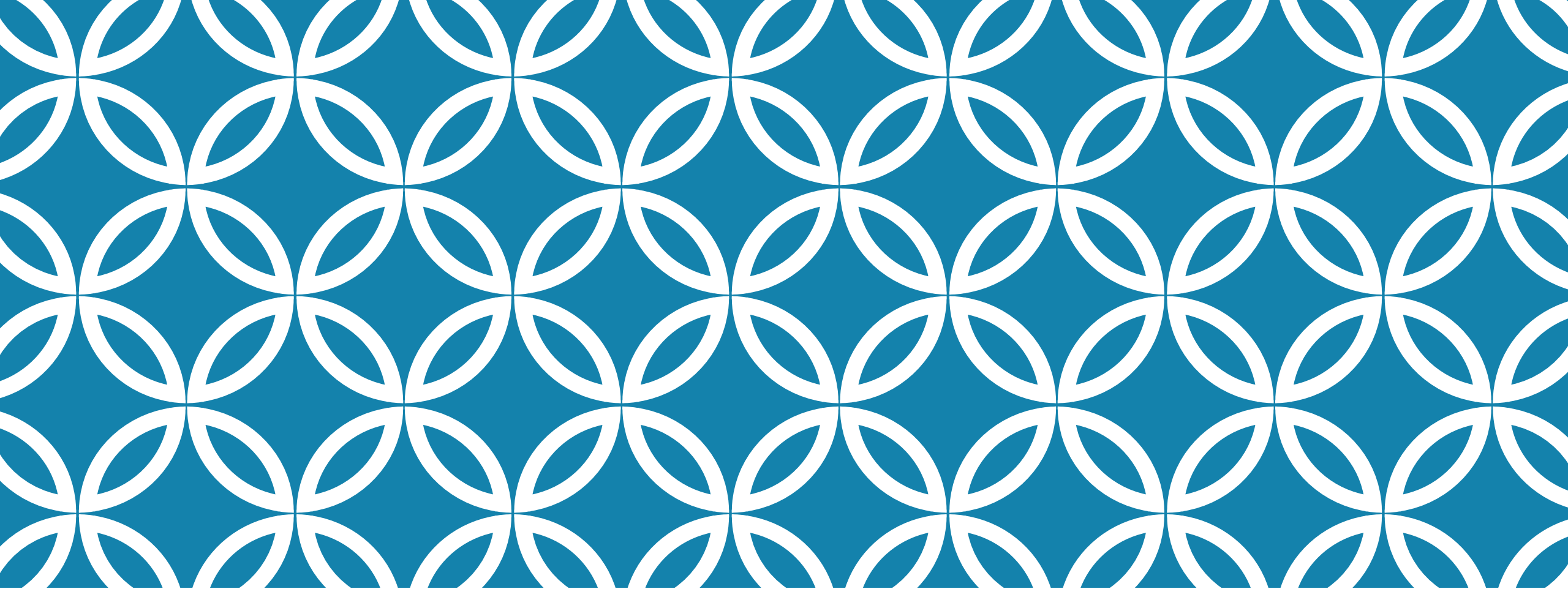




MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Lezione 7

Matematica Finanziaria

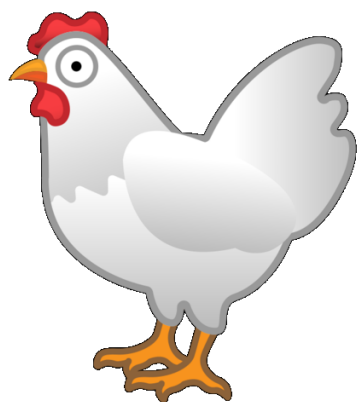
Sebastiano Vitali

RIFERIMENTO

Giacometti e Epis, Appunti di Matematica Finanziaria,
2017, Giappichelli



MEGLIO UNA GALLINA OGGI O UN UOVO DOMANI?

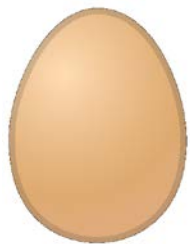


oggi

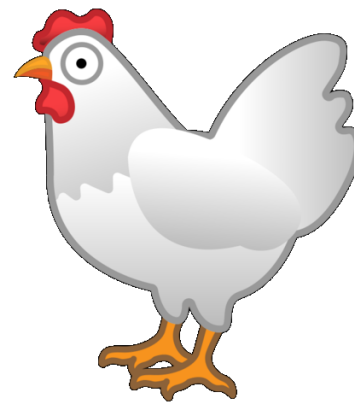


domani

MEGLIO UN UOVO OGGI O UNA GALLINA DOMANI?

