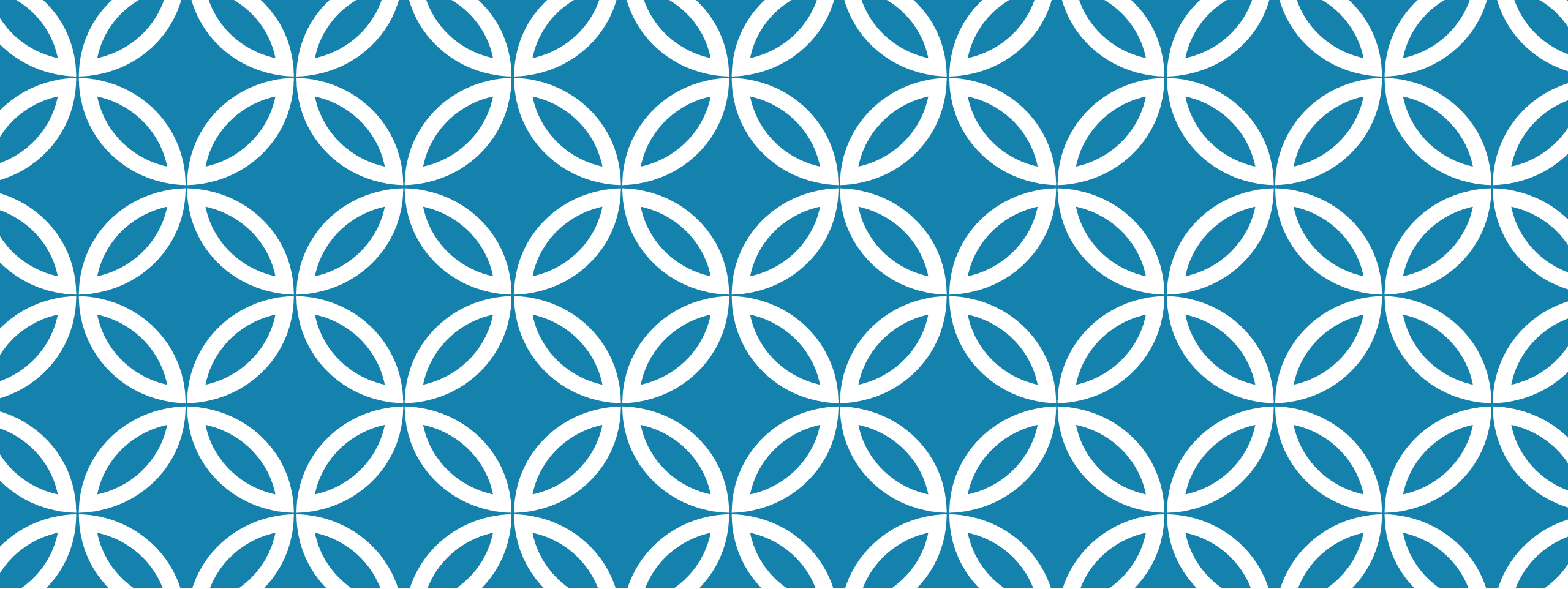




MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 6

Equazioni differenziali

Sebastiano Vitali

RIFERIMENTO

Simon e Blume, Matematica per le scienze economiche
2021 Egea

Capitolo 24



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE PRIMO ORDINE

Un'equazione differenziale ordinaria (Ordinary Differential Equation, ODE) descrive la relazione tra una funzione in una variabile e le sue derivate.

Tipicamente, la variabile è indicata con t invece di x perché è interpretata come la variabile **tempo**. Quindi si studia l'evoluzione della variabile y nel tempo t .

$$y'(t) = F(y, t)$$

- Se la ODE contiene solo la derivata prima, si chiama **equazione differenziale del primo ordine**
- Se la $F(y, t)$ è solo $F(y)$ la ODE si dice **autonoma** (o time-independent)
- Se la $F(y, t)$ è lineare in y si dice **equazione differenziale lineare**

