



MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 4

Funzioni a più variabili

Sebastiano Vitali

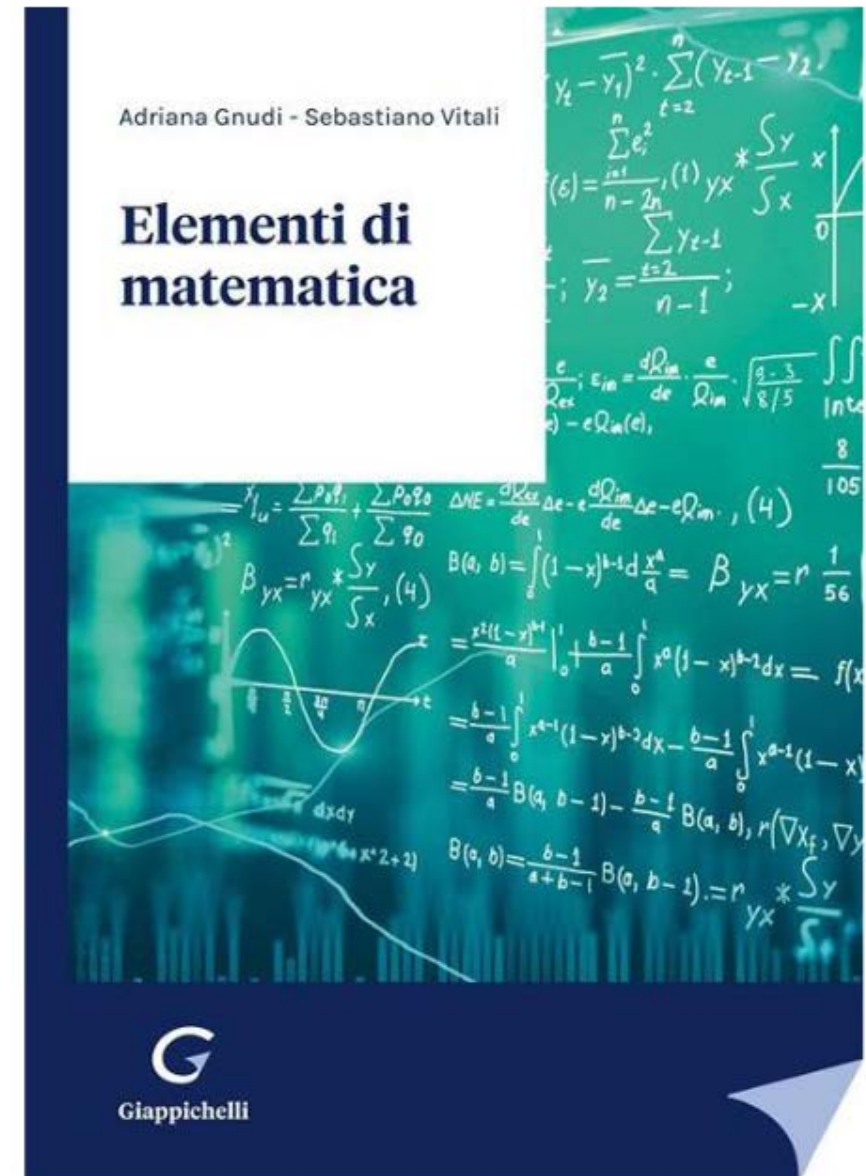
RIFERIMENTO

Gnudi e Vitali, Elementi di Matematica
2023 Giappichelli

Capitolo 33

Simon e Blume, Matematica per le scienze economiche
2021 Egea

Capitolo 7

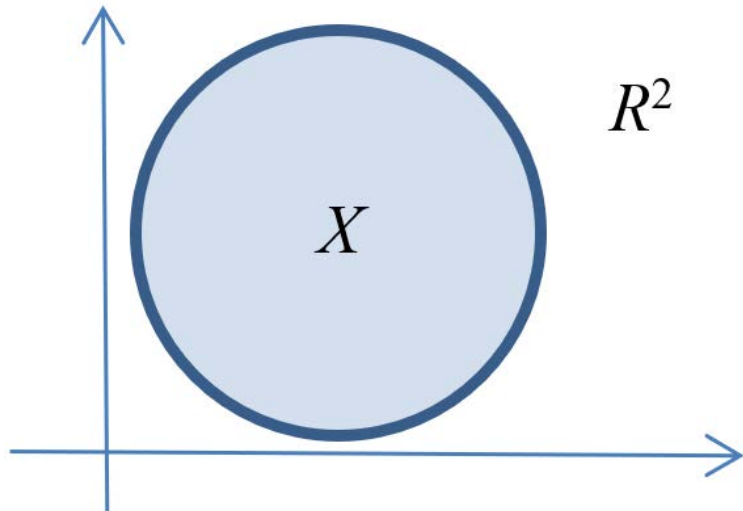


FUNZIONE A DUE VARIABILI REALI

Sia $R \times R \equiv R^2$ l'**insieme delle coppie ordinate** di numeri reali detto **prodotto cartesiano** e X un sottoinsieme di R^2 ossia $X \subseteq R^2$.