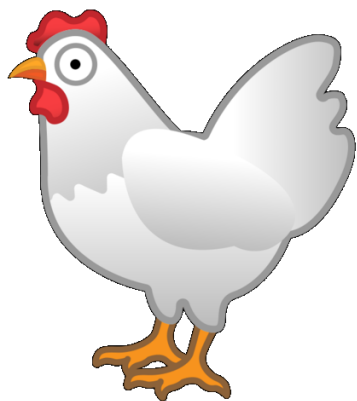


oggi

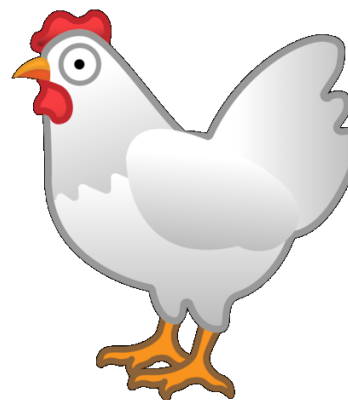


domani

MEGLIO UNA GALLINA OGGI O UNA GALLINA DOMANI?

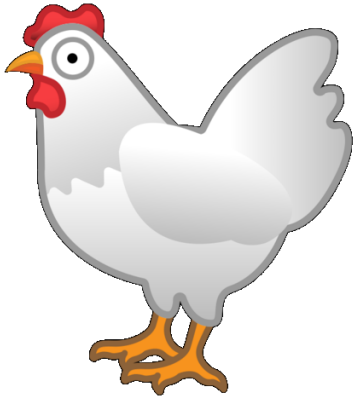


oggi

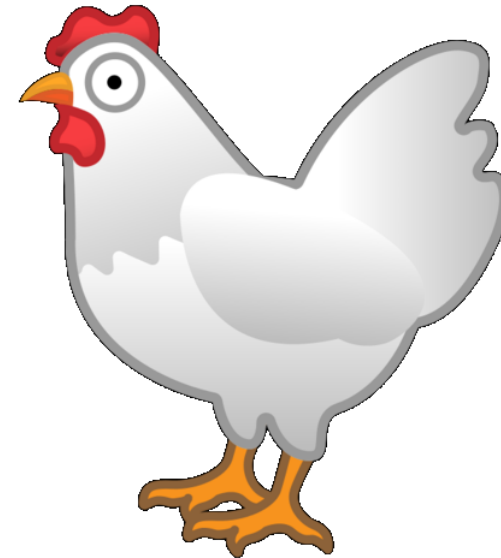


domani

MEGLIO UNA GALLINA OGGI O UNA GALLINA PIÙ GRANDE DOMANI?



