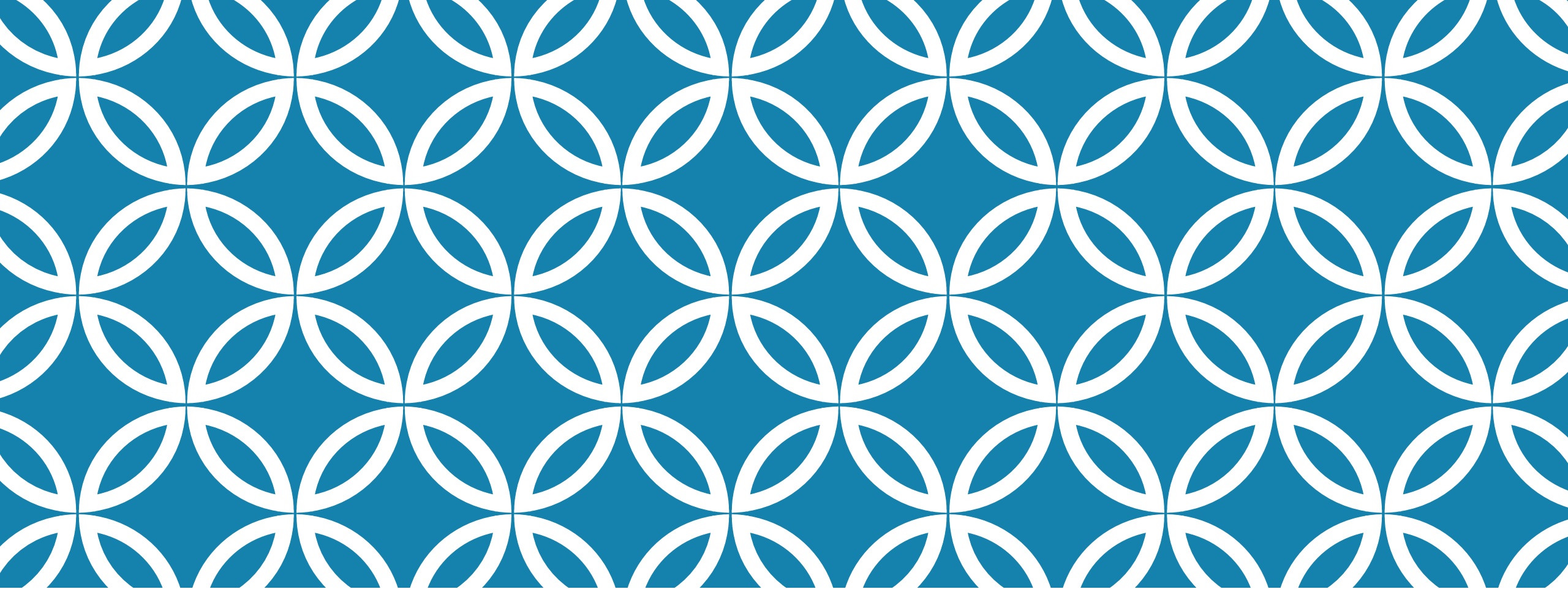




MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 5
Ottimizzazione

Sebastiano Vitali

RIFERIMENTO

Simon e Blume, Matematica per le scienze economiche
2021 Egea

Capitoli 9,10,11



OTTIMIZZAZIONE

Ottimizzare una funzione significa individuare i suoi **punti estremi**, cioè i **massimi** ed i **minimi**. Questo ha un evidente impatto in tutti i problemi rappresentabili con funzioni matematiche: in ambito economico si possono pensare, per esempio, alla massimizzazione dei profitti o alla minimizzazione dei costi.

Esistono diverse forme di ottimizzazione:

- Ottimizzazione non vincolata
- Ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza
- Ottimizzazione vincolata con vincoli di disuguaglianza
- Ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza
- Ottimizzazione vincolata con vincoli di disuguaglianza (Kuhn-Tucker)

OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

Per determinare i punti estremanti in una funzione $g(x)$ a una variabile utilizzando le derivate seguiamo questa procedura in due passaggi:

- troviamo un punto x_0 che annulla la derivata prima $g'(x)$ (condizione primo ordine)
- verifichiamo il segno della derivata seconda nel punto critico $g''(x_0)$ (condizione secondo ordine)

Procediamo allo stesso modo per una funzione a $f(x)$ più variabili:

- troviamo il vettore x_0 che annulla il gradiente risolvendo $\nabla f(x) = 0$ (condizione primo ordine)
- studiamo il segno della matrice delle derivate seconde (l'Hessiano, H) in corrispondenza del vettore critico $H(x_0)$ (condizione secondo ordine)
 - ricordiamo che lo studio del segno può svolgersi con i minori principali o con gli autovalori
 - ricordiamo che nel caso di forme quadratiche si può studiare il segno della matrice simmetrica A invece che H

OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

Concentriamoci sulla **condizione secondo ordine**, che può essere declinata in due modi: come condizione **sufficiente** (più forte) o come condizione **necessaria** (più debole). Vediamo le differenze.

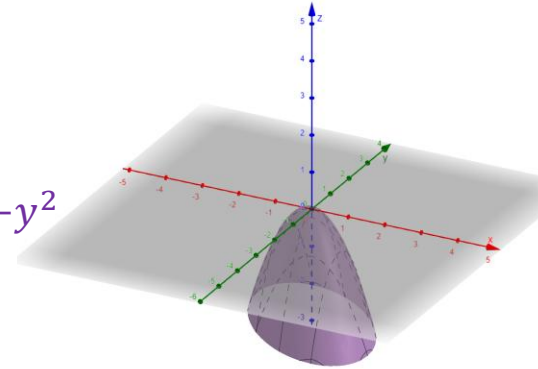
Come condizione **sufficiente**, quando l'Hessiano è definito:

