nodi, in misura più significativa rispetto alle reti casuali



Regimi e invarianza di scala

- Punto critico ($\gamma=3$)
 - ▣ I nodi hanno distanza media $\ln N / \ln \ln N$
 - ▣ Distanze inferiori rispetto alle reti casuali

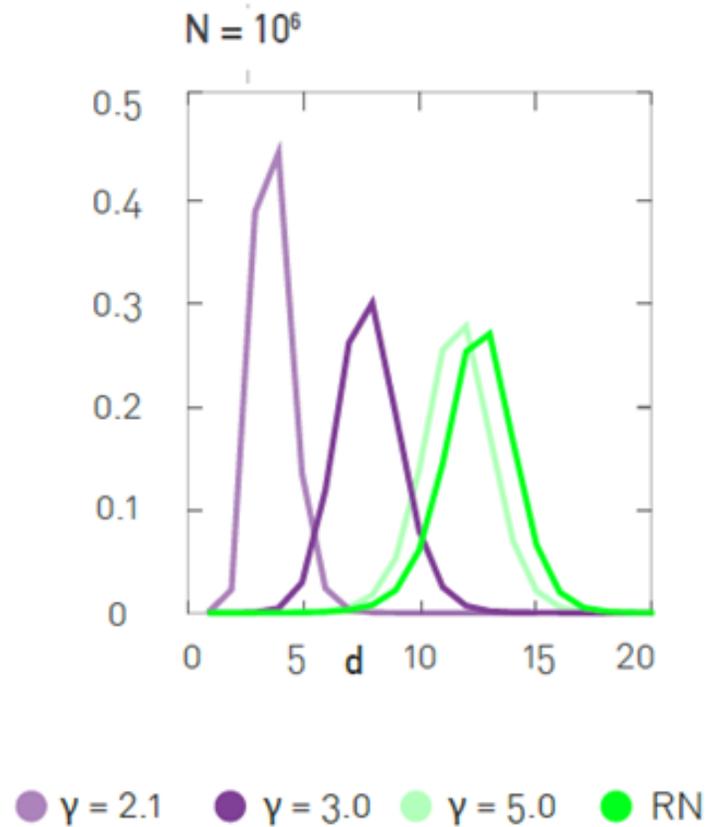


Regimi e invarianza di scala

- **Piccolo mondo ($\gamma > 3$)**
 - ▣ I nodi hanno distanza media $\ln N$
 - ▣ Comportamento **simile alle reti casuali**
 - ▣ **Gli hub non sono sufficienti a ridurre significativamente le distanze**

