$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in X$

1) f si dice continua in $\underline{x}_0$ se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

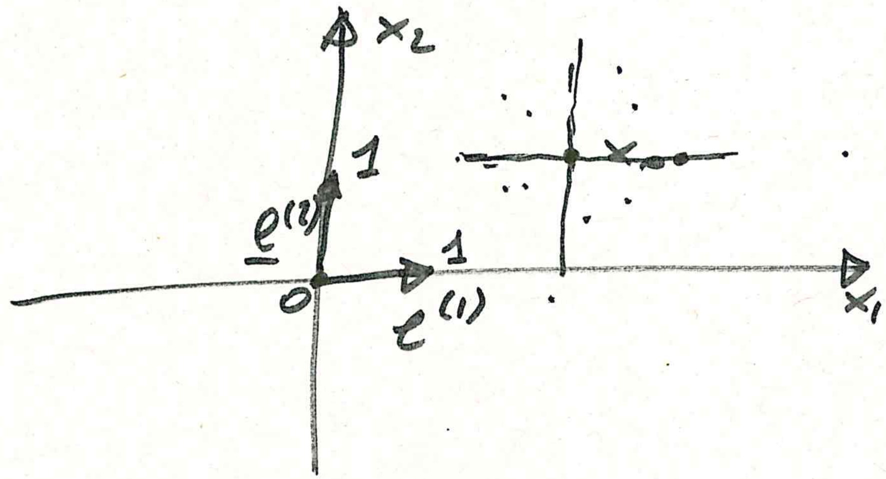
2) f si dice derivabile parzialmente in $\underline{x}_0$ se

$\forall i$ $\quad \lim_{t \to 0} \dfrac{f(\underline{x}_0 + t\,\underline{e}^{(i)}) - f(\underline{x}_0)}{t}$ esiste finito

$$\shortparallel$$

$$D_{\underline{e}^{(i)}} f(\underline{x}_0),\ f'_i(\underline{x}_0),\ f_{x_i}(\underline{x}_0),\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

$n = 2$



3) f si dice differenziabile in $\underline{x}_0$ se

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + df + o(\|\underline{h}\|) \quad \underline{h}\to\underline{0} \quad \underline{h}\in I(\underline{0})$$

$$df = \nabla f(\underline{x}_0)^T \underline{h} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle$$

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} f_1'(\underline{x}_0) \\ \vdots \\ f_n'(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$ vettore gradiente

Teorema

Se $f, f_1', \dots, f_n'$ sono continue in $\underline{x}_0$ allora f è differenziabile in $\underline{x}_0$

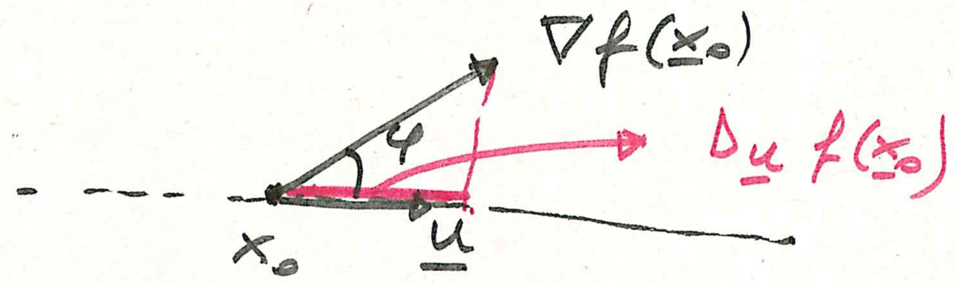
Es. $f(\underline{x}) = \ln(x_1 x_2)$ $\quad x_1, x_2$ concordi, $\neq 0$

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} \quad f(\underline{x}_0) = 1$

$$\nabla f^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 x_2}\cdot x_2 & \frac{1}{x_1 x_2}\cdot x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} \end{bmatrix} \quad \nabla f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

Se f è differenziabile

$$D_{\underline{u}} f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{u} \rangle, \quad \|u\| = 1$$



$$\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{u} \rangle = \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cos\varphi$$

