



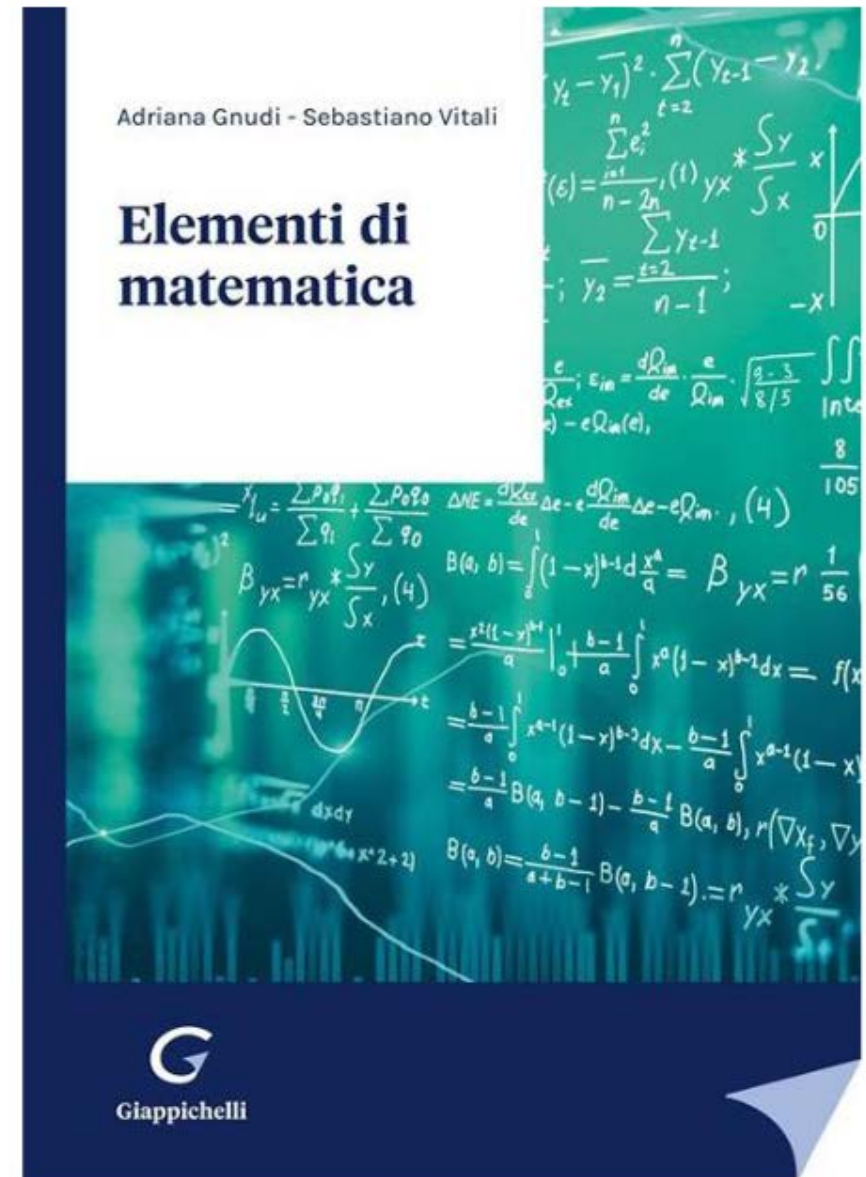
MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 2
Algebra Lineare

Sebastiano Vitali

RIFERIMENTO

Gnudi e Vitali, Elementi di Matematica (2023), Giappichelli
Capitoli 25 - 32



MATRICE E VETTORE

Una tabella di n righe e m colonne i cui elementi appartengono ad un insieme numerico, per esempio all'insieme dei numeri reali, viene detta

matrice a n righe e m colonne ossia matrice di dimensione $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] , a_{ij} \in R, i = 1, \dots, n, j = 1 \dots m$$

- una matrice con una sola colonna si dice vettore colonna $n \times 1$
- una matrice con una sola riga si dice vettore riga $1 \times m$

CONCETTI BASE

- Matrice quadrata
- Diagonale principale
- Matrice identità
- Matrice nulla
- Trasposizione

OPERAZIONI FONDAMENTALI

- Somma
- Differenza
- Prodotto matrice per scalare
- Combinazione lineare
- Prodotto matrice per matrice
- Elemento neutro del prodotto matriciale
- Prodotto vettore per vettore

MATRICI PARTICOLARI E PROPRIETÀ

- Matrici diagonali e triangolari
- Proprietà matrice trasposta
- Matrice simmetrica

COS'ABBIAMO
CAPITO?