Si definisce una funzione reale a variabile reale una relazione o applicazione che **ad ogni elemento dell'insieme**, associa **uno e un solo elemento di R** e si indica così:

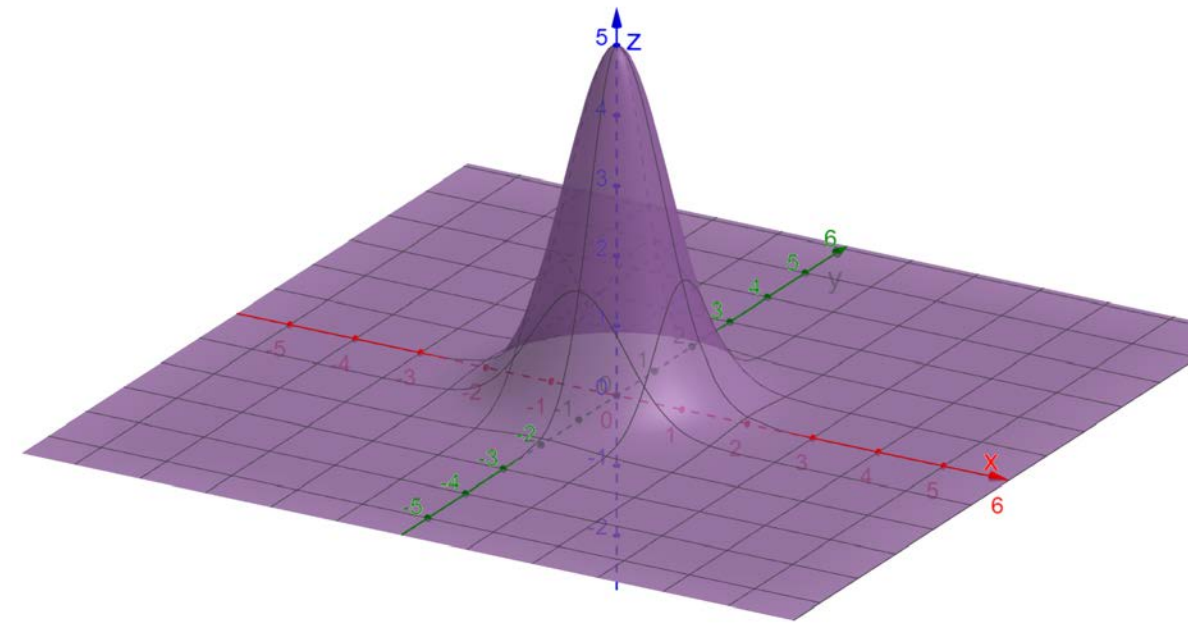
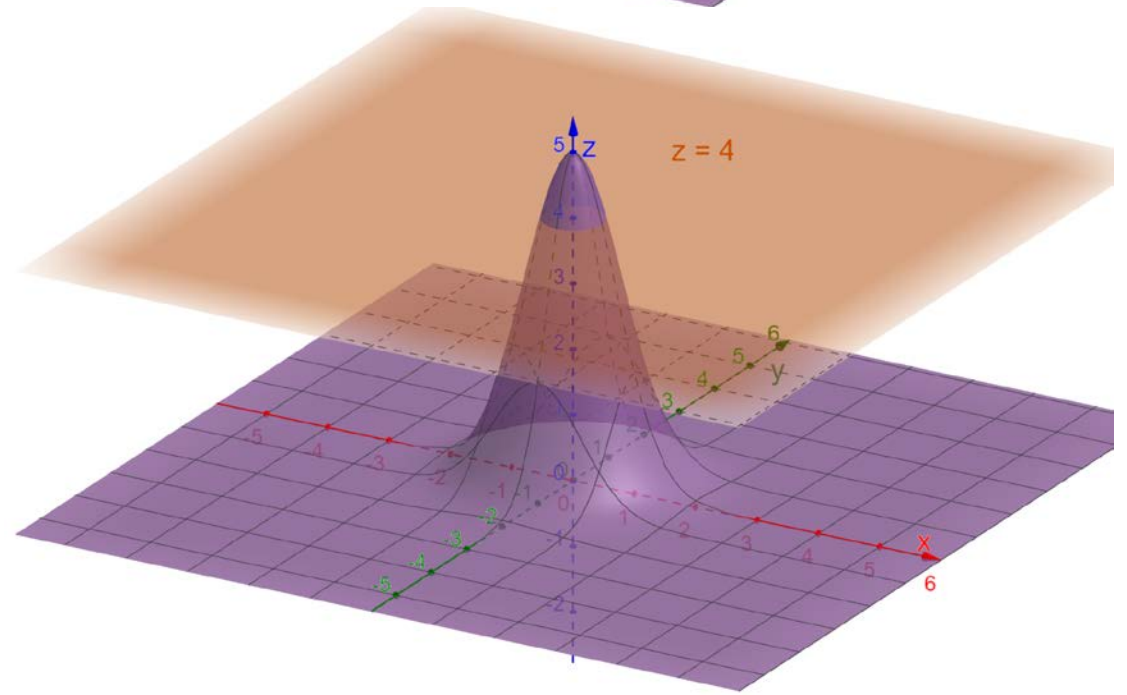
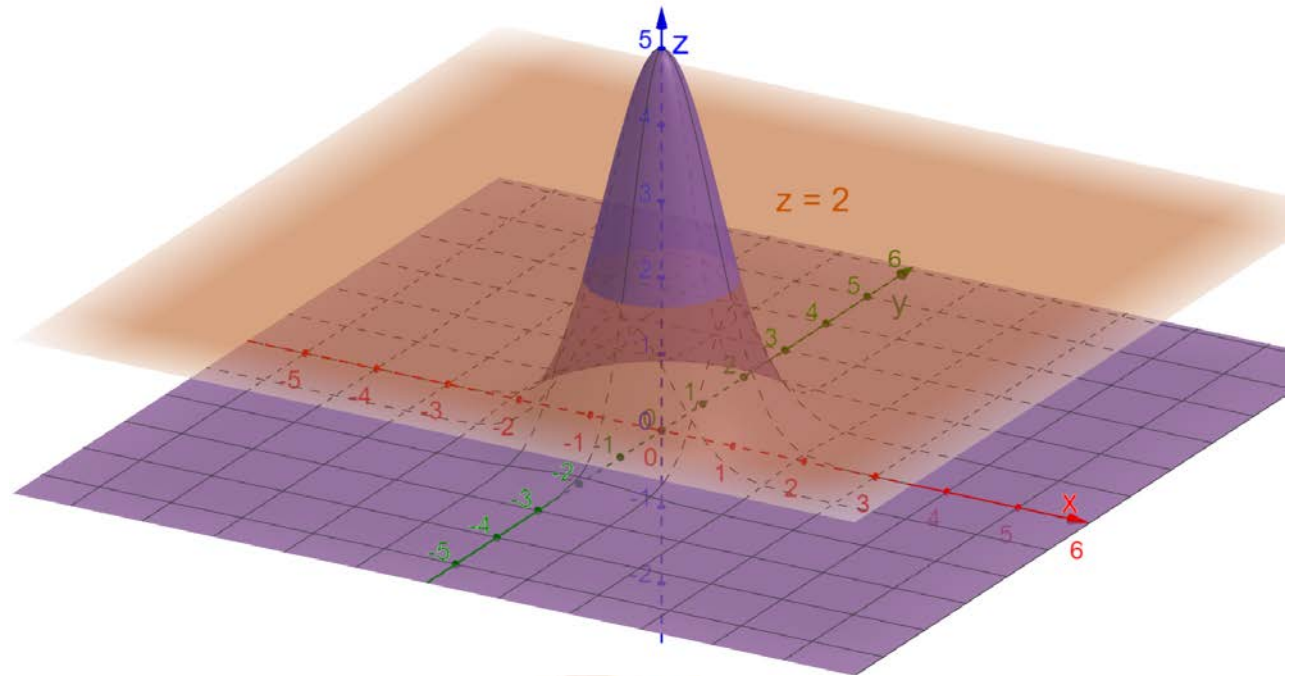
$$f: X \subseteq R^2 \rightarrow R$$