Se x_0 è punto critico (cioè soddisfa la **condizione del primo ordine**) e

- $H(x_0)$ è **definita negativa**, allora x_0 è punto di **massimo locale**

$$f(x, y) = -x^2 - xy - y^2$$

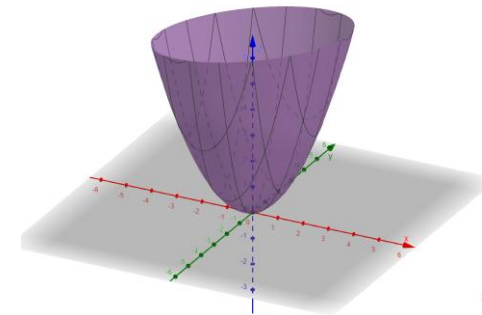
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$



- $H(x_0)$ è **definita positiva**, allora x_0 è punto di **minimo locale**

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

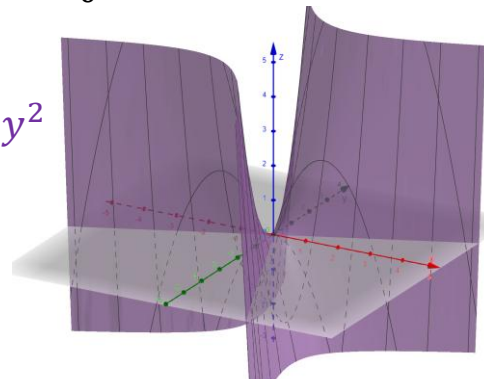
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



- $H(x_0)$ è **indefinita**, allora x_0 non è né massimo né minimo ma è detto punto di **sella**

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + y^2$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

Concentriamoci sulla **condizione secondo ordine**, che può essere declinata in due modi: come condizione **sufficiente** (più forte) o come condizione **necessaria** (più debole). Vediamo le differenze.

Come condizione **necessaria**, quando l'Hessiano è semidefinito:

Se x_0 è punto critico (cioè soddisfa la **condizione del primo ordine**) e

- se x_0 è punto di **massimo locale**, allora $H(x_0)$ è **semidefinita negativa**

$$f(x, y) = -x^4 - y^4$$

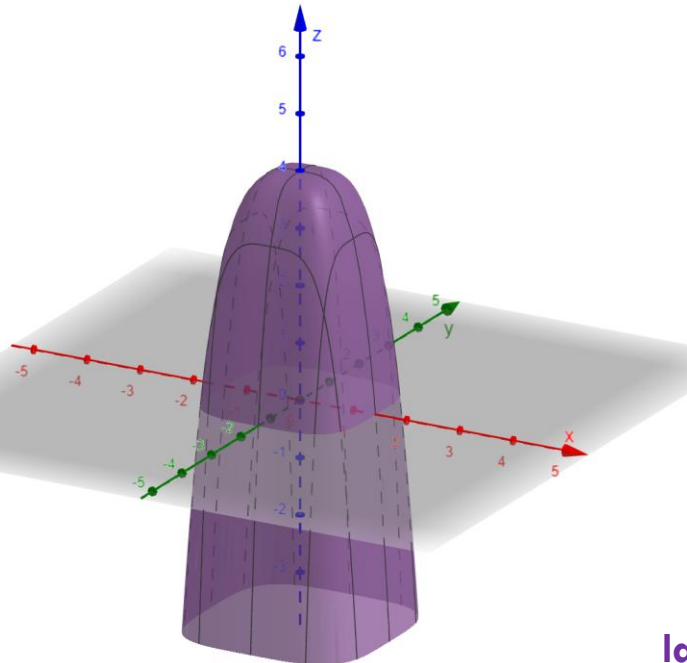
$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -4x^3 \\ -4y^3 \end{bmatrix}$$

$(0,0)$ è punto critico

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Massimo globale, semidef neg



$$f(x, y) = x^3 - x^2 + y^4$$

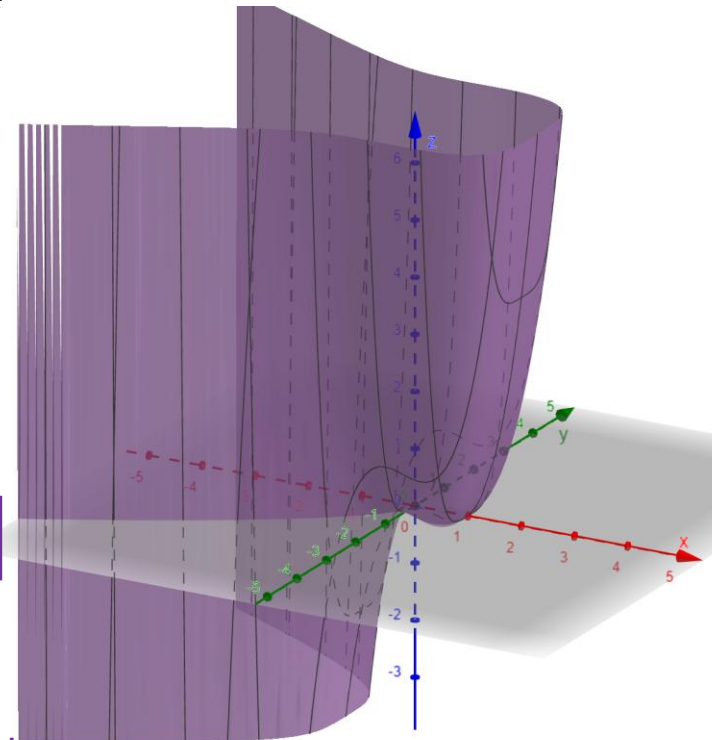
$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 2x \\ 4y^3 \end{bmatrix}$$

$(0,0)$ è punto critico

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semidef neg, no massimo locale
la condizione è solo **NECESSARIA**



- se x_0 è punto di **minimo locale**, allora $H(x_0)$ è **semidefinita positiva**

OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

Risumendo:

- se l'Hessiano è **definito**,
allora possiamo utilizzare la condizione **sufficiente** e siamo certi che x_0 è punto di ottimo locale
- se il segno dell'Hessiano è **semidefinito**,
allora possiamo **solo** utilizzare la condizione **necessaria** e **non** siamo certi che x_0 sia punto di ottimo locale

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Analizziamo un problema più ambizioso, vogliamo ottimizzare una funzione $f(x)$ e congiuntamente vogliamo che la soluzione rispetti un insieme di vincoli di **uguaglianza**.