PROBLEMA PRODUZIONE/CONSUMO

PROVIAMO A RISOLVERE IL SEGUENTE PROBLEMA

Problema produzione/consumo:

- l'agricoltura produce 30 quintali di grano, di cui 7,5 consumati da se stessa (sementi), 6 dall'industria e 16,5 dalle famiglie;
- l'industria produce 50 metri di stoffa, di cui 14 consumati dall'agricoltura e 6 da se stessa (tute degli operai), 30 dalle famiglie;
- le famiglie forniscono in totale 300 ore-uomo, di cui 80 all'agricoltura (contadini), 180 all'industria (operai) e 40 a se stesse (lavori domestici).

Gli scambi avvengono sulla base del prezzo di mercato di ogni bene che è un ricavo per il settore che vende e un costo per il settore che acquista.

Si vuole determinare se esiste un sistema di prezzi che garantisca l'equilibrio degli scambi tra i diversi settori ossia per ogni settore il ricavo è uguale al costo di produzione cioè il guadagno sia zero.

PROBLEMA PRODUZIONE/CONSUMO

PROVIAMO A RISOLVERE IL PROBLEMA IN EXCEL

1. Calcoliamo la produzione totale per ogni settore
2. Calcoliamo il consumo totale per ogni settore
3. Dato un vettore dei prezzi, calcoliamo l'esborso totale per ogni settore

DETERMINANTE E PROPRIETÀ

- Determinante matrice 1×1
- Determinante matrice 2×2
- Determinante matrice $n \times n$ (metodo di Laplace)
- Proprietà determinante, teorema di Binet

PROBLEMA PRODUZIONE/CONSUMO

IL PROBLEMA CONTINUA

Definendo la matrice dei consumi come:

$$A = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}$$

e il vettore dei beni venduti come:

$$D = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Il vettore dei costi sostenuti è $A^T \cdot p$, il vettore degli incassi è $D \cdot p$. L'equilibrio è quel vettore p tale per cui:

$$A^T \cdot p = D \cdot p$$

- Quante soluzioni ha il problema?
- Ci dice qualcosa il determinante di $(A^T - D)$?

MATRICE INVERSA E PROPRIETÀ

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n , B viene detta matrice inversa destra (sinistra) di A se

$$AB = I \quad (BA = I)$$

Se la matrice B è inversa destra di A è anche inversa sinistra e si indica con il simbolo A^{-1} , quindi si ha $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Proprietà
- Calcolo

RANGO DI UNA MATRICE

Sia A una matrice qualsiasi $n \times m$.

Il rango colonna (riga) di una matrice $A_{n \times m}$ è il numero massimo di colonne (righe) di A linearmente indipendenti ossia la dimensione dello spazio generato dalle colonne (righe) di A .

Il rango riga e il rango colonna coincidono, quindi si parla semplicemente di rango di A indicato con $rg(A)$ o $r(A)$.

- Proprietà

SPAZIO VETTORIALE O LINEARE

Uno spazio vettoriale o lineare è un insieme V in cui sono definite due operazioni:

- Addizione: dati due elementi qualsiasi $v, w \in V$ è definito $v + w \in V$.

Tale operazione deve godere delle proprietà classiche (commutativa, associativa, elemento neutro, opposto)

- Moltiplicazione per uno scalare: dato un elemento qualsiasi $v \in V$ e un qualsiasi valore $k \in R$ è definito $kv \in V$.

Tale operazione deve godere delle proprietà classiche: commutativa, associativa, elemento neutro, distributive: $k(v + w) = kv + kw$, $(k + h)v = kv + hv$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE O LINEARE

Un insieme K che:

- sia sottoinsieme proprio di uno spazio vettoriale o lineare V
- sia esso stesso uno spazio vettoriale o lineare rispetto alle stesse operazioni di V

è detto sottospazio vettoriale di V .