oggi



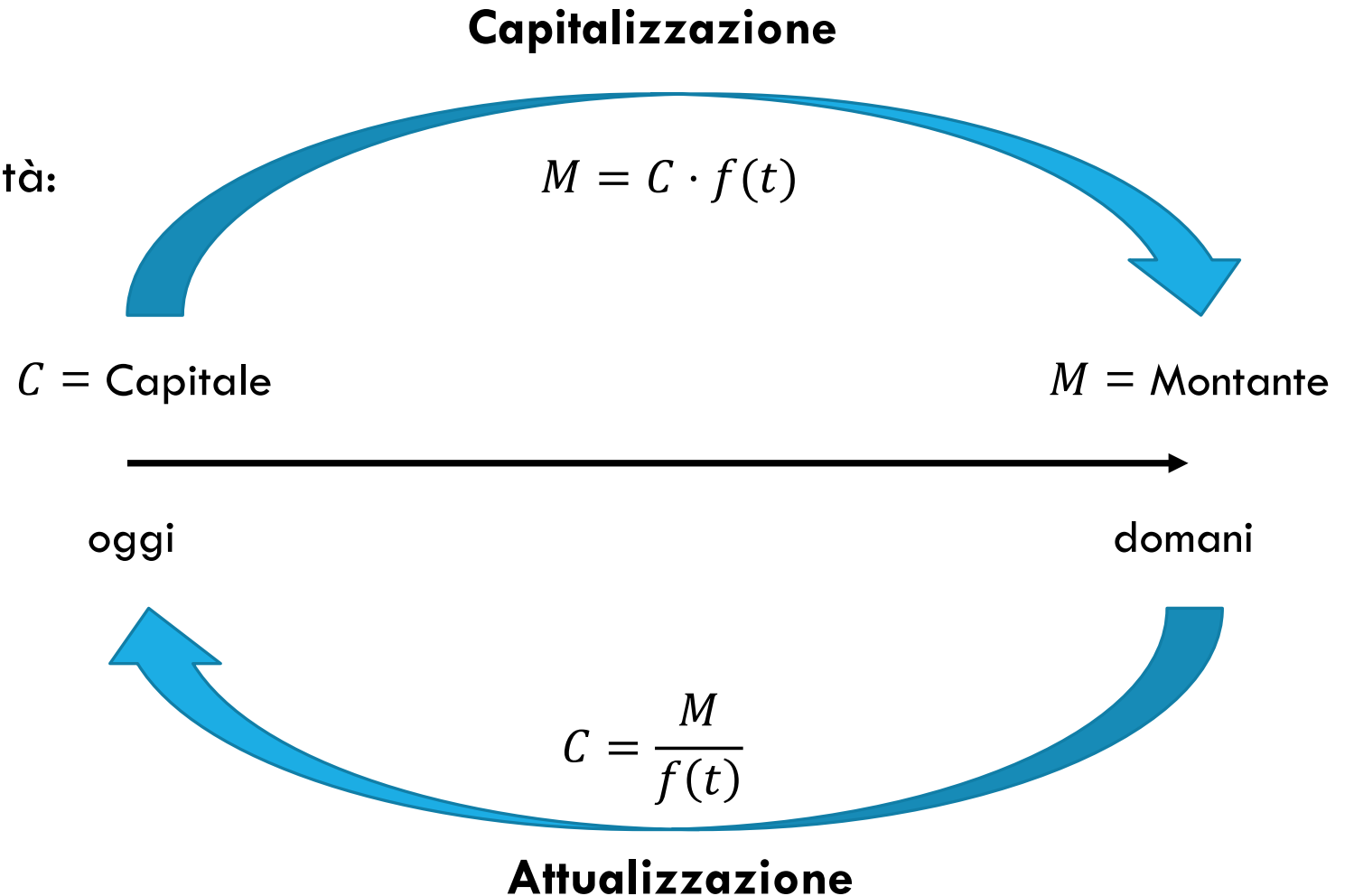
domani

IL CONCETTO DI EQUITÀ INTERTEMPORALE FINANZIARIA

$f(t)$ è il fattore di montante
e deve soddisfare le seguenti proprietà:

- $f(t)$ deve esistere $\forall t$
- $f(0) = 1$
- $f'(t) \geq 0$

Se $M = C \cdot f(t)$ allora si dice che M e C sono tra loro **equivalenti**,
quindi ogni agente (che riconosce
come valido il fattore $f(t)$) è
indifferente tra M e C



IL FATTORE DI MONTANTE E I REGIMI FINANZIARI

Il fattore di montante è una funzione del tempo, ma contiene anche il parametro i chiamato **tasso d'interesse**. Il tasso d'interesse è **indissolubilmente** legato al periodo temporale su cui è espresso.

La «forma» del fattore di montante $f(t)$ definisce il **regime finanziario** con cui si opera.

Studiamo quattro «forme» e quindi quattro regimi finanziari:

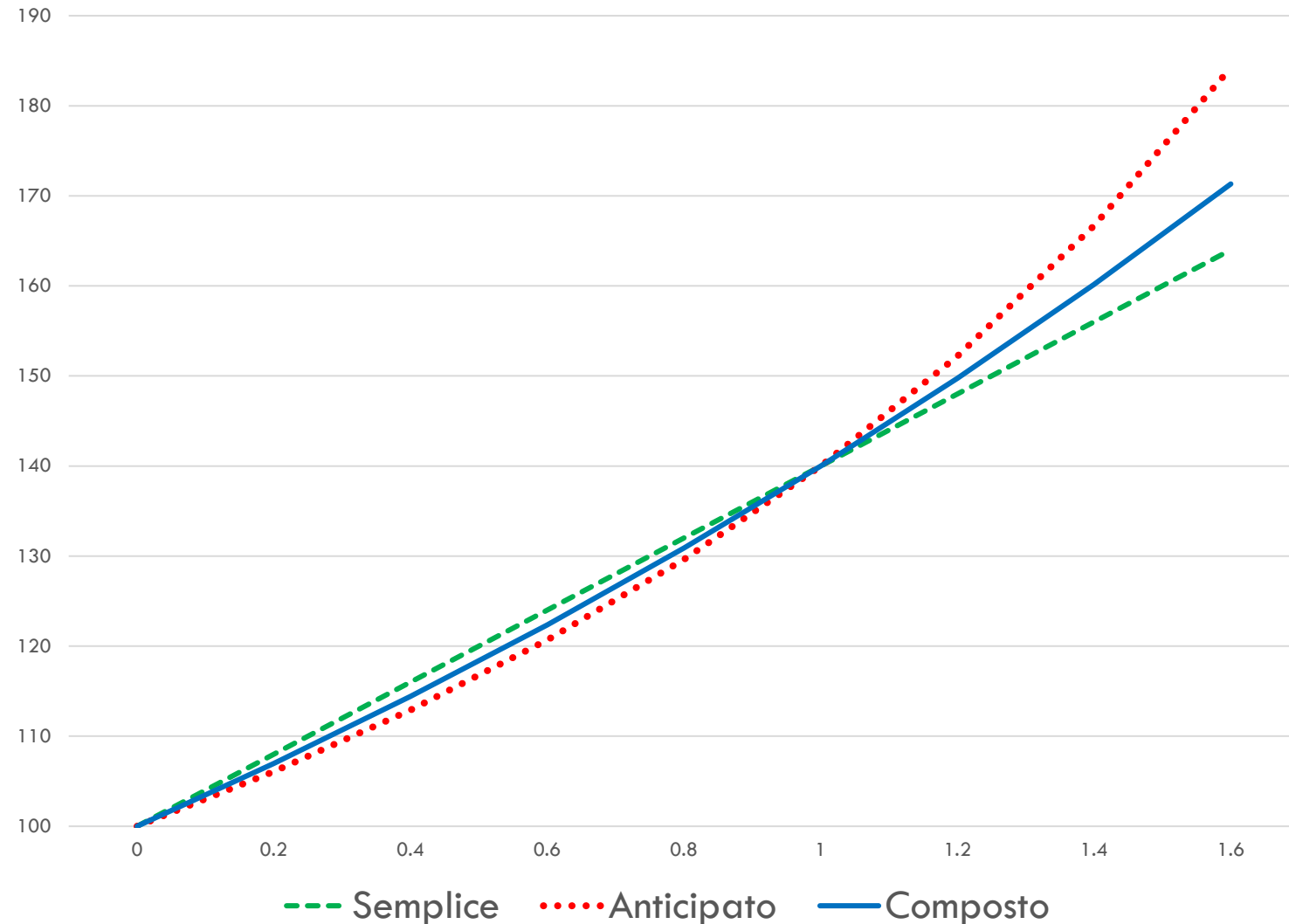
- $f(t) = (1 + i \cdot t)$ Regime **semplice**
- $f(t) = \frac{1}{(1-i \cdot t)}$ Regime **anticipato**
- $f(t) = (1 + i)^t$ Regime **composto discreto** (Regime **composto**)
- $f(t) = e^{i \cdot t}$ Regime **composto continuo** (Regime **continuo**)

IL FATTORE DI MONTANTE E I REGIMI FINANZIARI

- $f(t) = (1 + i \cdot t)$ Regime **semplice**
- $f(t) = \frac{1}{(1-d \cdot t)}$ Regime **anticipato**
- $f(t) = (1 + i)^t$ Regime **composto**
- $f(t) = e^{\delta \cdot t}$ Regime **continuo**

I regimi sono equivalenti quando
 $t = 1$ se:

- $d = 1 - \frac{1}{1+i}$
- $\delta = \ln(1 + i)$



ESERCIZIO

- $f(t) = (1 + i \cdot t)$ Regime **semplice**
- $f(t) = \frac{1}{(1-d \cdot t)}$ Regime **anticipato**
- $f(t) = (1 + i)^t$ Regime **composto**
- $f(t) = e^{\delta \cdot t}$ Regime **continuo**

Dato un capitale iniziale di $C = 70\text{€}$, determinare con un tasso d'interesse **annuo** $i = 4\%$ (e i suoi equivalenti d, δ) il montante M dopo 6 mesi, 1 anno, 1 anno e 5 mesi.