Consideriamo che vogliamo **massimizzare** la funzione $f(x)$ in n variabili e abbiamo un insieme di m vincoli di uguaglianza da rispettare:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, \dots, x_n) \\ h_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ h_m(x_1, \dots, x_n) &= c_m \end{aligned}$$

Se invece dovessimo **minimizzare** la funzione possiamo «girare» il problema perché

$$\min f = -\max -f$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

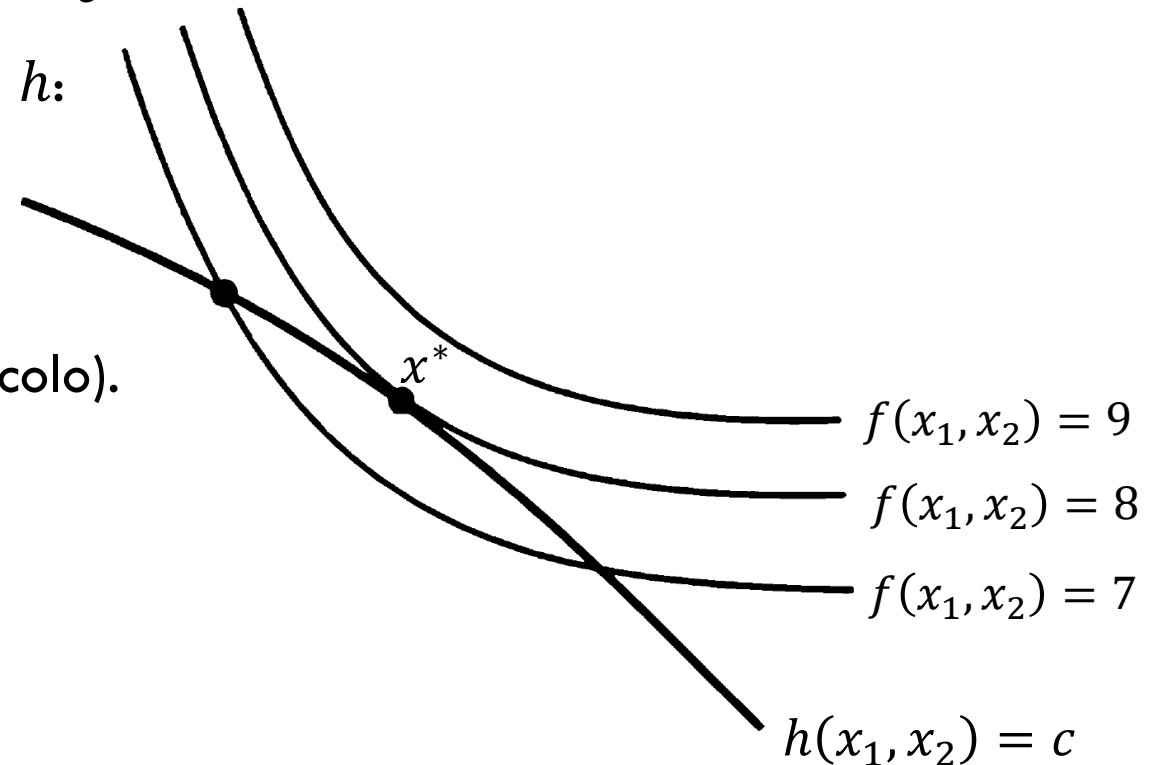
Per semplicità, consideriamo il caso più semplice: con $n = 2$ e $m = 1$:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) \\ h(x_1, x_2) = c \end{aligned}$$

Rappresentiamo le curve di livello di f e il vincolo h :

E' chiaro che il punto migliore sia x^* in cui il vincolo h risulta **tangente** alla curva di livello perché garantisce che la curva di livello sia la massima possibile (continuando a soddisfare il vincolo).

Risolvere il problema implica quindi imporre la tangenza tra f e h .



OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Per semplicità, consideriamo il caso più semplice: con $n = 2$ e $m = 1$:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) \\ h(x_1, x_2) = c \end{aligned}$$

Imporre la tangenza tra f e h significa **imporre che hanno la stessa pendenza**.

Ricordiamo che la pendenza di una funzione in due variabili è l'opposto del rapporto tra le due derivate parziali. Pertanto otteniamo:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Imponendo che le derivate
di h non siano nulle

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} = \mu$$

dove μ è il valore comune tra i due rapporti.

Spezzando la doppia uguaglianza otteniamo:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \mu \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} = \mu \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

$$h(x_1, x_2) = c$$

Si tratta di un sistema in tre variabili (x_1, x_2, μ)
è quindi necessario aggiungere una terza
equazione per poterlo risolvere



La soluzione di questo sistema di tre equazioni in tre variabili permette di individuare il punto di ottimo vincolato.

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

$$h(x_1, x_2) = c$$

C'è un modo più compatto per scrivere questo sistema. Introduciamo la funzione Lagrangiana:

$$L(x_1, x_2, \mu) = f(x_1, x_2) - \mu(h(x_1, x_2) - c)$$

e uguagliamo a 0 il suo gradiente:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \rightarrow \quad h(x_1, x_2) = c$$

Come osservano Simon & Blume:

« Questo processo è magico. Introducendo il moltiplicatore di Lagrange μ nel problema vincolato, abbiamo trasformato un problema vincolato in due variabili in un problema di ricerca dei punti critici (non massimi o minimi!) di una funzione $L(x_1, x_2, \mu)$ in una variabile in più. Abbiamo ridotto un problema vincolato in due variabili in un problema non vincolato in tre variabili.

