UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Sistemi elettrici: linee, valori relativi e flussi di potenza

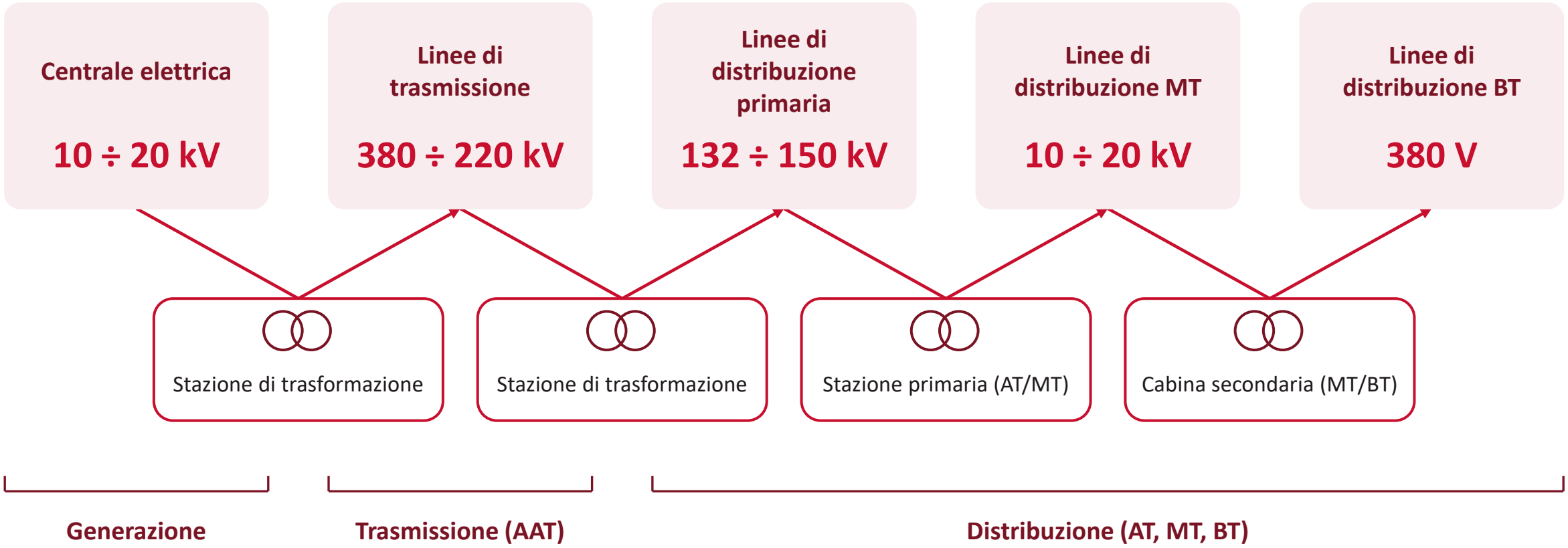
Struttura del sistema elettrico · Modelli di linea · Metodo per unità · Matrice delle ammettenze nodali

01

Il sistema elettrico

Struttura, componenti principali, rete di trasmissione e rete di distribuzione

Struttura del sistema elettrico



La tensione viene elevata in uscita dalle centrali per la trasmissione a grande distanza e poi ridotta per gradi, attraverso stazioni e cabine, fino ai livelli di utilizzo.

Struttura del sistema elettrico: principali componenti

1 **Centrali elettriche**

2 **Linee di trasmissione in Alta/Altissima Tensione**
Collegano le centrali elettriche alle stazioni elettriche e le stazioni elettriche fra loro

3 **Stazioni ricevitrici**
Vicine ai principali centri di carico (grandi città o distretti industriali); la tensione è convertita a valori compatibili con la subtrasmissione

4 **Linee di distribuzione in Alta Tensione (subtrasmissione)**
Collegano grandi industrie e stazioni primarie alla rete di trasmissione AT/AAT

5 **Stazioni primarie**
Dove l'elettricità è convertita da AT a MT

6 **Linee di distribuzione in Media Tensione**
Collegano le stazioni primarie alle cabine secondarie e agli utenti MT

7 **Cabine secondarie**
Dove l'elettricità è convertita da MT a BT

8 **Rete di distribuzione in Bassa Tensione**
Si diparte dalle cabine secondarie e collega gli utenti BT

produzione e trasmissione

trasformazione e distribuzione

La rete elettrica: trasmissione vs distribuzione

Rete di trasmissione AAT, AT

- Tipicamente ha una struttura **magliata**
- Maggiore affidabilità e resilienza
- Maggiori problematiche di pianificazione e controllo
- Maggiori costi
- Tutti i soggetti coinvolti (Terna, utenti) condividono responsabilità nella gestione della rete (ad es. la rete, per funzionare, fa affidamento sui grandi generatori)

VS

Rete di distribuzione MT, BT

- È esercita in modo **radiale**
- Minore affidabilità
- Maggiore facilità di esercizio, protezione e pianificazione
- Minori costi
- Maggiore facilità di attribuzione dei costi e delle responsabilità (gli operatori gestiscono la rete; gli utenti la utilizzano)