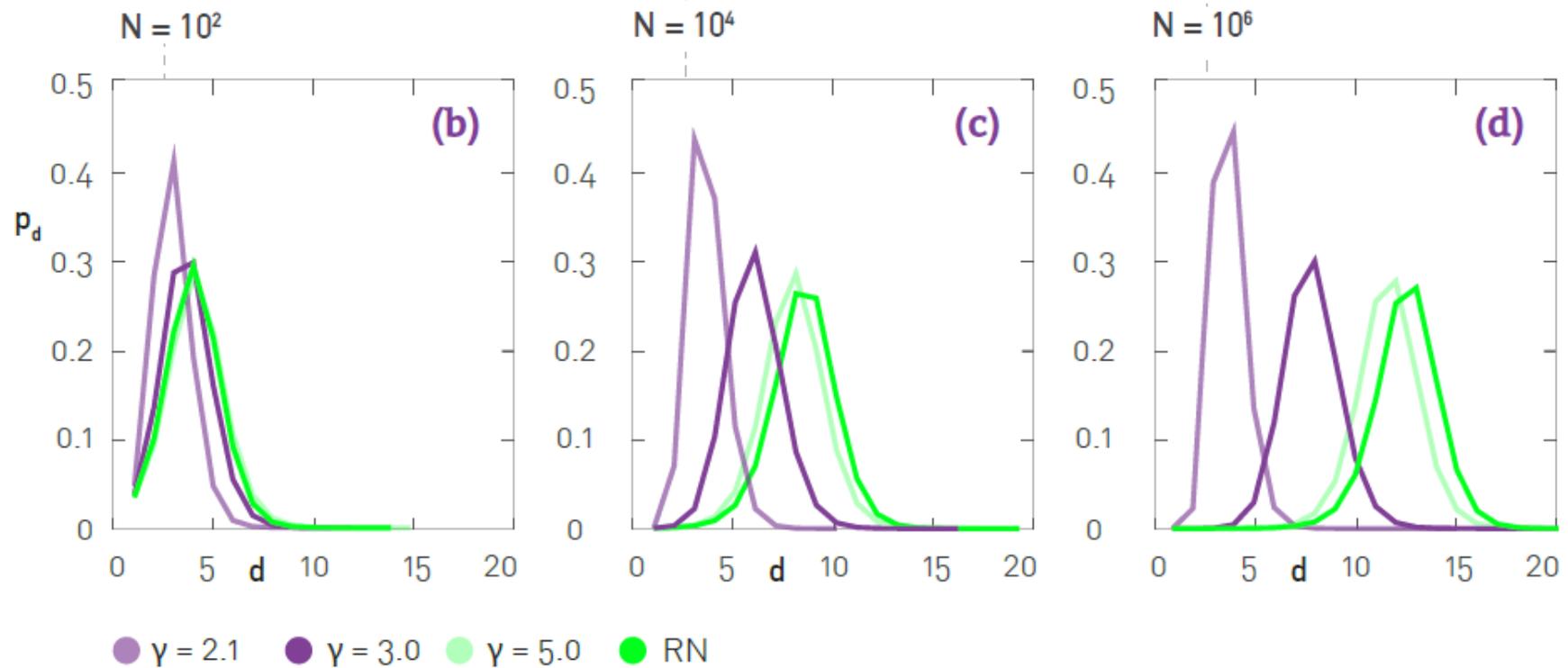


Distribuzione delle distanze



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Regimi e invarianza di scala



Modello di Barabasi-Albert

Creazione di reti a invarianza di scala

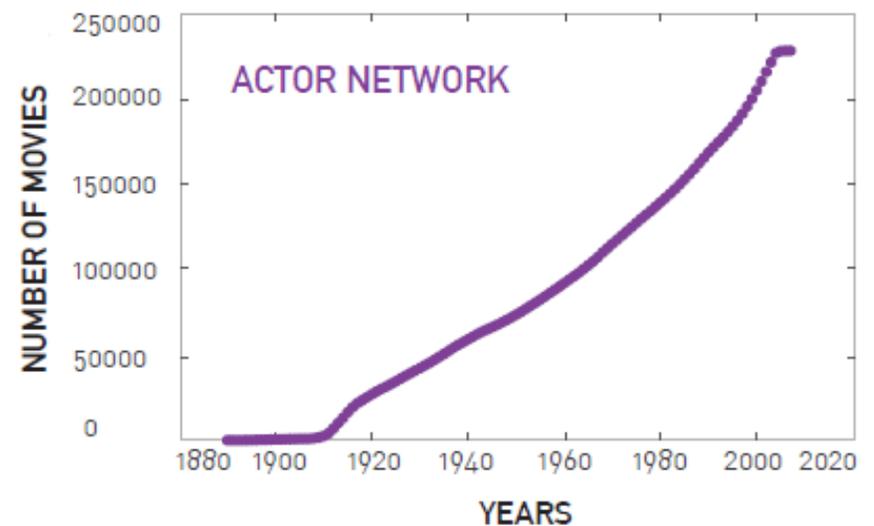
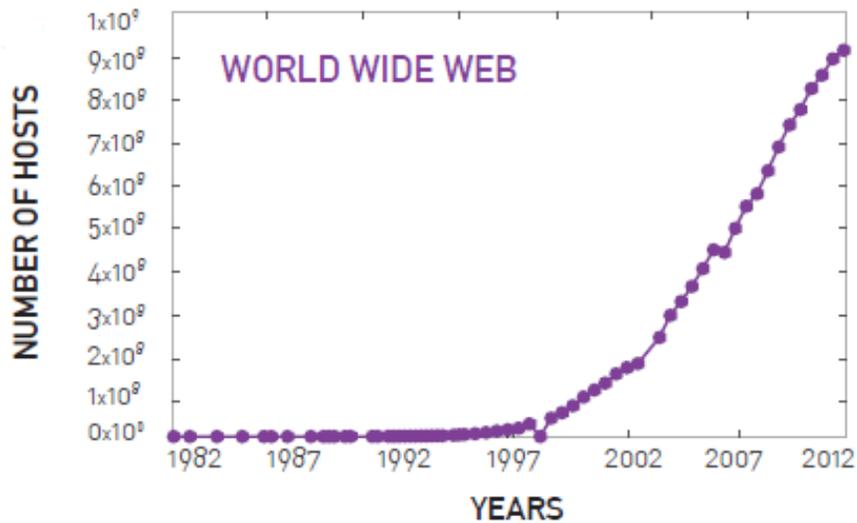