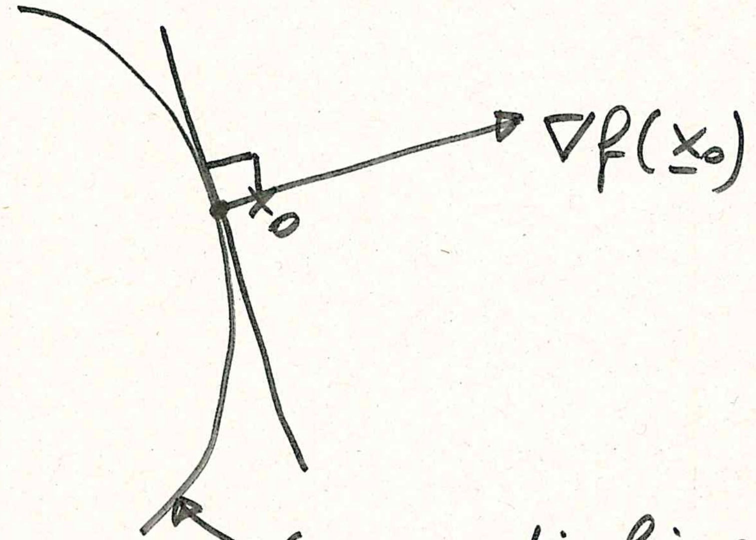
$\varphi = 0 \qquad D_{\underline{u}} f(\underline{x}_0) = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad D_{\underline{u}} f(\underline{x}_0) = 0$

$$\Downarrow$$

Il gradiente di una funzione f indica la direzione e il verso di "crescita più rapida" di f.

Il vettore gradiente in $\underline{x}_0$ è $\perp$ alla tangente alla curva di livello nel punto $\underline{x}_0$



curva di livello

$f(\underline{x}) = K \rightarrow K = f(x_0)$

DERIVATE PARZIALI SECONDE

$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in X$

f derivabile parzialmente 2 volte se esistono le derivate parziali prime e sono derivabili.

NOTAZIONI : $D_{\underline{e}^{(i)}\underline{e}^{(j)}} f(\underline{x}_0)$, $f''_{ij}(x_0)$

$f_{x_i x_j}(\underline{x}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $\qquad i, j = 1, \dots, n$

Es. $f(\underline{x}) = \ln(x_1 x_2)$, $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix}$

$f''_{11}(\underline{x}) = -\dfrac{1}{x_1^2}$, $f''_{12}(\underline{x}) = 0$, $f''_{21}(\underline{x}) = 0$, $f''_{22}(\underline{x}) = -\dfrac{1}{x_2^2}$

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ \vdots & & & \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice hessiana
o
hessiano

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

Se le derivate sono continue allora

$$f''_{ij}(\underline{x}) = f''_{ji}(\underline{x})$$

ossia l'hessiano è una matrice
SIMMETRICA

MASSIMI O MINIMI LOCALI

$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabile in $\underline{x}_0$

e $\underline{x}_0$ punto di max o min locale

$$\Downarrow$$

x_0 p.to stazionario o critico $\to \nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ (C.N.)

Es.. $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ $\quad \underline{0}$ è punto di minimo

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• $f(\underline{x}) = -x_1^2 \leq 0$, $\nabla f = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f = \underline{0} \iff x_1 = 0$, x_2 qualsiasi

$(0, x_2)$ punti di massimo perché $f(0, x_2) = 0$ e $f \leq 0$

FORMA QUADRATICA (f. q.)

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \, \underline{x} \qquad A \; n \times n \,, \; \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Es. $A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 4 \end{bmatrix}$ 5

$$f(\underline{x}) = [x_1 \;\; x_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [x_1 + 3x_2 \quad 2x_1 + 4x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 + \boxed{5}\,x_1x_2$$

POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 4 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_1x_2$$

$$\underline{x}^T A \, \underline{x} = \underline{x}^T B \, \underline{x} \qquad B \text{ simmetrica}$$

$\underline{x}^T A \underline{x} > 0 \quad \forall \underline{x} \neq 0 \rightarrow$ f.q. DEFINITA POSITIVA

$\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0 \quad \forall \underline{x} \rightarrow$ f.q. SEMIDEFINITA POSITIVA

$\underline{x}^T A \underline{x} < 0 \quad \forall \underline{x} \neq 0 \rightarrow$ f.q. DEFINITA NEGATIVA