Dato un capitale iniziale di $C = 80\text{€}$, determinare con un tasso d'interesse **mensile** $i = 3\%$ (e i suoi equivalenti d, δ) il montante M dopo 6 mesi, 1 anno, 1 anno e 5 mesi.

TASSI EQUIVALENTI

Per comodità, scriviamo il fattore di montante come se anche il tasso di interesse fosse una variabile (finora l'abbiamo ipotizzato costante). Quindi abbiamo $f(t) \rightarrow f(i, t)$.

Si dice **tasso d'interesse equivalente** a un dato tasso d'interesse i , quel tasso i^* tale che verifica la seguente uguaglianza

$$f(i, t) = f(i^*, t)$$

In altre parole, il tasso d'interesse equivalente i^* è quel tasso che, dato uno stesso capitale, produce lo stesso montante perché produce un fattore di montante uguale a quello determinato dal tasso i .

ESERCIZIO

- $f(t) = (1 + i \cdot t)$ Regime **semplice**
- $f(t) = \frac{1}{(1-i \cdot t)}$ Regime **anticipato**
- $f(t) = (1 + i)^t$ Regime **composto**
- $f(t) = e^{i \cdot t}$ Regime **continuo**

Dato un tasso annuo del 3%, quanto vale il tasso equivalente mensile in regime semplice?

Dato un tasso quadrimestrale del 2%, quanto vale il tasso equivalente semestrale in regime composto?

Dato un tasso trimestrale del 4%, quanto vale il tasso equivalente bimestrale in regime continuo?

VALORE ATTUALE DI UN'OPERAZIONE FINANZIARIA

Un'operazione finanziaria è una **sequenza di flussi di cassa** su istanti temporali futuri.

Il **valore attuale** di un'operazione finanziaria è la somma dei valori attuali dei flussi di cassa che la compongono.

Chiamato C il vettore dei flussi di cassa (con componenti C_{t_k}) e chiamato T il vettore degli istanti temporali (con componenti t_k), il valore attuale VA si calcola con la formula:

$$VA = \sum_{k=1}^n C_{t_k} \cdot \frac{1}{f(t_k)}$$

Esempio. Un'operazione finanziaria è caratterizzata dai flussi $C = [30€ \ 50€ \ 120€]$ ai seguenti istanti temporali (in anni) $T = [2 \ 5 \ 9]$. Calcolare il valore attuale in capitalizzazione composta con tasso d'interesse annuo $i = 3\%$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} VA &= C_{t_1} \cdot \frac{1}{f(t_1)} + C_{t_2} \cdot \frac{1}{f(t_2)} + C_{t_3} \cdot \frac{1}{f(t_3)} = 30 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^2} + 50 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^5} + 120 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^9} \\ &= 163.38 \end{aligned}$$

OPERAZIONE FINANZIARIA EQUA E PREZZO

Un'operazione finanziaria è detta **equa** se il suo valore attuale è zero. Cioè se i flussi negativi sono finanziariamente equivalenti ai flussi positivi.

Solitamente, le operazioni finanziarie prevedono un pagamento iniziale e poi l'incasso di flussi positivi. In questo caso l'operazione è equa se il pagamento iniziale è equivalente al valore attuale dei flussi futuri. Il pagamento iniziale che rende equa l'operazione è detto **prezzo**.

Esempio. Riprendiamo l'esempio precedente. Il valore attuale dei flussi era 163.38. Pertanto, il prezzo di questa operazione è 163.38€. Infatti, l'operazione finanziaria caratterizzata dai flussi $C = [-163.38€ \ 30€ \ 50€ \ 120€]$ negli istanti temporali (in anni) $T = [0 \ 2 \ 5 \ 9]$, ha come valore attuale:

$$\begin{aligned} VA &= C_{t_0} \cdot \frac{1}{f(t_0)} + C_{t_1} \cdot \frac{1}{f(t_1)} + C_{t_2} \cdot \frac{1}{f(t_2)} + C_{t_3} \cdot \frac{1}{f(t_3)} = \\ &= -163.38 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^0} + 30 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^2} + 50 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^5} + 120 \cdot \frac{1}{(1 + 0.03)^9} = 0 \end{aligned}$$