Reti casuali

- Limiti delle reti casuali
 - Tutti i nodi hanno ugual importanza
 - Staticità della rete
 - I nodi sono tutti presenti nel momento in cui la rete si forma



Evoluzione delle reti



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Reti dinamiche

- Nella realtà le reti hanno un'evoluzione dinamica
 - ▣ Aggiunta/eliminazione di archi
 - ▣ Aggiunta/eliminazione di **nodi**
- I nodi di una rete possono avere **importanza differente**
 - ▣ Capacità di attrarre nuovi collegamenti
- **Quale regola** seguono le reti nel collegare nuovi nodi?



Collegamento casuale

- Collegamento **casuale** ai nodi della rete:
 - ▣ I nodi più **vecchi** hanno maggior probabilità di attrarre collegamenti
- Il modello **non riesce a spiegare la presenza di hub**



Collegamento preferenziale

- **Aggiunta dei legami dei nuovi nodi segue collegamento preferenziale:**
 - ▣ Tendenza a collegarsi a nodi con molte connessioni → **hub**
- Secondo questa regola: i nodi con molte connessioni tendono ad aumentare il numero di connessioni → **i ricchi diventano sempre più ricchi**



Modello di Barabasi e Albert

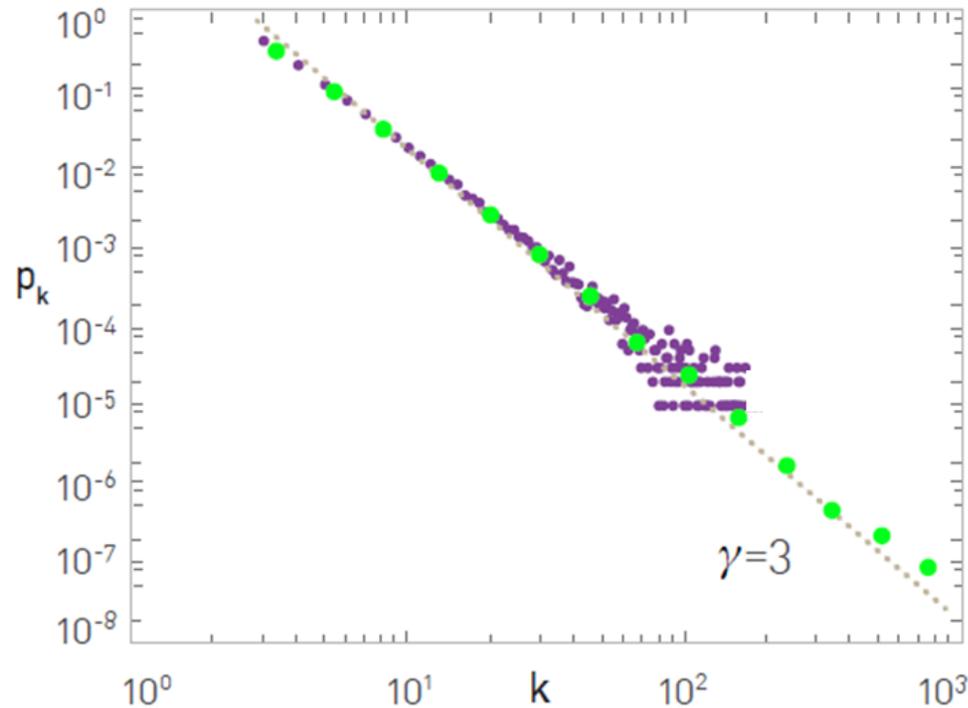
1. Presenza di nodi nella rete
2. **Aggiunta di un nodo**
3. Aggiunta dei collegamenti del nodo, **collegamento preferenziale**: probabilità di un collegamento tra il nuovo nodo e il nodo i (con grado k_i) è

$$p(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



Modello di Barabasi e Albert

La distribuzione del grado segue la legge di potenza



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Collegamento preferenziale

- Sviluppo di una rete:
 - ▣ **Crescita:** aggiunta di un nodo alla rete
 - ▣ **Collegamento preferenziale:** aggiunta di collegamenti al nodo appena aggiunto