Esempi ...

CONCETTI BASE

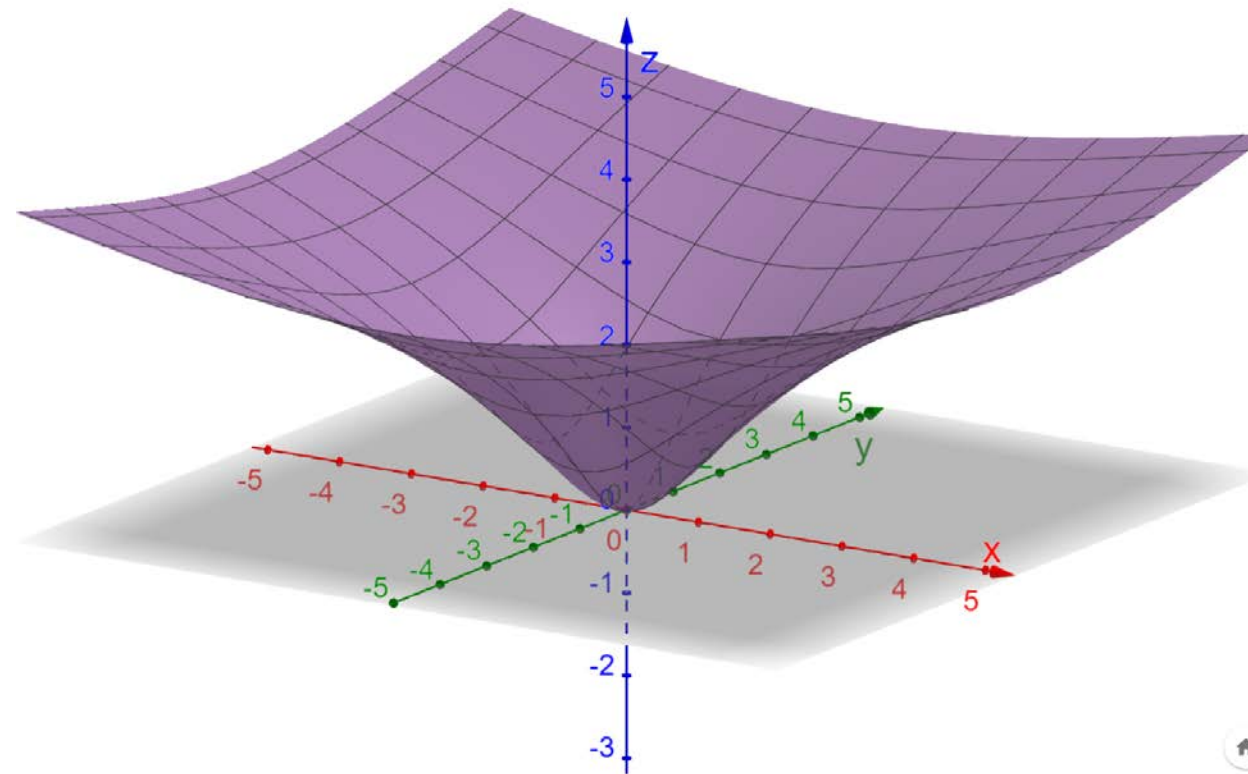
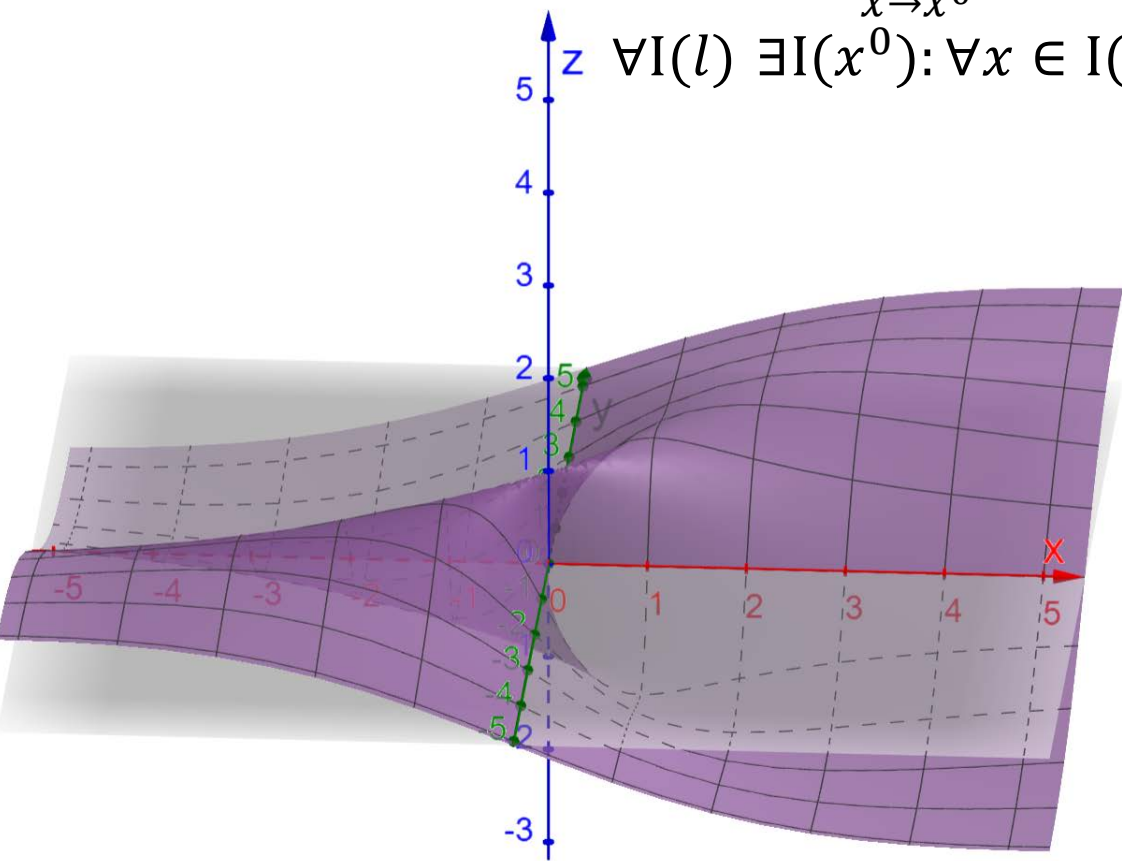
- dominio
- curve livello