INSIEME DI GENERATORI DI SPAZIO VETTORIALE

Per la definizione di spazio vettoriale, dati k elementi $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ spazio vettoriale o lineare, una qualunque combinazione lineare con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ appartiene a V e si scrive:

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = \sum_{i=1}^k \alpha_i v^{(i)} \in V$$

Si verifica facilmente che l'insieme K di tutte le possibili combinazioni lineari dei $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ è un sottospazio vettoriale o lineare di V .

Si dice che $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ è un **insieme di generatori** di K ossia ogni elemento di K si può ottenere come combinazione lineare dei k vettori dell'insieme di generatori.

DIPENDENZA LINEARE

I vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ si dicono linearmente **dipendenti** se almeno uno di essi (senza perdere di generalità sia $v^{(1)}$) si può scrivere come combinazione lineare degli altri ossia esistono $k - 1$ scalari $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ per cui vale:

$$v^{(1)} = \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = \sum_{i=2}^k \alpha_i v^{(i)}$$

I vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ si dicono linearmente **indipendenti** se non sono linearmente dipendenti ossia nessuno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

BASE DI SPAZIO VETTORIALE

Si dice che $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in V$ è una base dello spazio vettoriale V se:

- $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}$ sono linearmente indipendenti
- ogni elemento di V si può esprimere come combinazione lineare di essi:

$$\forall w \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R \text{ tali che } w = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)}$$

- Proprietà
- Definizione di base canonica

SISTEMI LINEARI

Una uguaglianza del tipo $Ax = b$ dove A è una matrice di dimensione $m \times n$, x è un vettore di dimensione n , b è un vettore di dimensione m si dice sistema lineare.

Per esteso il sistema si scrive:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un vettore $x \in R^n$ è soluzione del sistema $Ax = b$ se verifica l'uguaglianza.

**COS'ABBIAMO
CAPITO?**



SISTEMI LINEARI

Il prodotto Ax può essere scritto come combinazione lineare delle colonne di A , infatti

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

quindi $Ax = b$ si può vedere come la ricerca del vettore $[x_1 \quad \cdots \quad x_n]$ di coefficienti che generano b come combinazione lineare delle colonne di A .

SISTEMI LINEARI - TEOREMA DI ROUCHÈ- CAPELLI

Dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A_{m \times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^m$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m1n}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia $[A|b]$ la matrice completa

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ottenuta orlando la matrice dei coefficienti A con la colonna b dei termini noti.

1. Se $rg(A) \neq rg(A|b) \Leftrightarrow Ax = b$ è **impossibile**: b è **indipendente** dalle colonne di A quindi **non può** essere una loro combinazione lineare
2. Se $rg(A) = rg(A|b) \Leftrightarrow Ax = b$ è **possibile**: b è **dipendente** dalle colonne di A quindi **può** essere una loro combinazione lineare
 - a. Se $rg(A) = rg(A|b) = n$ (dove n è la dimensione del vettore x) allora la soluzione di $Ax = b$ è unica: la combinazione lineare delle colonne di A che genera b è **unica**. Il sistema si dice **determinato**.
 - b. Se $rg(A) = rg(A|b) < n$ allora esistono **infinite** combinazioni lineari delle colonne di A che generano b . Il sistema si dice **indeterminato**.

SISTEMI LINEARI — SISTEMA OMOGENEO

Dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A_{m \times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^m$, se $b = 0$ il sistema si dice **omogeneo**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Cosa possiamo affermare pensando al teorema di Rouchè-Capelli?

Sicuramente, aggiungendo una colonna di zeri, il rango di $(A|b)$ non può aumentare rispetto al rango di A , quindi non può verificarsi il caso in cui $rg(A) \neq rg(A|b)$, pertanto il sistema è certamente possibile (c'è sicuramente la soluzione $x_1, \dots, x_n = 0$).

Un sistema omogeneo è certamente possibile.

SISTEMI LINEARI - METODI RISOLUTIVI

- Cramer
- Gauss
- Excel tramite inversa

PROBLEMA PRODUZIONE/CONSUMO

SOLUZIONE

Il sistema $A^T p = Dp$ può essere scritto in modo diverso:

$$\begin{aligned} A^T p - Dp &= 0 \\ (A^T - D)p &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema omogeneo.

Risolviamolo...