Distribuzione del grafo

La distribuzione del grado di una rete creata con **collegamento preferenziale**

$$p_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

Con

- ▣ m : archi aggiunti ad ogni passo, k grado
- ▣ Andamento simile a k^{-3} per valori elevati di k
- ▣ Di conseguenza: **legge di potenza** con $\gamma = 3$



Collegamento preferenziale

- Perché la probabilità di collegamento dipende da k ?
- Due teorie
 1. Meccanismo **locale**
 - **Copying model**: selezione collegamenti da nodi simili
 2. Meccanismo **globale**
 - **Ottimizzazione profitto**



Meccanismo locale

- Potrebbero esserci meccanismi che inducono il collegamento preferenziale:
 - **Link selection:**
 - Scelgo un arco casualmente
Definisco il collegamento a un estremo; più collegamenti, maggiore probabilità di collegamento
 - **Copying Model:** scelgo un nodo u simile al nodo aggiunto e lo connetto a u con probabilità p ; con probabilità $1-p$ connessione ai nodi collegati a u

Meccanismo globale

- Nella formazione di una rete: ottimizzazione costi
- Costo di aggiungere nodo i alla rete:

$$C_i = \min_j [\delta d_{ij} + h_j]$$

- d_{ij} distanza tra i e j
- h_j distanza di j dal centro della rete
- δ è un parametro



Meccanismo globale

- $\delta < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$: rete a stella, distanza irrilevante nel costo
- $\delta \geq (N)^{1/2}$: rete casuale, distanza tra i e j molto più rilevante della distanza dal centro
- $4 \leq \delta < (N)^{1/2}$: rete a invarianza di scala; il bacino di attrazione dei nodi dipende dal loro grado



Modello di Barabasi-Albert

- Consideriamo due aspetti delle reti nel modello di Barabasi-Albert:
 - **Diametro del grafo**
 - **Coefficiente di clustering**

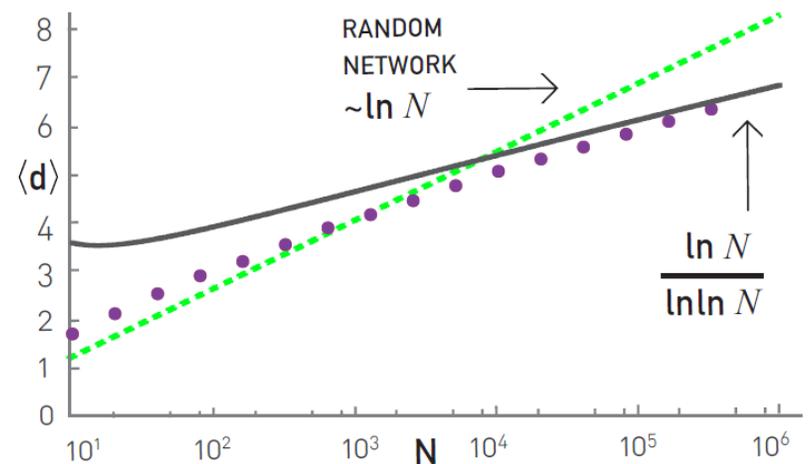


Modello di Barabasi-Albert: diametro

La distanza media nel modello segue questo andamento:

$$\bar{d} \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}$$

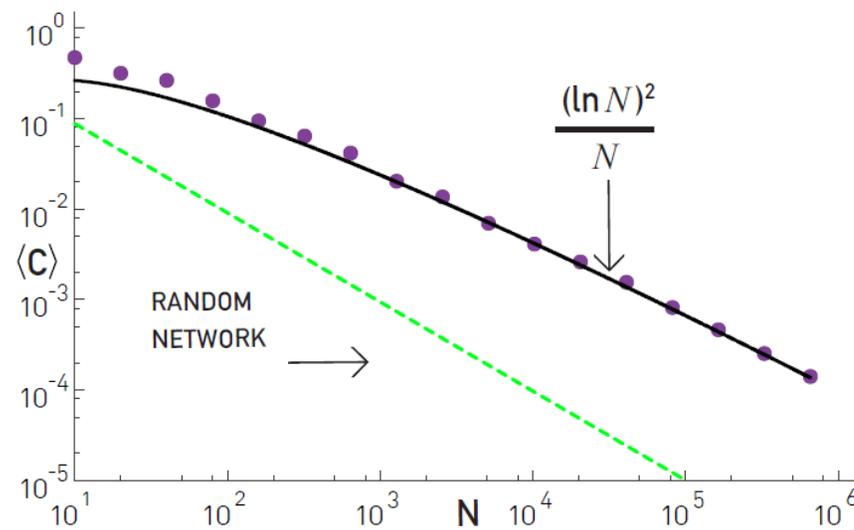
□ Crescita inferiore a $\ln N$



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Modello di Barabasi-Albert: clustering