LIMITI PER FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Data la funzione $f: X \rightarrow R$ con $X \subseteq R^n$ e $x^0 \in R^n$ si definisce che l è limite di f per x tendente a x^0 e si scrive $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ se

$$\forall I(l) \exists I(x^0): \forall x \in I(x^0) \cap X; x \neq x^0 \quad f(x) \in I(l)$$



DERIVATA PER FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

$f: A \rightarrow R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto.

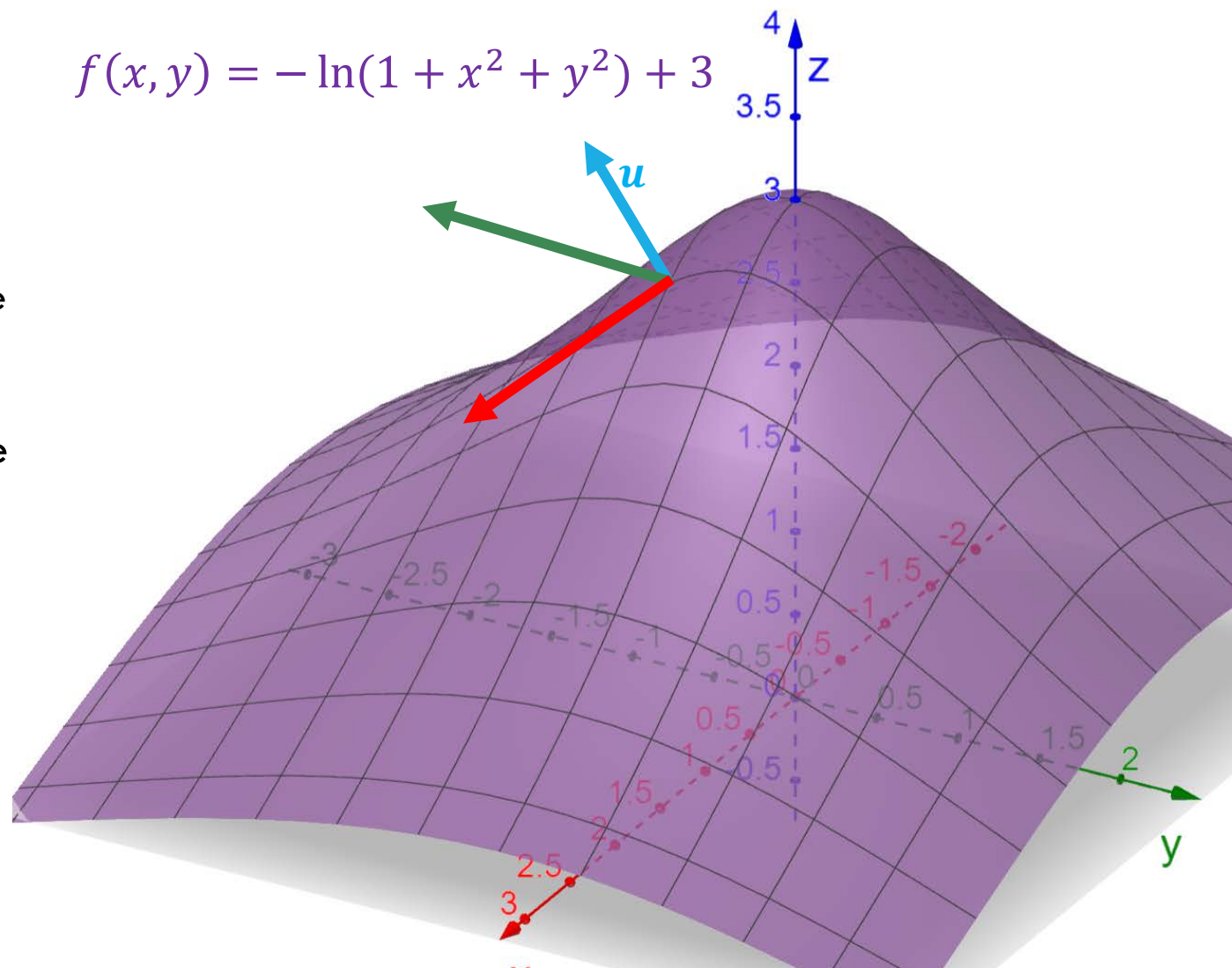
- Sia $x = x^0 + tu \in A$ vettore uscente da x^0 e parallelo a u