$\underline{x}^T A \underline{x} \leq 0 \quad \forall \underline{x} \rightarrow$ f.q. SEMIDEFINITA NEGATIVA

Es. • $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ è una f.q.? SI

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}^T \underline{x}$ $\left(H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; a_{11} > 0, |H| > 0 \Downarrow \text{definita positiva} \right)$ *

è definita positiva? SI

è semidefinita positiva? SI

• $f(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ è una f.q.? SI

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow -\underline{x}^T \underline{x}$$

f.q. definita negativa. $\left(H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f \text{ definita negativa} \quad a_{11} < 0, \ |H| > 0 \right)$ **

Per una forma quadratica l'origine $\underline{0}$

è sempre punto stazionario e

se f.q è definita positiva o semidefinita positiva
(negativa) (negat.)

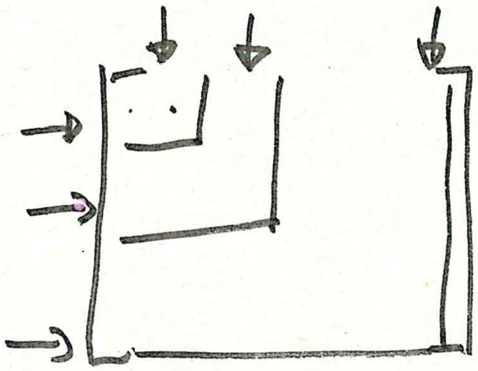
$\underline{0}$ è punto di minimo assoluto
(massimo)

se f.q. è indefinita $\underline{0}$ è punto di <u>sella</u>

SIA A matrice simmetrica

- $\underline{x}^T A \underline{x}$ è definita positiva $\Longleftrightarrow$

  tutti i minori di N-O sono positivi



$$\longrightarrow \quad a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots |A| > 0$$

- $x^T A \underline{x}$ è definita negativa $\Longleftrightarrow$

  i minori di N-O di ordine dispari sono negativi e

  i minori di N-O di ordine pari no positivi

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, |A| \begin{cases} > 0 & n \text{ pari} \\ < 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

- altrimenti $\underline{x}^T A \underline{x}$ si dice INDEFINITA

FORMULA DI TAYLOR

$$f(\underline{x}_0+h)=f(\underline{x}_0)+<\nabla f(\underline{x}_0),\underline{h}>+o(\|h\|)$$

$$f(\underline{x}_0+\underline{h})=f(\underline{x}_0)+<\nabla f(\underline{x}_0),\underline{h}>+\boxed{\frac{1}{2}\underline{h}^T H_f(\underline{x}_0)\underline{h}}+o(\|h\|^2)$$

se $n=1$: $f(x_0+h)\cong f(x_0)+f'(x_0)h+\boxed{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2}$

f. q.

Se $\nabla f(\underline{x}_0)=\underline{0}$ $\quad f(\underline{x}_0+h)\cong f(\underline{x}_0)+\frac{1}{2}\underline{h}^T H_f(\underline{x}_0)\underline{h}$

$$\underline{h}\in I(\underline{0}),\ \underbrace{f(x_0+h)-f(\underline{x}_0)}_{\vee\ 0}\cong\underbrace{\frac{1}{2}\underline{h}^T H_f(\underline{x}_0)\underline{h}}_{\vee\ 0}$$

$\Downarrow$

$\underline{x}_0$ p.to di min.

CONDIZIONE SUFFICIENTE (C.S.)

$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in X$ f differenziabile in $\underline{x}_0$

$\to$ $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, $H_f(\underline{x}_0)$ definita positiva

$\Downarrow$

$\underline{x}_0$ p.to di minimo locale

$\to$ $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, $H_f(\underline{x}_0)$ definita negativa

$\Downarrow$

$\underline{x}_0$ p.to di massimo locale

$\to$ $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, $H_f(\underline{x}_0)$ indefinita

$\Downarrow$

$\underline{x}_0$ p.to di sella

Es. $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ *, $f(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ ** (a p. 9, 10)

Es. $f(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{0} \text{ è punto stazionario}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

def. posit.? No

def. neg.? No

in.def.? Sì $H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ è indefinita

quindi $\underline{0}$ è punto di sella.