TUTOR. MAT. PER L'ECON. 5°

MA 4/11/'25

1. OTTIMIZZ. VINCOLATA CON VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA (C.N. DI K.-T.)
2. EQ. DIFF. I ORDINE A VAR. SEPARAB.
3. EQ. DIFF. I ORDINE LINEARI A COEF. COST.

ES. 1 DISP. AGNETIS, DETTI

Pb.1

$$\begin{aligned} &\max\ x_1+x_2 \\ &x_1-4x_2 \geq -3 \\ &-x_1+x_2^2 \geq 0 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

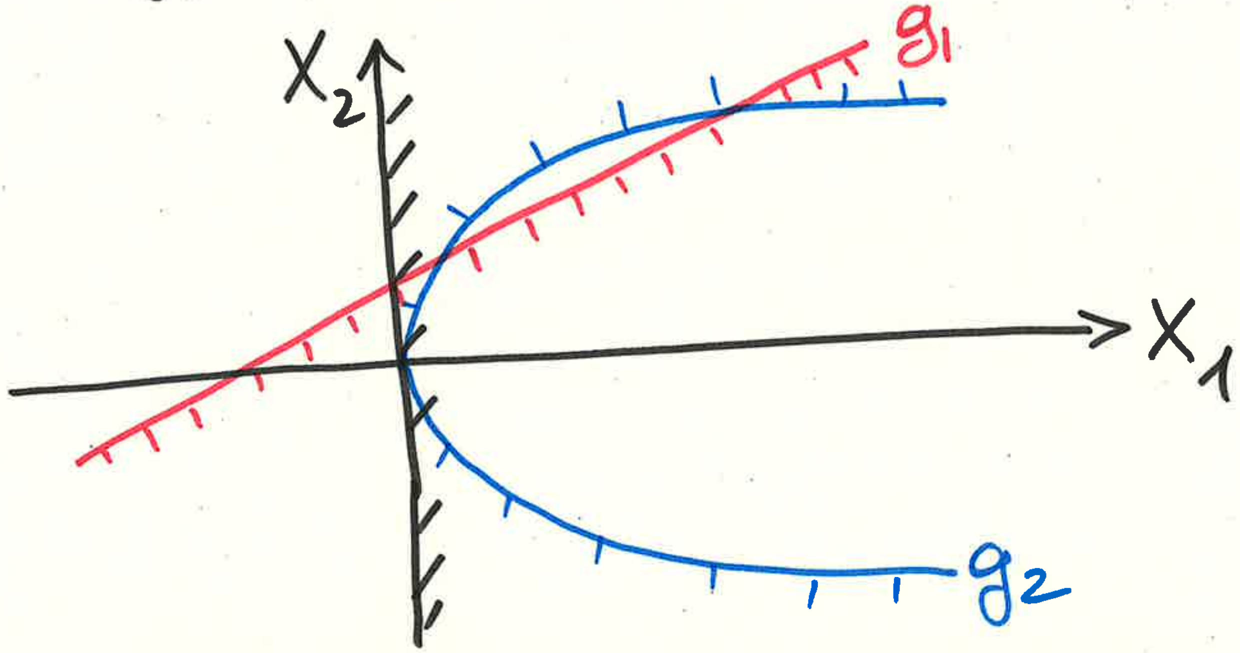
Pb. 2

$$\begin{aligned} &\min\ -x_1-x_2 \\ &g_1(\underline{x}) = 3+x_1-4x_2 \geq 0 \\ &g_2(\underline{x}) = -x_1+x_2^2 \geq 0 \\ &g_3(\underline{x}) = x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$n = 2$ VAR. $\quad m = 3$ vincoli

I GRADIENTI DEI 3 VINCOLI SONO

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



SOTTO ALLA RETTA g_1 E ESTERNA ALLA PARABOLA g_2 E $x_1 \geq 0$

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -x_1 - x_2 - \lambda_1(3 + x_1 - 4x_2) - \lambda_2(-x_1 + x_2^2) - x_1\lambda_3$$

COND. K.-T.

$$\begin{cases} -1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \; * \\ -1 + 4\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 = 0 \; * \\ 3 + x_1 - 4x_2 \geq 0 & * \; \lambda_1(3 + x_1 - 4x_2) = 0 \\ -x_1 + x_2^2 \geq 0 & * \; \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0 \\ x_1 \geq 0 & * \; \lambda_3 x_1 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

CASO 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$1^a \quad -1 - 0 + 0 - 0 = 0$ No!

$\Rightarrow$ NON $\exists$ SOLUZ.

vincolo attivo 1

CASO 2 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$1^a \quad -1 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 < 0$
No

vinc. attivo 2

CASO 3 $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} -1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2x_2\lambda_2 = 0 \\ -x_1 + x_2^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \longrightarrow f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$: \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vincolo att. 3°

CASO 4

MA $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\nexists$ punti che non soddisfano la cond. di qualif. dei vincoli attivi

CASO 5 $\lambda_3 = 0$ vincoli attivi 1 e 2

$\Rightarrow$ R.A. è data dai punti

$A=(1,1)$ e $B=(9,3)$

controllo la cond. di qualif. dei vincoli: $\nabla g_1(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ e

$\nabla g_2(A) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono vett. lin. ind.