Il costo di questa riduzione è l'inclusione della variabile μ che, come vedremo, ha un fondamentale significato economico. »

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Ricordiamo che per ottenere il risultato precedente abbiamo dovuto imporre che le derivate di h nel punto critico x^* fossero diverse da 0. Questa restrizione si chiama **qualificazione dei vincoli**.

Esempi ...

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Generalizziamo il risultato ottenuto ricordando che volevamo risolvere questo problema con $f(x)$ in n variabili e un insieme di m vincoli di uguaglianza :

$$\begin{aligned} \max f(x_1, \dots, x_n) \\ h_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ h_m(x_1, \dots, x_n) &= c_m \end{aligned}$$

Occupiamoci della **qualificazione dei vincoli** (derivate dei vincoli non nulle). In questo caso abbiamo n derivate per ciascuno degli m vincoli. Tutte queste derivate possiamo organizzarle in una matrice, detta Jacobiano:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix} \quad \text{i vincoli sono qualificati se il rango di } J(x^*) \text{ è } m$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Generalizziamo il risultato ottenuto ricordando che volevamo risolvere questo problema con $f(x)$ in n variabili e un insieme di m vincoli di uguaglianza :

$$\begin{aligned} \max f(x_1, \dots, x_n) \\ h_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ h_m(x_1, \dots, x_n) &= c_m \end{aligned}$$

La soluzione ora è analoga al caso semplice: si costruisce una nuova Lagrangiana:

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \mu_1[h_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] - \dots - \mu_m[h_m(x_1, \dots, x_n) - c_m]$$

e, nuovamente, si impone uguale a 0 il suo gradiente riducendo un problema vincolato in un problema non vincolato (con m variabili in più)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \mu_1[h_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] - \dots - \mu_m[h_m(x_1, \dots, x_n) - c_m]$$

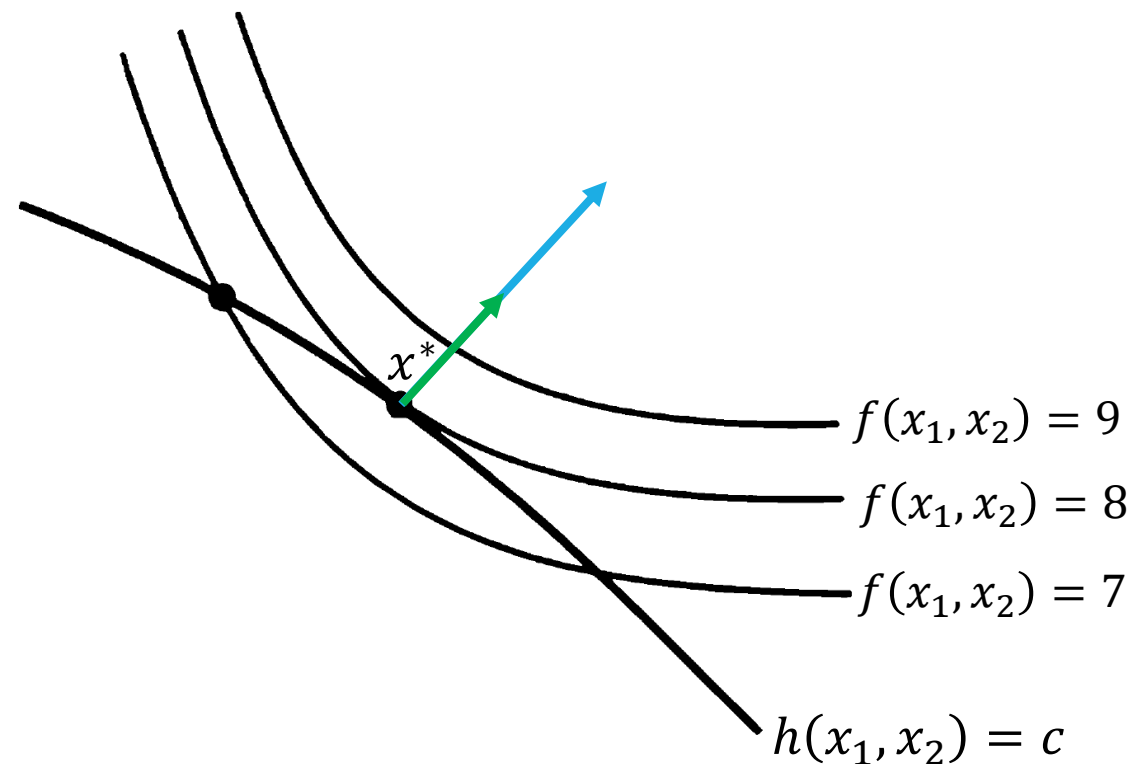
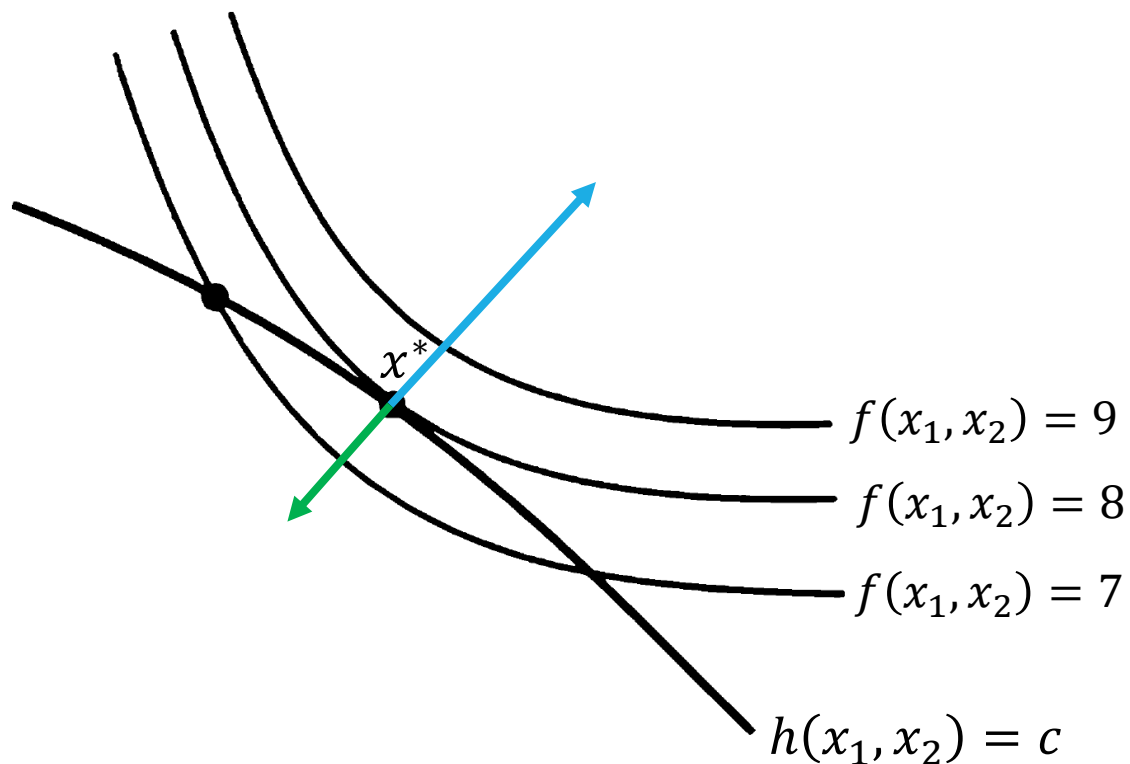
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_m} = 0 \end{cases}$$

