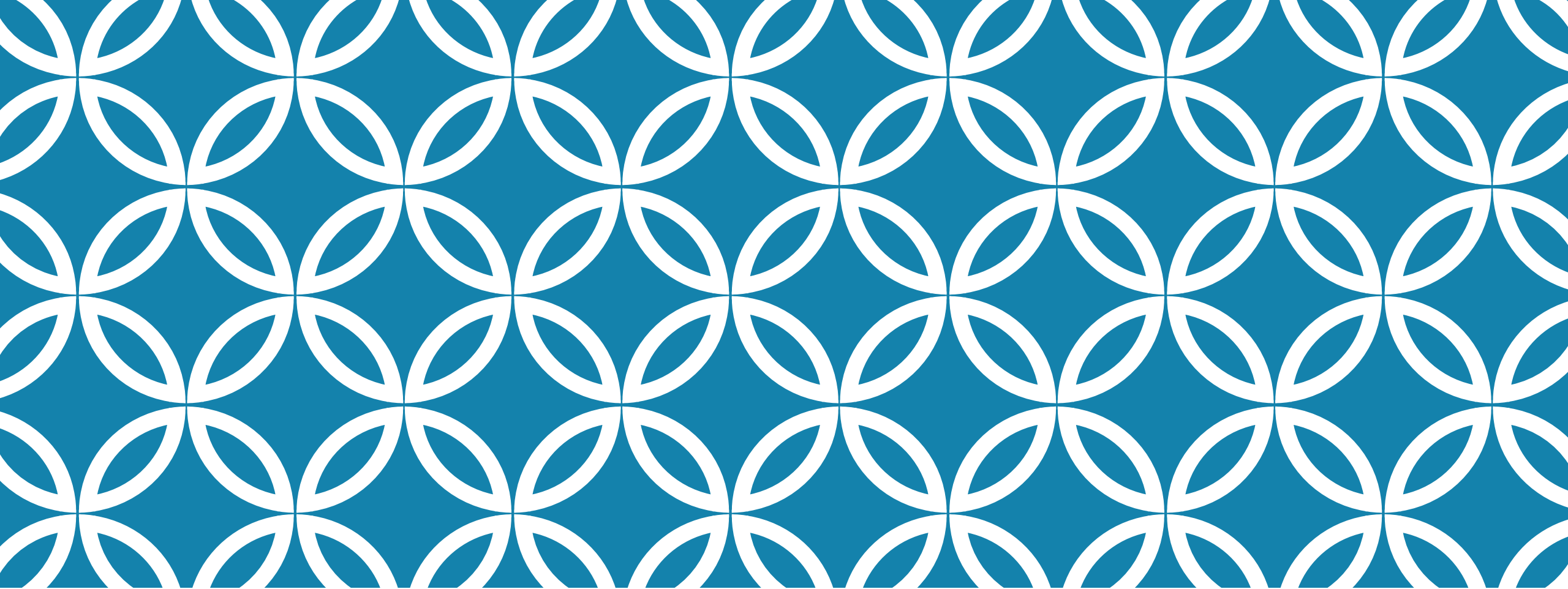




MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 3

Autovalori e autovettori

Sebastiano Vitali

AUTOVALORI

Data una matrice quadrata A , un numero λ è un **autovalore** di A se sottraendolo da ogni elemento della diagonale di A la rende una matrice singolare.

se $A - \lambda I$ è singolare $\Leftrightarrow \lambda$ è autovalore di A

- Gli elementi della diagonale di una matrice diagonale D sono autovalori di D
- Una matrice quadrata A è singolare $\Leftrightarrow 0$ è autovalore di A

CALCOLO AUTOVALORI

Per trovare gli autovalori di una matrice A di ordine n bisogna risolvere questa equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

in cui la parte a sinistra è un polinomio di grado n nella variabile λ . Questo polinomio si chiama **polinomio caratteristico**. Le soluzioni sono al massimo n , quindi una matrice di ordine n ha al massimo n autovalori.

Esempio con $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

MATRICI MARKOVIANE

Una matrice M è detta **markoviana** se i suoi elementi sono non-negativi e se la somma per riga (o per colonna) è 1.

Per esempio

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ 3 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

è markoviana.

Se sottraiamo 1 dalla diagonale otteniamo

$$M - 1I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

le cui colonne hanno somma 0, pertanto è singolare. Quindi 1 è **autovalore** di tutte le matrici markoviane.

Le matrici markoviane hanno un ruolo fondamentale nella descrizione dei sistemi economici dinamici.

AUTOVETTORI

Ricordiamo una delle conseguenze del teorema di Rouché-Capelli:

1. Se una matrice B è non singolare, allora il sistema $Bx = 0$ ha una solo soluzione: il vettore $x = 0$
2. Se una matrice B è singolare, allora il sistema $Bx = 0$ ha infinite soluzioni oltre a quella nulla.

Sapendo che utilizzando l'autovalore λ la matrice $A - \lambda I$ diventa singolare (è proprio la definizione di autovalore!), sappiamo che allora il sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

cade nel caso 2. e quindi ha altre (infinite) soluzioni oltre al vettore $v = 0$.

Le altre soluzioni v associate all'autovalore λ sono chiamati **autovettori**.

Esempio con $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

AUTOVETTORI

Perché le coppie autovalori-autovettori sono importanti?

La condizione

$$(A - \lambda I)v = 0$$

può essere riscritta come

$$\begin{aligned} Av - \lambda v &= 0 \\ Av &= \lambda v \end{aligned}$$

Quindi, data una matrice A , la coppia autovalore λ – autovettore v è tale che moltiplicando v per l'intera matrice A si ottiene lo stesso risultato che moltiplicando v per il solo scalare λ . Questo, da un lato semplifica enormemente i calcoli, dall'altro ci permette di prevedere l'evoluzione di un sistema dinamico perché

$$A^n v = \lambda^n v$$

Pertanto, se A descrive un sistema dinamico, lo spazio di v genera una situazione stabile/instabile/esplosiva in base al valore di λ .

Esempi ...

E se A fosse markoviana?

ESEMPIO AUTOVETTORI CON MATRICE MARKOVIANA

Consideriamo la seguente situazione:

Ci sono nel mondo persone che bevono caffè e persone che bevono tè. Solitamente, chi beve caffè cambia i propri gusti e inizia a bere tè. Per questo, l'azienda che produce caffè vuole lanciare una campagna pubblicitaria immaginando che in seguito i «cambi di gusto» seguiranno questa dinamica:

$$\begin{cases} x_{tè,t+1} = \frac{2}{3}x_{tè,t} + \frac{1}{4}x_{caffè,t} \\ x_{caffè,t+1} = \frac{1}{3}x_{tè,t} + \frac{3}{4}x_{caffè,t} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{tè,t+1} \\ x_{caffè,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{tè,t} \\ x_{caffè,t} \end{bmatrix}$$

Possiamo prevedere come evolveranno i consumi di tè e caffè?

In alcuni casi sì... Calcoliamo autovalori e autovettori

ESEMPIO AUTOVETTORI CON MATRICE MARKOVIANA

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Ci concentriamo sull'autovalore 1 che ha associato autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Che significa?

Significa che se l'attuale proporzione di persone coincide con il rapporto dell'autovettore, la proporzione è sicuramente stabile: la campagna pubblicitaria non serve...

Se invece l'attuale situazione fosse molto diversa, la situazione...

Verifichiamolo con Excel