$\Rightarrow$ vale la cond. di qual. dei vincoli attivi

$$\begin{cases} -1-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ -1+4\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

TROVO $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$

$A(1,1)$ PUÒ ESSERE UN MIN. R.

$f(1,1) = -2$

$\nabla g_1(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\nabla g_2(B) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

Sono vett. lin. ind. $\Rightarrow$ vale la cond. di qualif. dei vin. attivi

$\lambda_1 < 0$ ma $\lambda_2 < 0$ $\Rightarrow \nexists$ soluz.

$$\begin{cases} -1-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ -1+4\lambda_1-6\lambda_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2=\lambda_1+1 \\ -1+4\lambda_1-6(\lambda_1+1)=0 \end{cases}$$

$$-2\lambda_1-7=$$

$$\lambda_1=-\frac{7}{2}<0$$

$$\lambda_2=-\frac{7}{2}+1=-\frac{5}{2}<0$$

CASO 6 : $\lambda_2 = 0$ vinc. att. 1 e 3

$\Longrightarrow$ R.A. $C(0, \frac{3}{4})$

$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ lin. ind.

$\Longrightarrow$ vale cond. di qual. dei v. a.

$$\begin{cases} -1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -1 + 4\lambda_1 = 0 \\ \\ \lambda_1 = \frac{1}{4} \quad e \quad \lambda_3 = -\frac{5}{4} < 0 \quad \text{No!} \end{cases}$$

CASO 7 vin. att. 2 e 3 $\lambda_1 = 0$

R.A. $D(0,0)$

$\nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ l. dip.

$\Longrightarrow$ cond. di qual. dei v. attivi non è sodd. $\Rightarrow$ in $(0,0)$ non possiamo applicare K.T. non si può escludere che $D(0,0)$ sia min. rel.

CASO 8 TUTTI I 3 VINC. SONO attivi

$$\Longrightarrow R.A. = \phi$$

PERCIÒ I CANDIDATI AD ESSERE MIN. R. SONO $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ $(1,1)$ E $(0,0)$

DISP. EQ. DIFF. A VAR. SEP.

a) $y' = x^2 y$

b) $y y' = x$

c) $y' = \dfrac{x+x^2}{y-y^2}$

d) $y' = \dfrac{e^{x-y}}{1+e^x}$

e) $y' = x^2 y^2 - 4x^2$

FACCIO d)

$$y' = \frac{e^x \cdot e^{-y}}{1+e^x} \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\int e^y \, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$e^y = \ln|1+e^x| + c$$

$$y = \ln(\ln(1+e^x) + c)$$

FACCIO e)

$$y' = x^2y^2 - 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(y^2-4)$$

$$\int \frac{1}{y^2-4} dy = \int x^2 \, dx$$

$$\int \frac{1}{(y-2)(y+2)} dy = \frac{x^3}{3} + c$$

CERCO LE COSTANTI A E B

$$\frac{1}{(\;)(\;)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$$

$$1 = A(y+2) + B(y-2)$$

$$1 = Ay + 2A + By - 2B$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ -2B-2B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

SOLUZ. È

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \frac{4}{3}x^3 + c$$

E.D. I LIN. A COEFF. COST.

DISP. 0

b) $y' + y = e^x$

$y' + y = 0$

$y' = -y$

$y^*_{OM}(x) = Ke^{-x}$

$\overline{y}(x) = c\, e^x$

$\overline{y}' = c\, e^x$

$c\, e^x + c\, e^x = e^x$

$2c\, e^x = e^x$

$2c = 1 \quad c = \frac{1}{2}$

$y^*(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2} e^x$

a) $y' - 2y = 1$

c) $y' - 2y = x^2 + x$

d) $3y' + y = 2e^{-x}$

g) $y' + 2xy = x$

i) $y' + e^x y = 3e^x$

k) $y' + 2xy = x\, e^{-x^2}$

Pb di CAUCHY

b) $\begin{cases} y' - 2y = \cancel{\dfrac{e^{3x}}{(e^x+1)}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y' - 2y = 0$

$y^*_{OM}(x) = c\, e^{2x}$

$$\bar{y} = K e^{3x}$$

$$\bar{y}' = K e^{3x} \cdot 3$$

$$3K e^{3x} - 2K e^{3x} = e^{3x}$$

$$3K - 2K = 1$$

$$K = 1$$

$$\bar{y} = e^{3x}$$

$$y^*(x) = c e^{2x} + e^{3x}$$

$$y(0) = 0$$

$$c + 1 = 0$$

$$c = -1$$

$$y^*_c = -e^{2x} + e^{3x}$$

n° 7

$$\begin{cases} y' = 3y+1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' - 3y = 0$$

$$y^*_{OH}(x) = c\, e^{3x}$$

$$\overline{y}(x) = K$$

$$\overline{y}' = 0$$

$$0 - 3K = 1$$

$$K = -\frac{1}{3}$$

$$y^*(x) = c\, e^{3x} - \frac{1}{3}$$

$$y^*(0) = c - \frac{1}{3} = 2$$

$$c = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$