ESEMPI CON VERIFICA

$$y' = ay \quad \rightarrow \quad y = ke^{at}$$

$$y' = ay + b \quad \rightarrow \quad y = -\frac{b}{a} + ke^{at}$$

$$y' = a(t)y \quad \rightarrow \quad y = ke^{\int a(t)dt}$$

Regola generale

$$y' = a(t)y + b(t) \quad \rightarrow \quad y = \left[k + \int b(t) e^{-\int a(t)dt} dt \right] e^{\int a(t)dt}$$

CASO PARTICOLARE

- Se la $F(y, t)$ si può scrivere come $g(y) \cdot h(t)$ allora la ODE si dice **a variabili separabili** che si può risolvere come segue:

$$\begin{aligned}y' &= g(y) \cdot h(t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(y) \cdot h(t) \\ \frac{dy}{g(y)} &= h(t)dt \\ \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int h(t)dt\end{aligned}$$

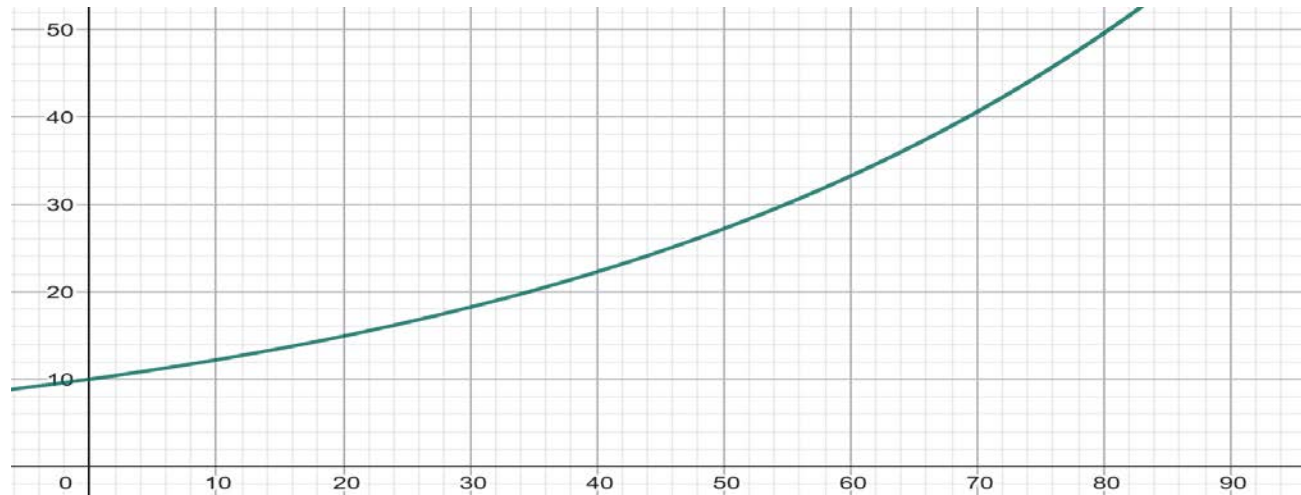
MODELLO DELLA POPOLAZIONE DI MALTHUS

- Legge di Malthus:

$$y' = ry$$

risolviamo con $y(0) = 10$ e analizziamo...

- La soluzione è $y = 10e^{rt}$, fissando per esempio $r = 0.01$ otteniamo



- Si tratta di una legge di evoluzione “esplosiva”: non c’è limite alla crescita della popolazione

MODELLO DELLA POPOLAZIONE DI DI VERHULST

- Modello di Verhulst

$$y' = y(a - by)$$

- La soluzione è $y = \frac{a}{b + ke^{-at}}$, cioè la **funzione logistica**.

Inoltre ci sono due soluzioni costanti: $y = 0$ e $y = \frac{a}{b}$, cioè se la popolazione è 0 oppure è già al valore di equilibrio $\frac{a}{b}$ allora la derivata è nulla e la funzione non si muove nel tempo.