Esempi ...

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$$\nabla f(x^*) = \mu^* \nabla h(x^*) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mu^* \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

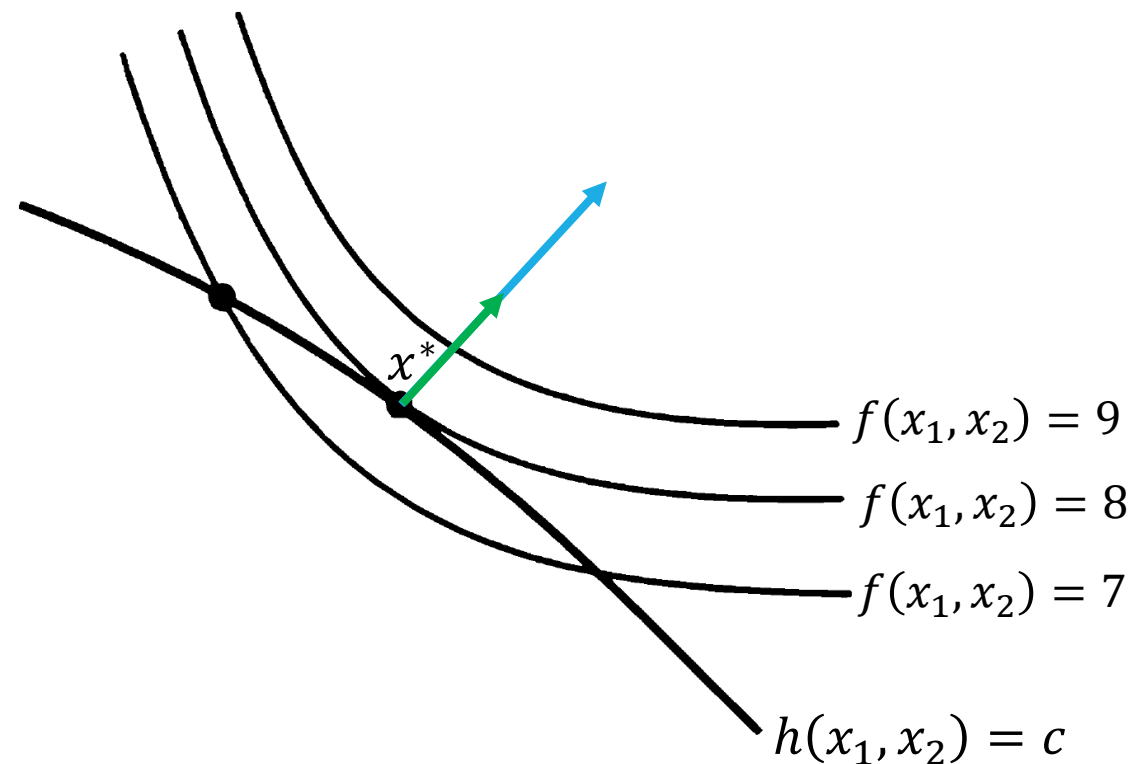
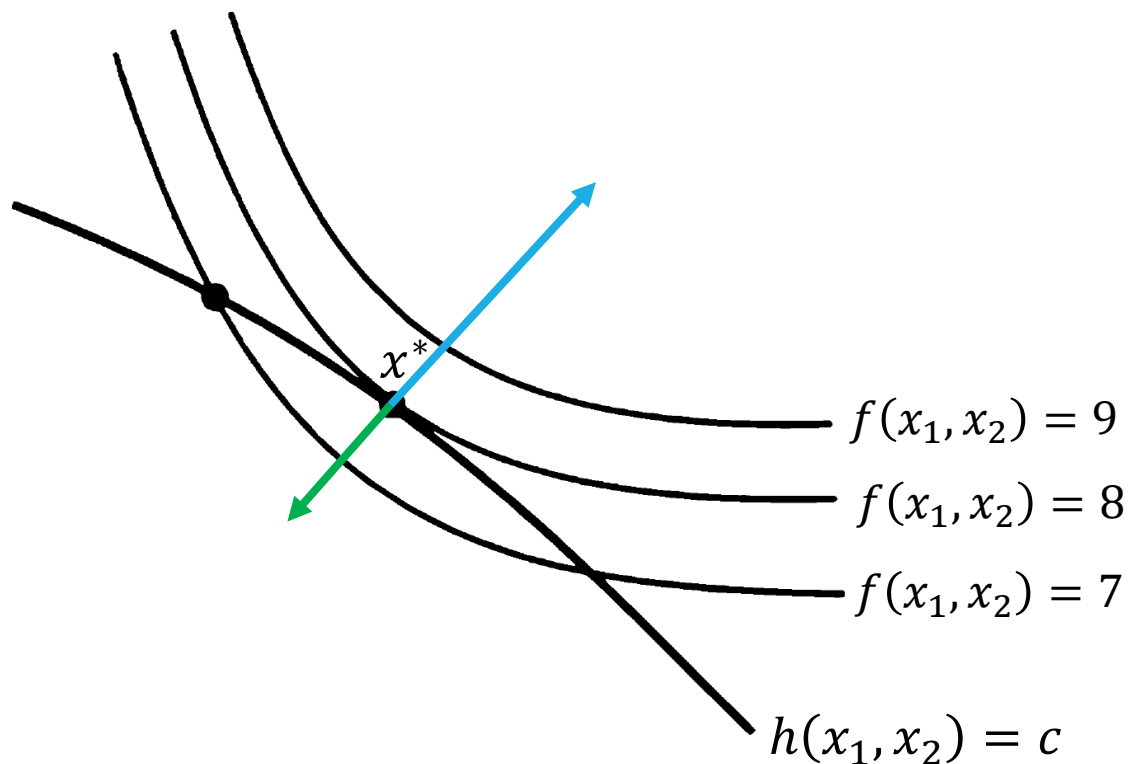
La precedente condizione di tangenza può essere riscritta in un altro modo: se due curve sono **tangenti** significa che i loro **gradienti sono perpendicolari** allo stesso piano. Pertanto, se due curve sono tangenti i loro gradienti devono essere allineati, cioè l'uno è multiplo dell'altro.



OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$$\nabla f(x^*) = \mu^* \nabla h(x^*) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mu^* \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Non è importante che abbiano la stessa direzione, infatti μ^* può essere sia positivo sia negativo. Tuttavia, l'intuizione che la tangenza può essere imposta utilizzando i gradienti è importante perché fondamentale per il prossimo argomento: i vincoli di disuguaglianza.



OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

Analizziamo un problema ancor più ambizioso, vogliamo ottimizzare una funzione $f(x)$ e congiuntamente vogliamo che la soluzione rispetti un insieme di vincoli di **disuguaglianza**.

Consideriamo che vogliamo **massimizzare** la funzione $f(x)$ in n variabili e abbiamo un insieme di k vincoli di disuguaglianza da rispettare:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, \dots, x_n) \\ g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m \end{aligned}$$

Se invece dovessimo **minimizzare** la funzione possiamo «girare» il problema perché

$$\min f = -(\max -f)$$

E se le disuguaglianze fossero con il **maggiore** possiamo «girare» anche loro perché

$$g(x) \geq b \quad \text{diventa} \quad -g(x) \leq -b$$

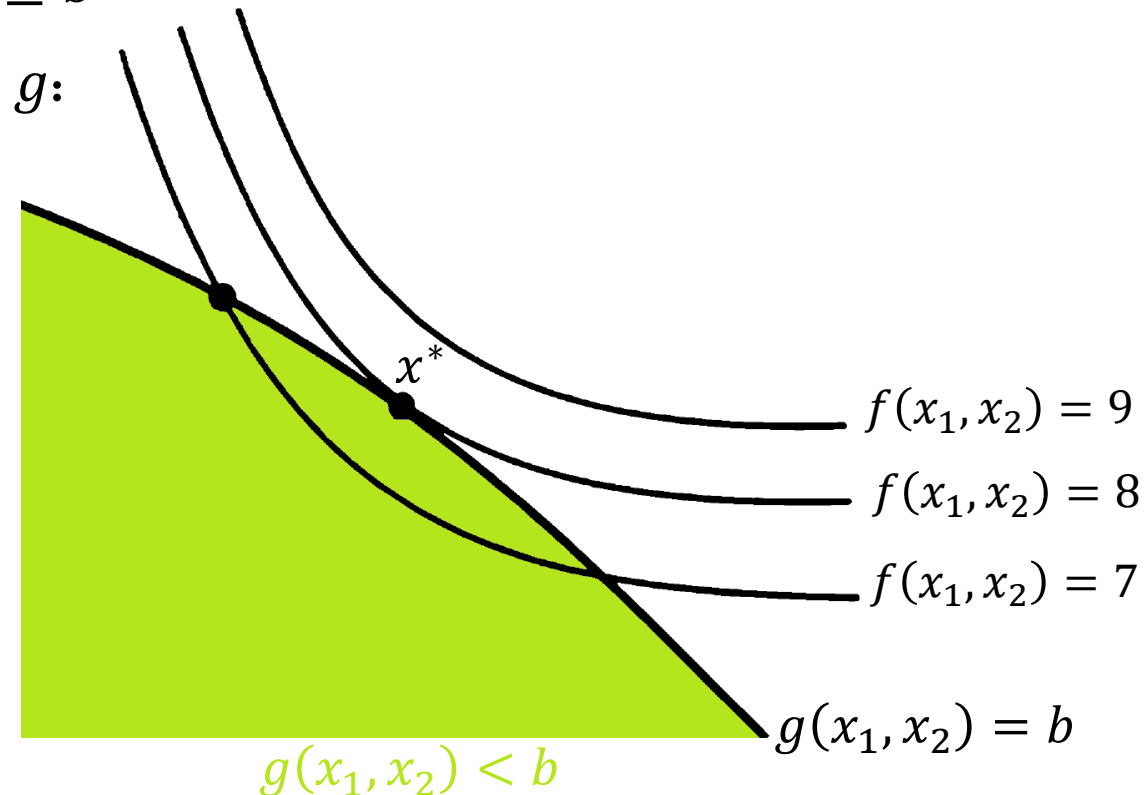
OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

Per semplicità, consideriamo il caso più semplice: con $n = 2$ e $k = 1$:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \leq b \end{aligned}$$

Rappresentiamo le curve di livello di f e il vincolo g :

ricordiamo che il vincolo è una disuguaglianza
quindi la regione ammissibile è l'**area** «sotto»
il vincolo.



OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

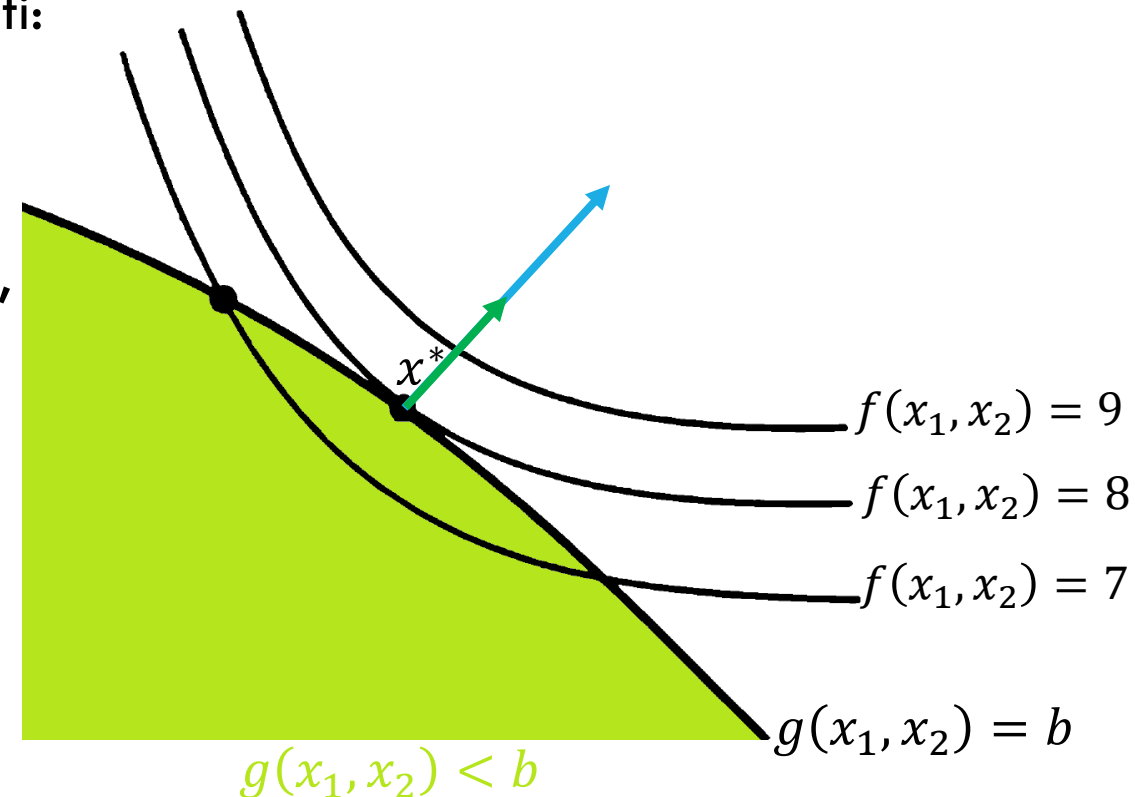
Distinguiamo tre casi in base a dove si troverebbe il massimo non vincolato di f :

Primo caso: si troverebbe «fuori» dalla **regione ammissibile**. In questo caso, utilizziamo l'impostazione precedente uguagliando i due gradienti:

$$\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla h(x^*)$$

E' però importante che i gradienti **vadano nella stessa direzione** (non è sufficiente che siano allineati), quindi dobbiamo anche imporre che $\lambda \geq 0$.

In questo caso il vincolo è «attivo» e deve valere con il segno di disuguaglianza.



Condizioni di complementarità

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

Questi due casi si possono riassumere con la condizione:

$$\lambda \cdot [g(x_1, x_2) - b] = 0$$

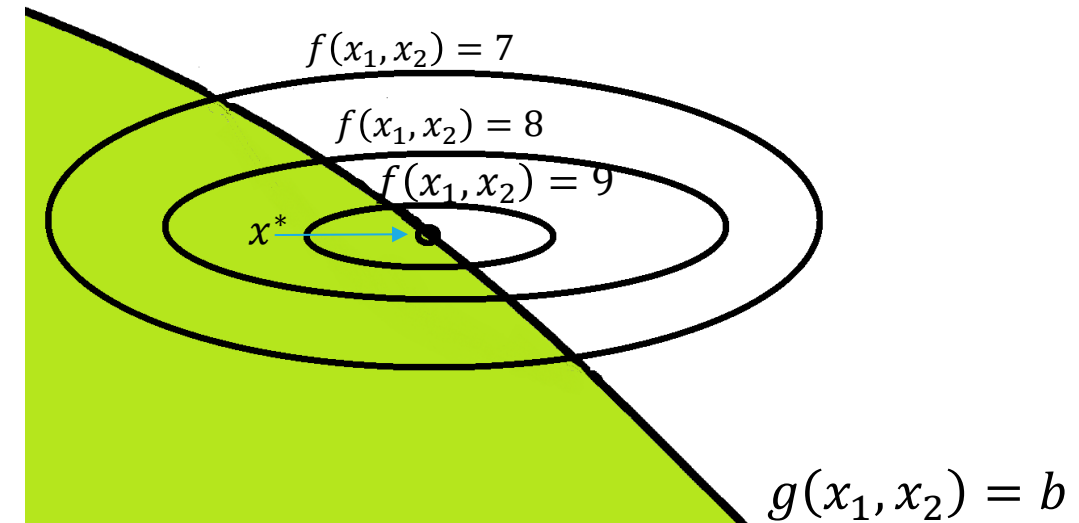
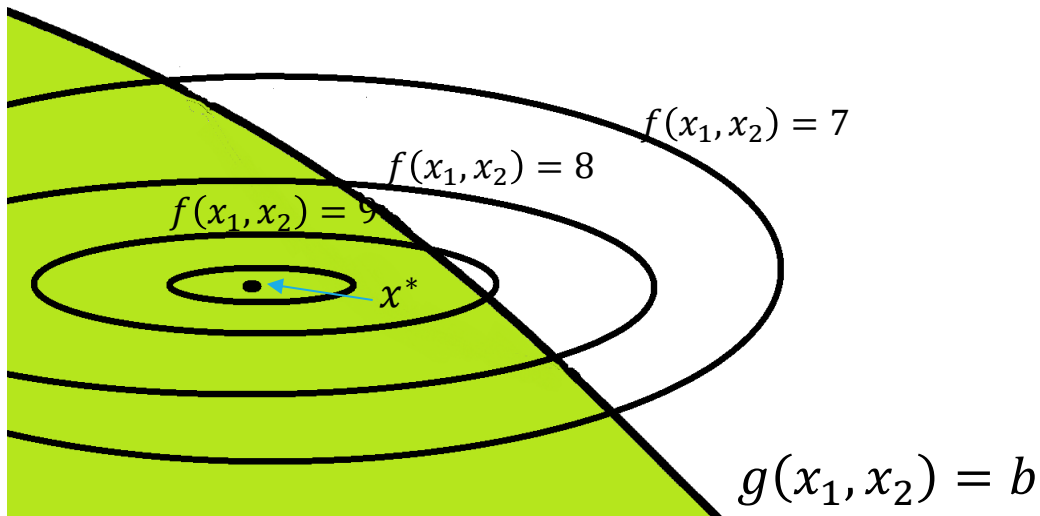
se $\lambda = 0$ il vincolo non è attivo

se $g(x_1, x_2) - b = 0$ il vincolo è attivo

Distinguiamo tre casi in base a dove si troverebbe il massimo non vincolato di f :

Secondo caso: si troverebbe «dentro» alla **regione ammissibile**. In questo caso, il vincolo **non è «attivo»** e dobbiamo fare in modo che sia rimosso, sicuramente non ci serve la condizione sui gradienti.

Terzo caso: si troverebbe «sul bordo» della **regione ammissibile**. In questo caso, il vincolo è «attivo» e deve inoltre valere con il simbolo di uguaglianza.



OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

In generale, considerando qualsiasi n e qualsiasi k , l'uguaglianza dei gradienti e il rispetto dei vincoli di disuguaglianza si può rappresentare come il caso dei vincoli di uguaglianza cioè con la Lagrangiana:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1 \leq 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k \leq 0 \\ \\ \lambda_1 \cdot [g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k \cdot [g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k] = 0 \\ \\ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0 \end{array} \right.$$

Come nel caso con vincoli di uguaglianza, imponiamo le derivate rispetto alle variabili x_i uguali a zero e riportiamo i vincoli. Non abbiamo le derivate rispetto a λ_i perché compaiono nelle condizioni di complementarietà.

Condizioni di complementarietà: se il vincolo non è attivo il λ è zero e tutto si riduce a un problema non vincolato, se il vincolo è attivo il λ è maggiore di zero e diventa un vincolo di uguaglianza

Se il vincolo è attivo, i gradienti devono avere la stessa direzione.

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

Anche in questo caso dobbiamo occuparci della **qualificazione dei vincoli** (derivate dei vincoli non nulle). Nuovamente, calcoliamo le n derivate per ciascuno dei k vincoli e le organizziamo nella matrice Jacobiano:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

Chiaramente, è necessario che le derivate siano diverse da zero **solo per i vincoli attivi**, quindi, affinché i vincoli siano qualificati, il rango di $J(x^*)$ deve essere uguale al numero di vincoli attivi.

Esempi ...

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA E DI DISUGUAGLIANZA

Si mette tutto insieme...

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \mu_1[h_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] - \dots - \mu_m[h_m(x_1, \dots, x_n) - c_m] \\ - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k]$$

$$\max f(x_1, \dots, x_n)$$

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$$

$$\vdots$$

$$h_m(x_1, \dots, x_n) = c_m$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \mu_m} = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1 \leq 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k \leq 0 \\ \lambda_1 \cdot [g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k \cdot [g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k] = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0 \end{array} \right.$$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA (KUHN-TUCKER)

In molti problemi, specialmente di natura economica, sono presenti specifici vincoli sulla **non-negatività** di tutte le variabili. Il problema diventa quindi:

$$\begin{aligned} \max & f(x_1, \dots, x_n) \\ & g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

In questo caso, si potrebbe semplicemente utilizzare l'approccio precedente scrivendo la corrispondente Lagrangiana:

$$\begin{aligned} & L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, v_1, \dots, v_n) \\ & = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k] - v_1(-x_1) - \dots - v_n(-x_n) \end{aligned}$$

Ricordando che i vincoli di non-negatività vanno «girati»: $-x_1 \leq 0$

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA (KUHN-TUCKER)

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, v_1, \dots, v_n) \\ = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k] - v_1(-x_1) - \dots - v_n(-x_n)$$

Due studiosi hanno invece proposto una soluzione alternativa che considera la funzione Lagrangiana **senza** i nuovi vincoli e che prende il nome di funzione **Lagrangiana di Kuhn-Tucker**

$$\bar{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, v_1, \dots, v_n) \\ = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - b_k]$$

Le condizioni per l'individuazione del punto di ottimo diventano:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x_1} \leq 0, \dots, \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_n} \leq 0$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_1} \leq 0, \dots, \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_k} \leq 0$$

$$x_1 \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_1} = 0, \dots, x_n \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_n} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \lambda_n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_k} = 0$$

Questa formulazione ha un numero minore di disequazioni ed equazioni da risolvere. Tuttavia, non sempre è la più semplice da implementare.