CONFRONTO TRA OPERAZIONI FINANZIARIE: REA E TIR

Il **valore attuale** di un'operazione finanziaria è anche chiamato *REA* (**Risultato Economico Attualizzato**) o *VAN* (**Valore Attuale Netto**) o *NPV* (**Net Present Value**).

$$REA = \sum_{k=1}^n C_{t_k} \cdot \frac{1}{f(i, t_k)}$$

Due operazioni finanziarie si possono confrontare calcolando e comparando i loro *REA*.

Il tasso di interesse che rende equa un'operazione finanziaria è detto *TIR* (**Tasso Interno di Rendimento**) o *IRR* (**Internal Rate of Return**).

$$i^{TIR}: \sum_{k=1}^n C_{t_k} \cdot \frac{1}{f(i^{TIR}, t_k)} = 0$$

Due operazioni finanziarie si possono confrontare calcolando e comparando i loro *TIR*.

ESERCIZIO

Date le operazioni finanziarie:

- $C^A = [-20€ \ 10€ \ 17€]$, $T^A = [0 \ 1 \ 2]$
- $C^B = [-33€ \ 17€ \ 22€]$, $T^B = [0 \ 1 \ 3]$

Utilizzando il tasso di interesse $i = 3\%$ e la capitalizzazione continua, confrontarli utilizzando i loro REA .

$$REA^A = VA^A = -20 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 0}} + 10 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 1}} + 17 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 2}} = 5.71$$

$$REA^B = VA^B = -33 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 0}} + 17 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 1}} + 22 \cdot \frac{1}{e^{0.03 \cdot 3}} = 3.60$$

L'operazione A è più conveniente dal punto di vista del REA .

ESERCIZIO

Date le operazioni finanziarie:

- $C^A = [-20€ \ 10€ \ 17€]$, $T^A = [0 \ 1 \ 2]$
- $C^B = [-33€ \ 17€ \ 22€]$, $T^B = [0 \ 1 \ 3]$

Determinare il loro TIR e usarli per confrontare le due operazioni.

$$i^{TIR} \text{ di A: } -20 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 0}} + 10 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 1}} + 17 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad i^{TIR} = 18.668\%$$
$$i^{TIR} \text{ di B: } -33 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 0}} + 17 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 1}} + 22 \cdot \frac{1}{e^{i^{TIR} \cdot 3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad i^{TIR} = 7.998\%$$

L'operazione A è più conveniente dal punto di vista del TIR .

OSSERVAZIONI SUI METODI DI VALUTAZIONE

REA

- Pro
 - Facile da calcolare
- Contro
 - Soggettivo (dipende da i)

TIR

- Pro
 - Oggettivo
- Contro
 - Difficile da calcolare (equazione da risolvere con metodi numerici)
 - Non sempre esiste e non sempre è unico

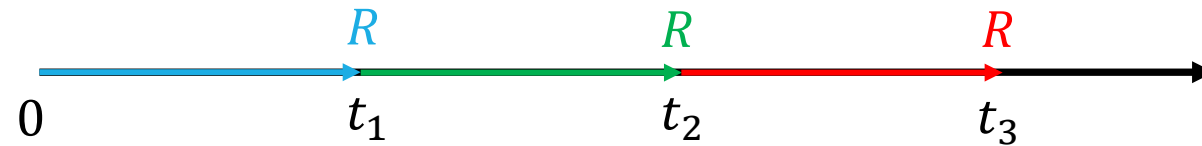
Può capitare che i due metodi diano valutazioni diverse indicando come «migliori» operazioni finanziarie differenti.

E allora... quale uso?

Entrambi!