- Si tratta di una legge di evoluzione “con equilibrio”: il valore $\frac{a}{b}$ rappresenta la popolazione di equilibrio di questo sistema:

- se la popolazione iniziale $y(0)$ è superiore a $\frac{a}{b} \Rightarrow k$ sarà negativo e la popolazione decresce fino al valore di equilibrio
- se la popolazione iniziale $y(0)$ è inferiore a $\frac{a}{b} \Rightarrow k$ sarà positivo e la popolazione cresce fino al valore di equilibrio

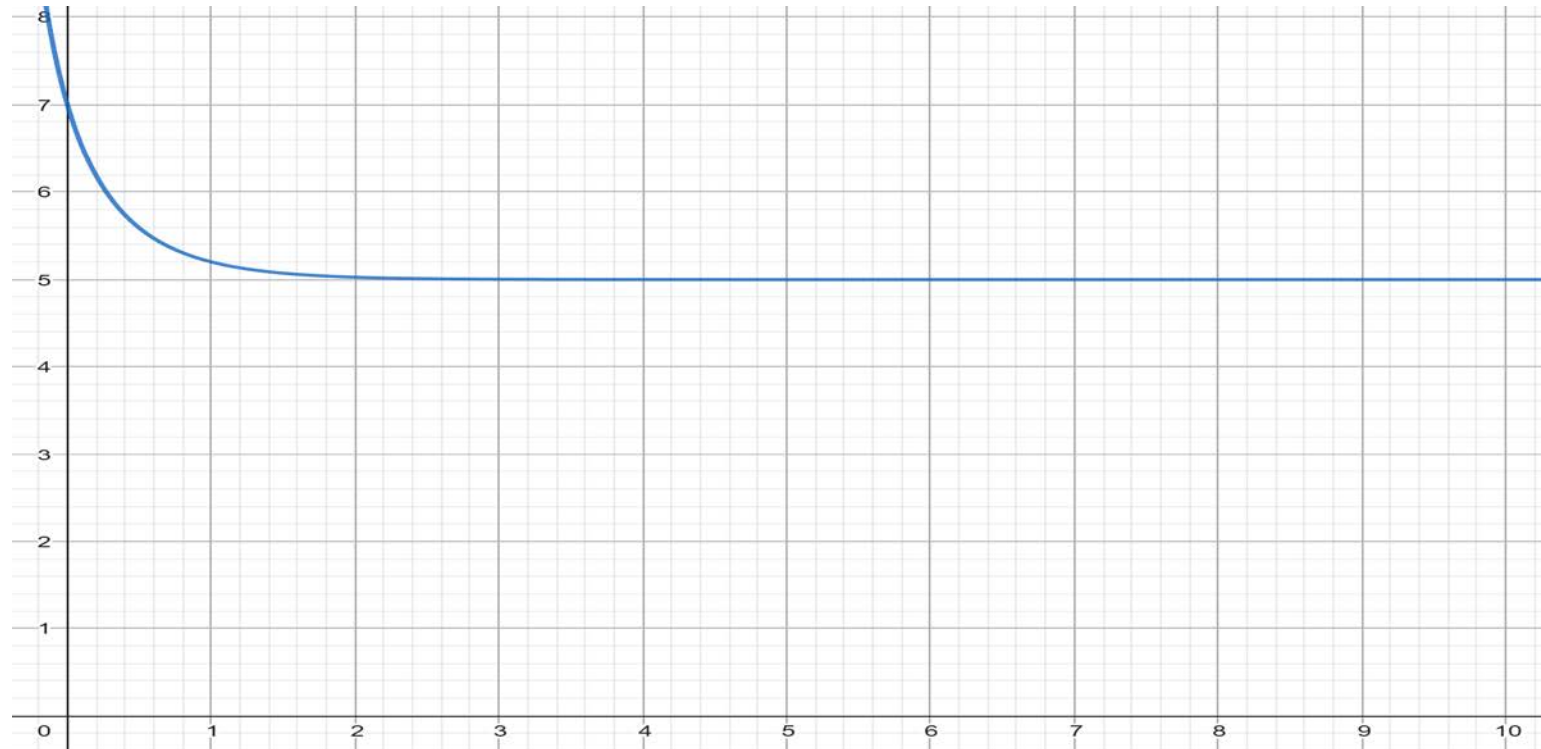
Verifichiamolo con un esempio

MODELLO DELLA POPOLAZIONE DI DI VERHULST

- se la popolazione iniziale $y(0)$ è superiore a $\frac{a}{b}$

k sarà negativo e la popolazione decresce fino al valore di equilibrio

Consideriamo il caso con $a = 2$, $b = 0.4$ (quindi l'equilibrio è $y = 5$) e immaginiamo che la popolazione iniziale è $y(0) = 7$, quindi risulta $k = 1.6$