Se esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tu) - f(x^0)}{t} = l \in R$, f si dice

derivabile in x^0 nella direzione u e tale limite si indica come $D_u f(x^0)$ **derivata direzionale in x^0 nella direzione u**

- Le derivate direzionali rispetto alle direzioni parallele agli assi coordinati si chiamano **derivate parziali** e si ordinano nel gradiente $\nabla f(x)$:

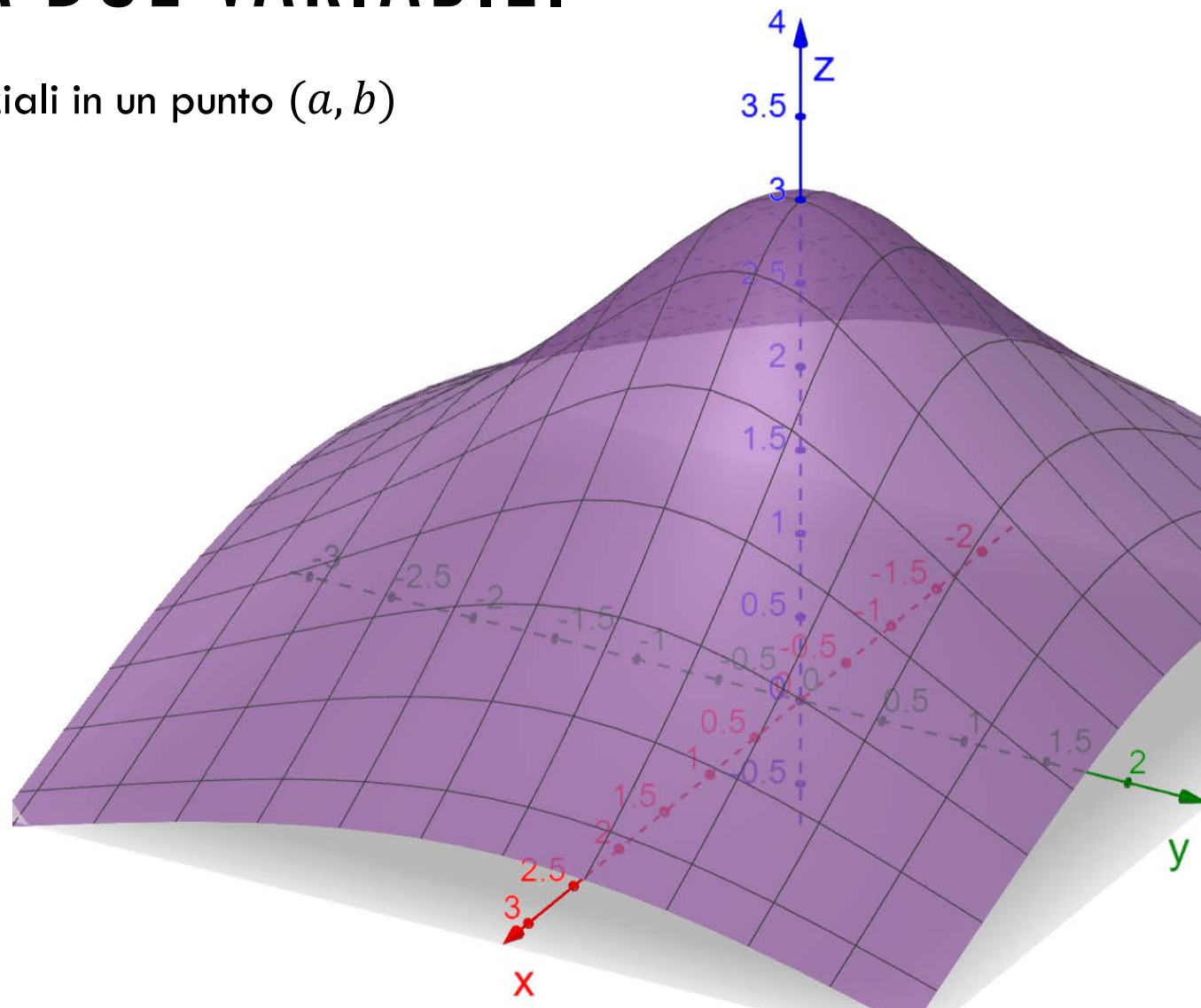
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} D_{e(1)} f(x) \\ D_{e(2)} f(x) \\ \vdots \\ D_{e(n)} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$



TAYLOR PER FUNZIONI A DUE VARIABILI

Data una funzione $f(x, y)$ che ammette derivate parziali in un punto (a, b)
l'approssimazione di Taylor al primo ordine è:

$$f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2) + 3$$



TAYLOR PER FUNZIONI A DUE VARIABILI

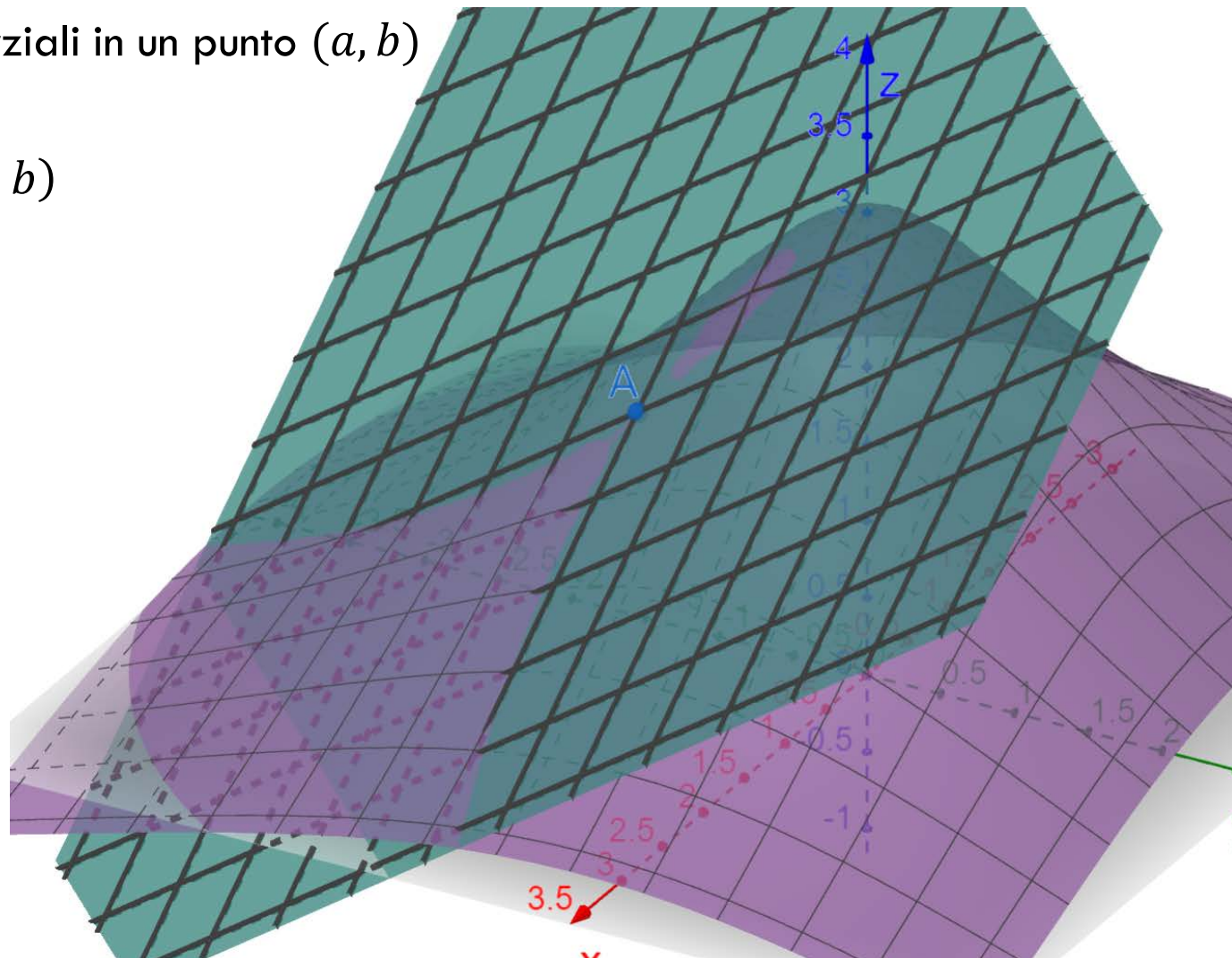
Data una funzione $f(x, y)$ che ammette derivate parziali in un punto (a, b) l'approssimazione di Taylor al primo ordine è:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

In $(1, -1)$ si ottiene:

$$f(x, y) \approx -\ln(3) + 3 - \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y + 1)$$

$$f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2) + 3$$



TAYLOR PER FUNZIONI A DUE VARIABILI

Data una funzione $f(x, y)$ che ammette derivate parziali in un punto (a, b)
l'approssimazione di Taylor al primo ordine è:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

L'approssimazione di Taylor al secondo ordine è

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \\ \frac{f_{xx}(a, b)}{2}(x - a)^2 + \frac{f_{yy}(a, b)}{2}(y - b)^2 + \\ f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b)$$

FORME QUADRATICHE

Un caso particolare di funzione a più variabili è quando la funzione si può esprimere come:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$$

o, alternativamente, come:

$$Q(x) = x^T A x$$

dove A è la matrice simmetrica con elementi a_{ij} .

Una forma quadratica assume ovviamente valore 0 quando $x = 0$, risulta interessante capire se, quando $x \neq 0$, la funzione $Q(x)$ assume solo valori positivi, solo negativi, o entrambi.

SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica assume ovviamente valore 0 quando $x = 0$, risulta interessante capire se, quando $x \neq 0$, la funzione $Q(x)$ assume solo valori positivi, solo negativi, o entrambi. Questo studio prende il nome di **segno della forma quadratica**.

Se, per $x \neq 0$, la funzione $Q(x)$

- assume solo valori positivi, si dice **definita positiva**
- assume solo valori non-negativi, si dice **semidefinita positiva**
- assume solo valori negativi, si dice **definita negativa**
- assume solo valori non-positivi, si dice **semidefinita negativa**
- assume qualsiasi valore, si dice **indefinita**

La matrice simmetrica A corrispondente a $Q(x)$ è chiamata con la stessa terminologia in base al segno di $Q(x)$.

STUDIO SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE

Data una matrice A quadrata e simmetrica, le sue **sottomatrici principali** sono ottenute prendendo le prime k righe e le prima k colonne:

$$\begin{array}{ccc} k = 1 & k = 2 & k = 3 \\ A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} & a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & a_{13}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & a_{23}} \\ \boxed{a_{31} & a_{32} & a_{33}} \end{bmatrix} \end{array}$$

I loro determinanti sono chiamati **minori principali** della matrice A .

STUDIO SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE

- se tutti i minori principali sono > 0 allora A si dice **definita positiva**
- se tutti i minori principali sono ≥ 0 allora A si dice **semidefinita positiva**
- se i minori principali dispari sono < 0 e i minori principali pari sono > 0 allora A si dice **definita negativa**
- se i minori principali dispari sono ≤ 0 e i minori principali pari sono ≥ 0 allora A si dice **semidefinita negativa**
- altrimenti A si dice **indefinita**

SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICHE

Ricordando il concetto di autovalore, è possibile utilizzarlo come metodo alternativo per lo studio del segno di una forma quadratica $x^T A x$. In particolare:

- se tutti gli autovalori sono > 0 allora A si dice **definita positiva**
- se tutti gli autovalori sono ≥ 0 allora A si dice **semidefinita positiva**
- se tutti gli autovalori sono < 0 allora A si dice **definita negativa**
- se tutti gli autovalori sono ≤ 0 allora A si dice **semidefinita negativa**
- altrimenti A si dice **indefinita**

Esempi ...