Il clustering nel modello segue un andamento superiore rispetto alle reti casuali



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

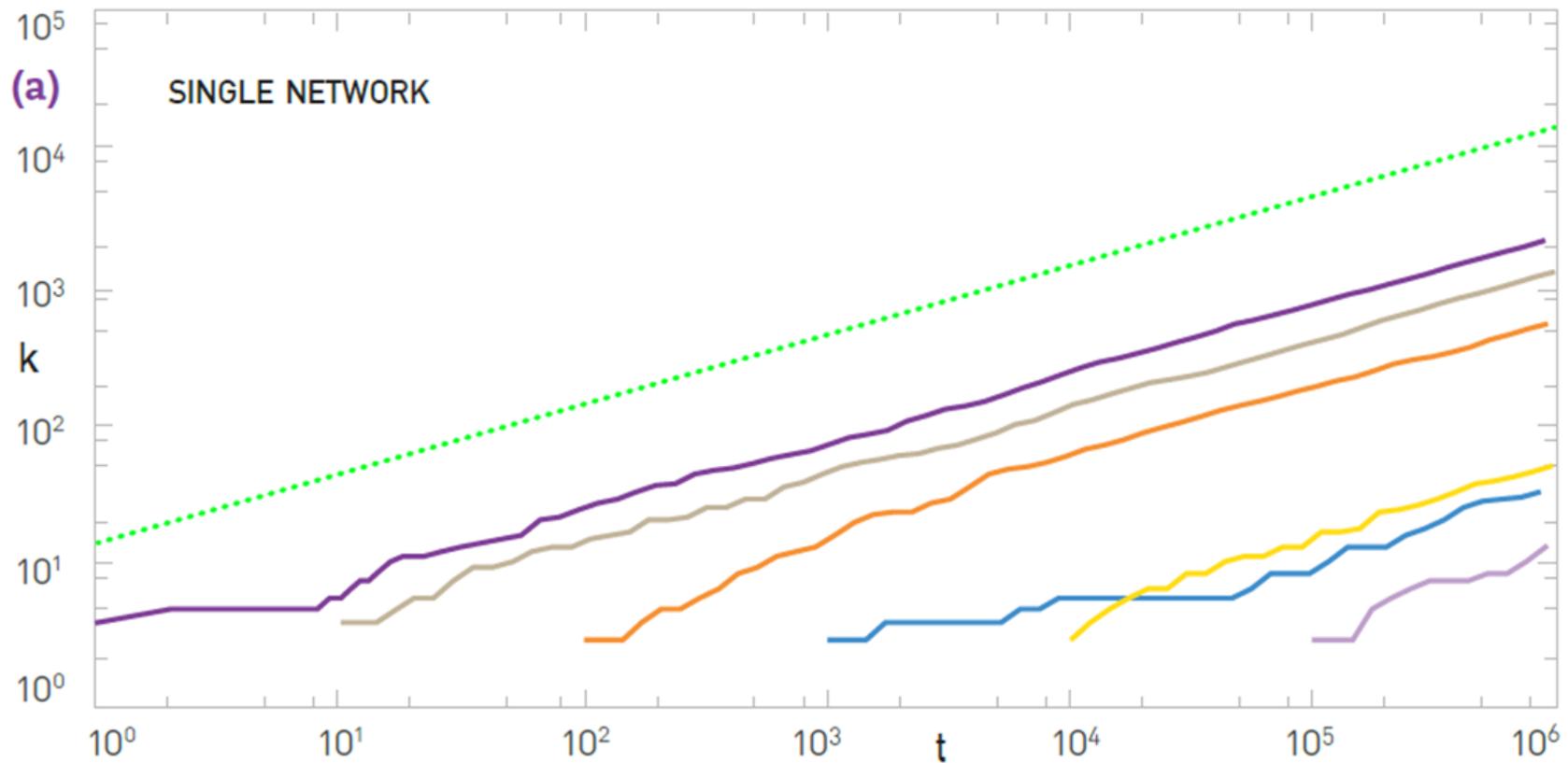
Collegamento preferenziale

- Modello proposto ha due **limiti**:
 - ▣ I **primi nodi** hanno più probabilità di avere **molti collegamenti**
 - ▣ Non è prevista l'aggiunta di collegamenti tra **nodi già esistenti**