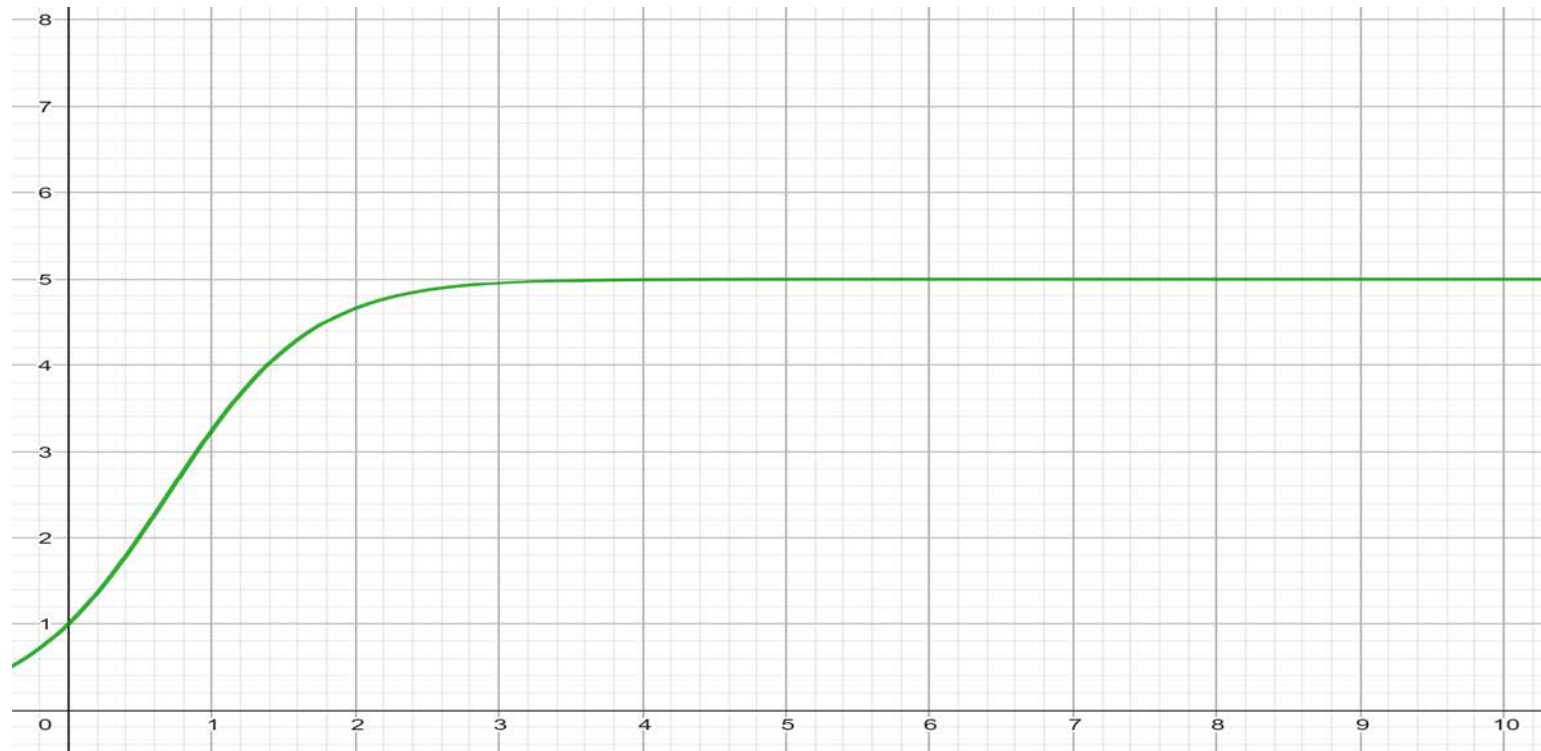


MODELLO DELLA POPOLAZIONE DI VERHLUST

- se la popolazione iniziale $y(0)$ è inferiore a $\frac{a}{b}$

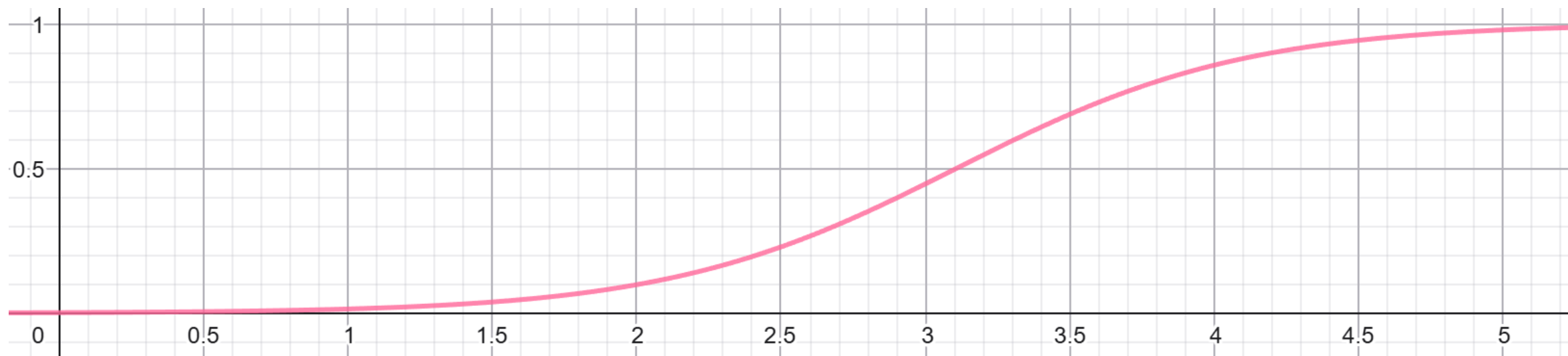
k sarà positivo e la popolazione cresce fino al valore di equilibrio

Consideriamo il caso con $a = 2$, $b = 0.4$ (quindi l'equilibrio è $y = 5$) e immaginiamo che la popolazione iniziale è $y(0) = 1$, quindi risulta $k = \frac{0.8}{7}$



MODELLO DI VERHULST, FUNZIONE LOGISTICA

- Ricordiamo che il modello di Verhulst ha come soluzione una funzione particolare che si chiama **funzione logistica**. Nel caso con $a = b$ e $k > 0$, la funzione logistica ha moltissime applicazioni, perché il suo valore è sicuramente compreso tra 0 e 1 e quindi può essere interpretato come **probabilità...**



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

SECONDO ORDINE

- Se la ODE contiene anche la derivata seconda, si chiama **equazione differenziale del secondo ordine**

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

- Se $g(t) = 0$ l'equazione si dice omogenea. Noi studiamo solo questo caso che si risolve considerando come possibile soluzione $y = e^{rt}$:

$$y = e^{rt} \quad y' = re^{rt} \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

Sostituendo otteniamo

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \quad ar^2 + br + c = 0$$

Dopo aver trovato le soluzioni r_1, r_2 si trova la soluzione generale:

- se $k_1 \neq k_2$ la soluzione è

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

- se $k_1 = k_2$ la soluzione è

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_2 t}$$

UTILITÀ E COEFFICIENTE DI ARROW-PRATT

Nella **Teoria dell'Utilità**, rivestono particolare importanza quelle funzioni di utilità $u(t)$ nelle quali esiste una particolare relazione tra le sue derivate (coefficienti di Arrow-Pratt). Per noi, si tratta di esempi di **Equazioni differenziali al secondo ordine**:

- Coefficiente **assoluto** di avversione al rischio: $-\frac{u''}{u'}$

- Costante

$$-\frac{u''}{u'} = \alpha$$

- Crescente

$$-\frac{u''}{u'} = \alpha t$$

- Coefficiente **relativo** di avversione al rischio: $-\frac{u''t}{u'}$

- Costante

$$-\frac{u''t}{u'} = \alpha$$

- Crescente

$$-\frac{u''t}{u'} = \alpha t$$

Noi studiamo e
risolviamo solo
questo caso