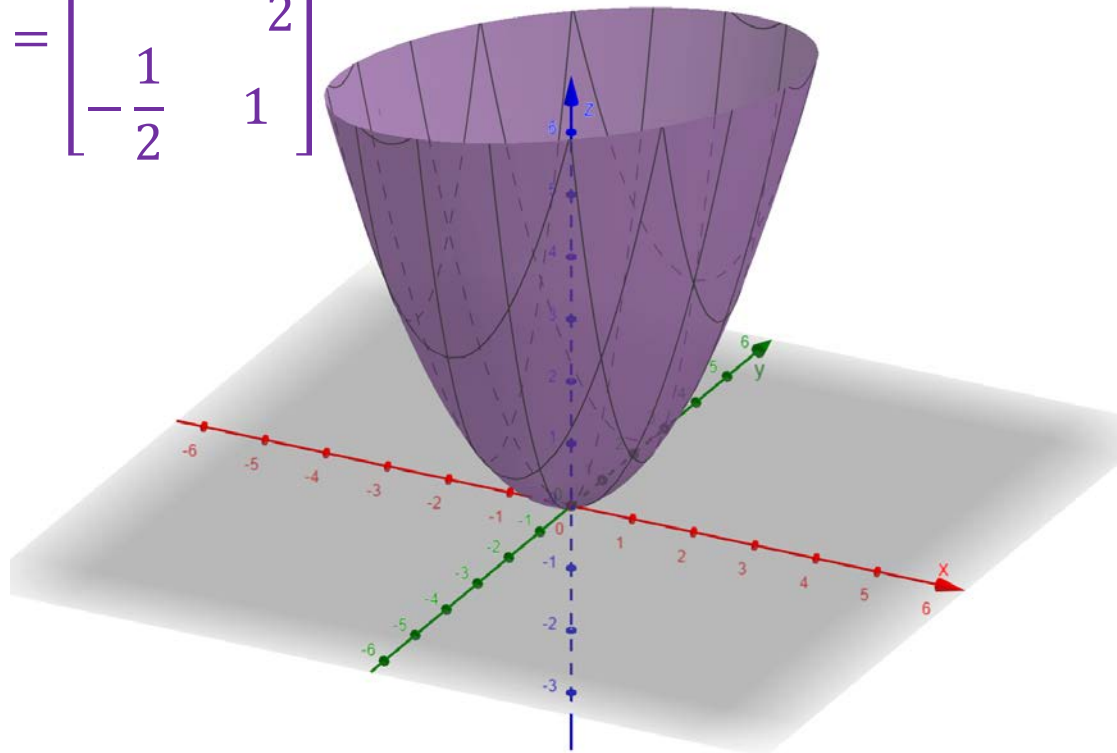
Dal segno della forma quadratica abbiamo evidenti implicazioni sull'ottimizzazione.

IMPLICAZIONE SULL'OTTIMIZZAZIONE

definita positiva

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

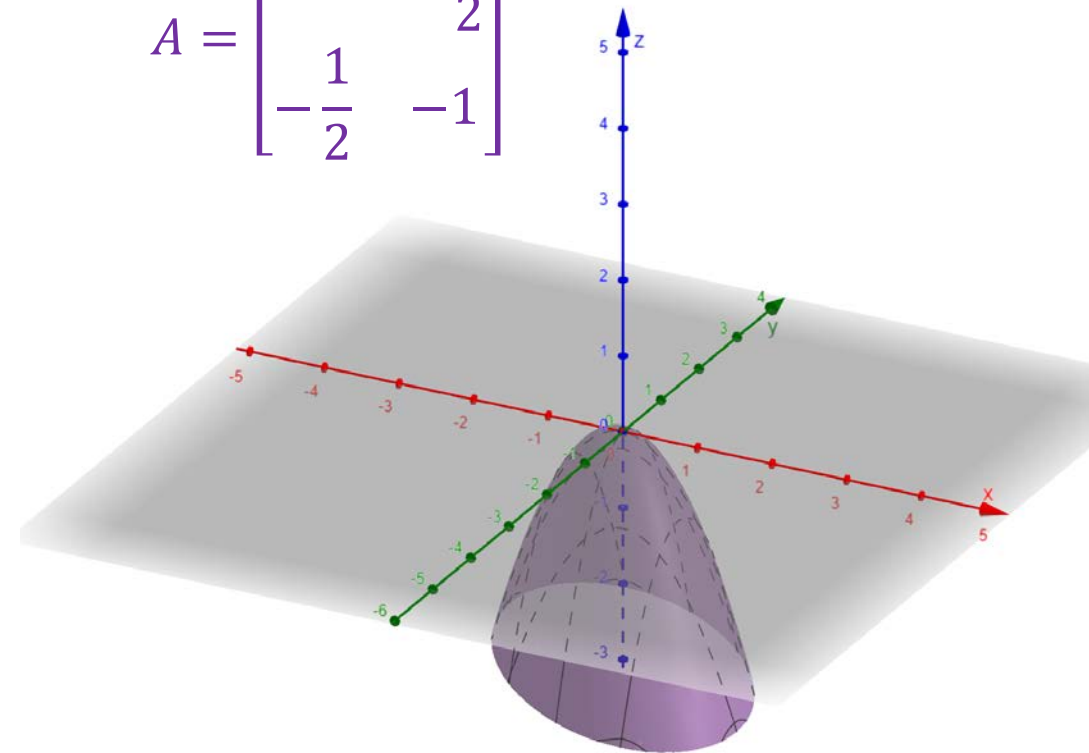
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