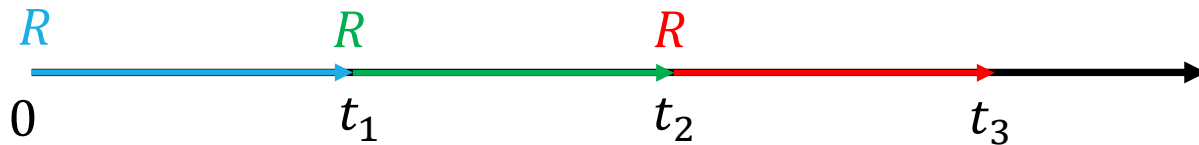
RENDITE

Una rendita è una sequenza di flussi di cassa di pari importo R che maturano in un certo periodo e che si manifestano a intervalli temporali regolari

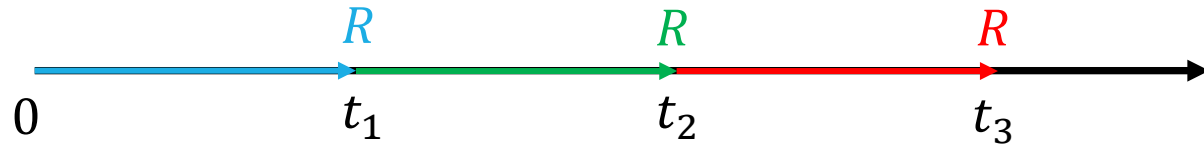


Le rendite sono definite in base alla struttura dei pagamenti:

- **Posticipate:** Se la rata è pagata al termine del periodo di maturazione (come fig sopra)
- **Anticipate:** Se la rata è pagata all'inizio del periodo di maturazione
- **Temporanee:** Se la rendita è composta da un numero finito di rate
- **Illimitate:** Se la rendita non ha termine, quindi le rate sono infinite



RENDITE



La valutazione di una rendita si basa sul concetto di REA: si attualizzano tutti i flussi di cassa.
Grazie alle regolarità che caratterizzano le rendite, si possono utilizzare delle formule compatte:

- Posticipata – Temporanea $V = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
- Posticipata – Illimitata $V = R \frac{1}{i}$
- Anticipata – Temporanea $V = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)$
- Anticipata – Illimitata $V = R \frac{1}{i} (1+i)$

Per la valutazione del **montate** della rendita, si capitalizza il valore attuale fino al termine dell'ultimo periodo di maturazione (ovviamente solo per rendite temporanee).

Esempi ...

AMMORTAMENTI

Gli ammortamenti sono dei piani di pagamento di un debito.

Immaginiamo di dover ripagare un debito D_0 , ad un tasso periodale i , e di doverlo fare in T periodi.

Tempo	Rata (R)	Quota Capitale (C)	Quota Interessi (I)	Debito Residuo (D)
0	0	0	0	D_0
1	Dipende dal tipo di ammortamento ma in generale deve valere che $R_k = C_k + I_k$	Dipende dal tipo di ammortamento ma in generale deve valere che $C_k = R_k - I_k$	$I_1 = D_0 \cdot i$	$D_1 = D_0 - C_1$
:			:	:
k			$I_k = D_{k-1} \cdot i$	$D_k = D_{k-1} - C_k$
:			:	:
T			$I_T = D_{T-1} \cdot i$	$D_T = D_{T-1} - C_T = 0$

Gli interessi si calcolano sempre sul debito residuo precedente

Condizione di chiusura
il debito è ripagato

AMMORTAMENTI – TIPOLOGIE

Introduciamo due tipologie di ammortamenti: italiano e francese.

italiano

Tempo	Rata (R)	Quota Capitale (C)	Quota Interessi (I)	Debito Residuo (D)
0	0	0	0	D_0
1	$C_1 + I_1$	D_0/T	$D_0 \cdot i$	$D_0 - C_1$
$\vdots$				
k	$C_k + I_k$	D_0/T	$D_{k-1} \cdot i$	$D_{k-1} - C_k$
$\vdots$				
T	$C_T + I_T$	D_0/T	$D_{T-1} \cdot i$	0

Quote Capitale costanti
tutto il resto ne consegue

francese

Tempo	Rata (R)	Quota Capitale (C)	Quota Interessi (I)	Debito Residuo (D)
0	0	0	0	D_0
1	$D_0/\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R_1 - I_1$	$D_0 \cdot i$	$D_0 - C_1$
$\vdots$				
k	$D_0/\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R_k - I_k$	$D_{k-1} \cdot i$	$D_{k-1} - C_k$
$\vdots$				
T	$D_0/\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R_T - I_T$	$D_{T-1} \cdot i$	0

Rate costanti
tutto il resto ne consegue

Esempi ...



FINE DEL CORSO