Collegamento preferenziale

Andamento del grado in funzione del tempo



Da A. L. Barabasi, *Network Science*

Evoluzione delle reti



Evoluzione delle reti

- Il modello di Barabasi-Albert presuppone che gli hub siano i **primi nodi** di una rete
- Esistono esempi che **smentiscono** questo modello
- Nella rete del Web:
 - ▣ Google
 - ▣ Facebook
- Modelli alternativi



Collegamento e *fitness*

- Collegamento basato su *fitness*: ogni nodo ha una **capacità intrinseca di attrarre** collegamenti, basato sulla qualità del nodo
- Collegamento preferenziale basato sul **prodotto tra fitness e numero di collegamenti** dei singoli nodi: **modello di Bianconi e Barabasi**



Modello di Bianconi e Barabasi

Il modello di Bianconi e Barabasi è basato su due passi:

- **Crescita:** un nodo aggiunto alla rete
- **Collegamento preferenziale:** probabilità che il nodo aggiunto di colleghi a un nodo i

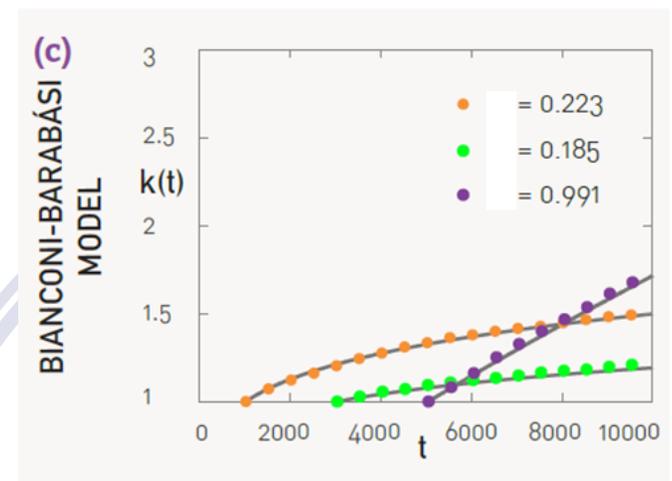
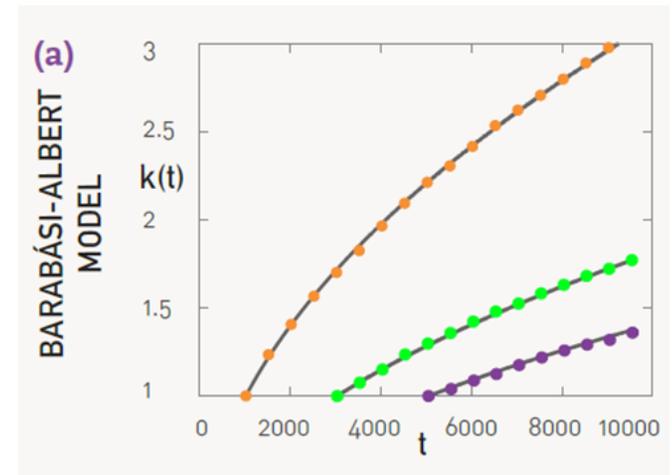
$$p_i = \frac{f_i d_i}{\sum_l f_l d_l}$$



Modello di Bianconi e Barabasi

Modelli e andamento del grado dei nodi, in base a:

- Tempo
- Fitness



Fitness e hub

- Le reti basate su fitness dimostrano (Bianconi e Barabasi, 2001):
 - ▣ La **fitness** è **determinante** nella formazione degli **hub**
 - ▣ Nodi con fitness **maggiore** acquisiscono **più velocemente** collegamenti



Collegamento e *fitness*

- Il modello basato su **fitness** produce due tipi di reti:
 - A **invarianza di scala** (presenza di alcuni hub)
 - A **stella** (presenza di un solo hub)



Determinare la *fitness*

- *Fitness* di un nodo: percezione dell'importanza di un nodo nella rete
- Possiamo valutare la *fitness* analizzando come il grado di un nodo si è evoluto



Modelli evolutivi

- I modelli possono essere estesi, considerando alcuni aspetti dell'evoluzione delle reti:
 - ▣ Fitness e invecchiamento
 - ▣ Rimozione dei nodi
 - ▣ Creazione di legami interni