definita negativa

$$f(x, y) = -x^2 - xy - y^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

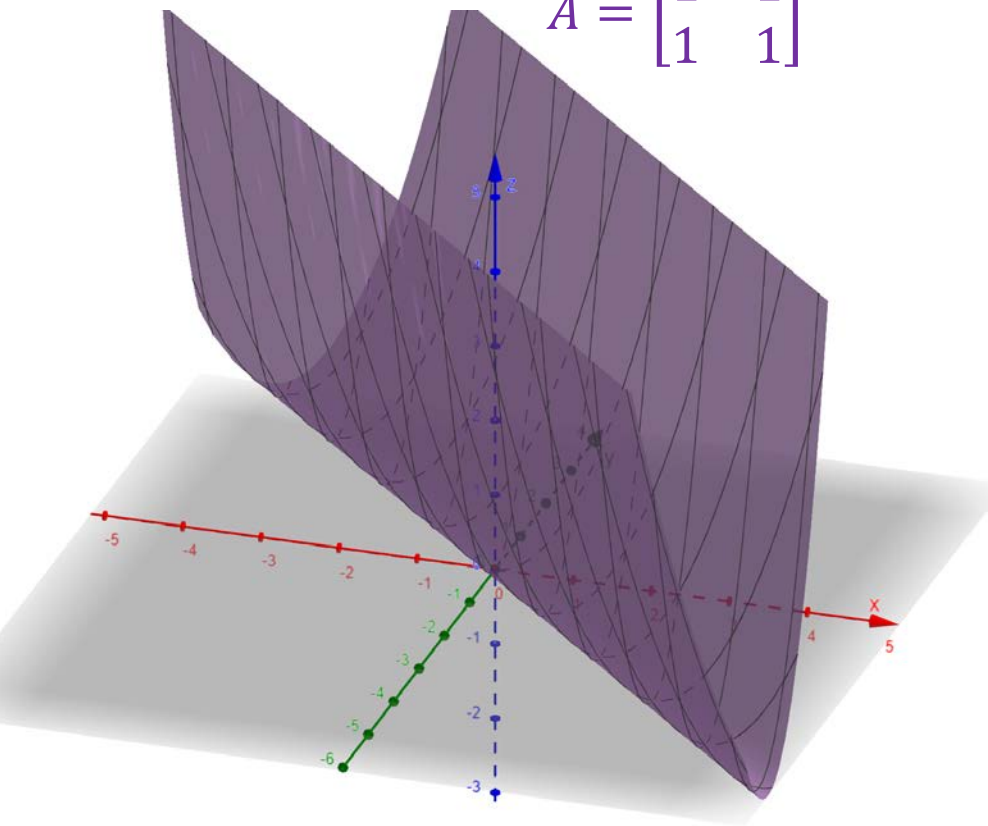


IMPLICAZIONE SULL'OTTIMIZZAZIONE

semidefinita positiva

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

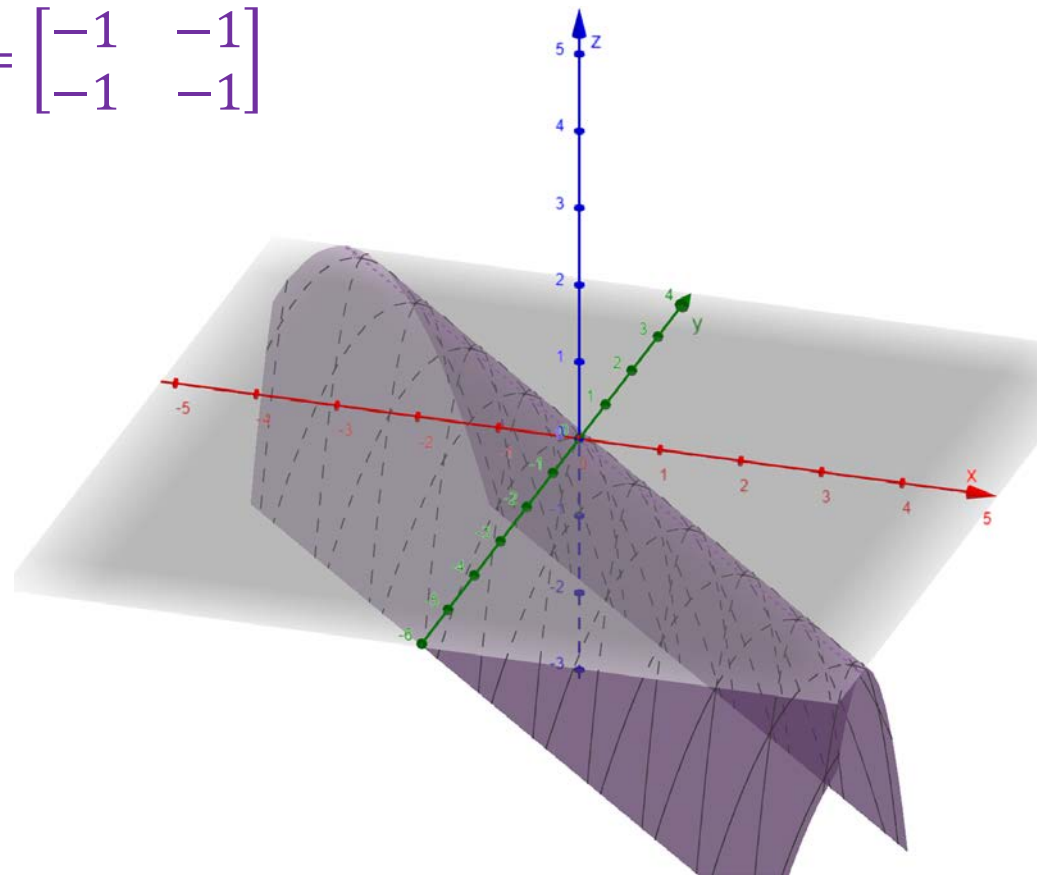
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



semidefinita negativa

$$f(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



IMPLICAZIONE SULL'OTTIMIZZAZIONE

indefinita

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + y^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