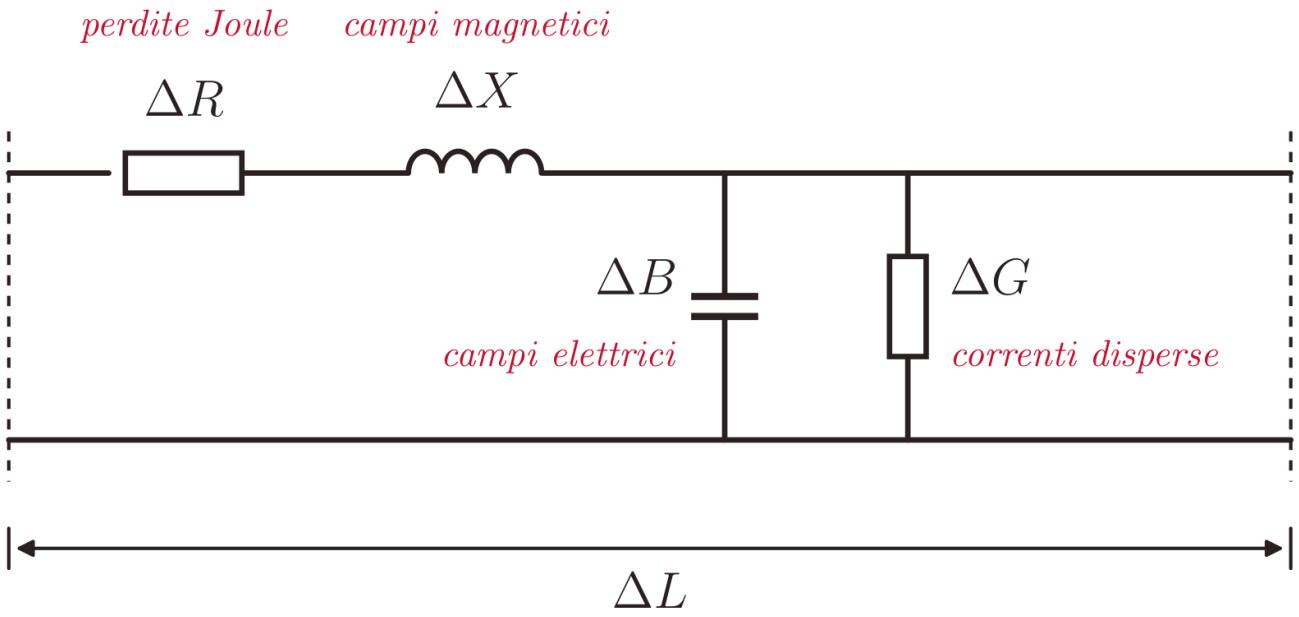
02

Modellizzazione delle linee elettriche

Dai parametri distribuiti ai modelli a parametri concentrati

Linee elettriche: parametri distribuiti

Il circuito equivalente relativo a un tratto di linea di lunghezza infinitesima ΔL può essere schematizzato come:



Circuito a parametri distribuiti

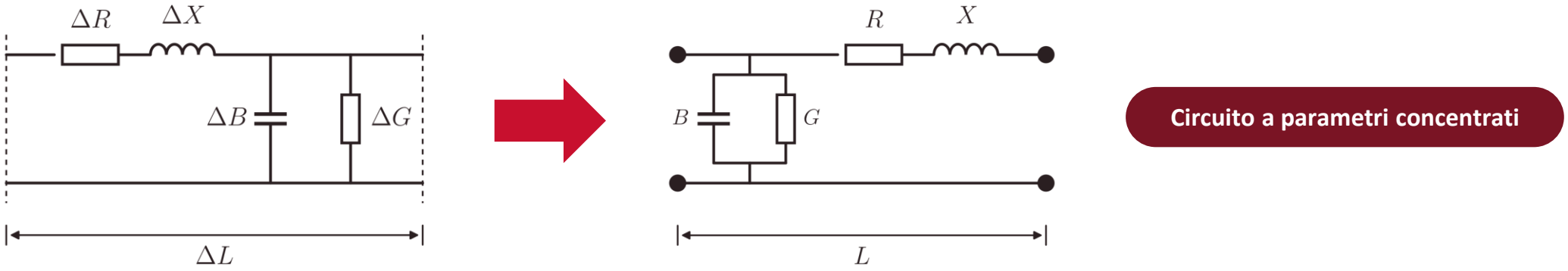
ΔR, ΔX, ΔB e ΔG sono i parametri **longitudinali** (serie) e **trasversali** (derivati) del tratto di linea.

Sistema simmetrico ed equilibrato ⇒ si studia il **circuito equivalente monofase**.

Per schematizzare l'intera linea occorrerebbe collegare in cascata tanti doppi bipoli quanti sono i tratti elementari (infiniti): si otterrebbe un circuito equivalente **eccessivamente complicato** e di scarsa utilità pratica.

Linee elettriche: parametri concentrati

Per ridurne la complessità si passa dalla rappresentazione a parametri distribuiti a quella **a parametri concentrati**: le costanti elettriche della linea sono concentrate in un solo punto (o in un numero limitato di punti).



Circuito a parametri concentrati

Parametri riferiti alla lunghezza complessiva di linea *L*:

$$R\ [\Omega] \qquad X\ [\Omega] \qquad B\ [\mathrm{S}] \qquad G\ [\mathrm{S}]$$

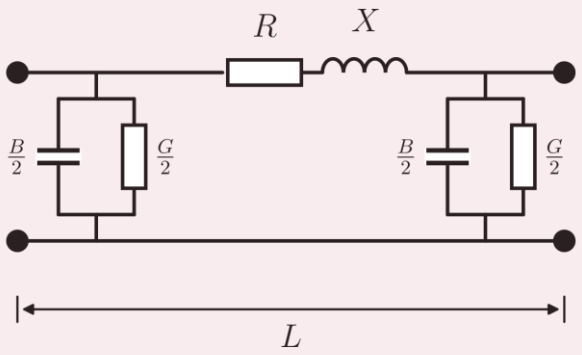
Parametri relativi a una lunghezza unitaria (1 km):

$$r = \frac{R}{L}\left[\frac{\Omega}{\mathrm{km}}\right] \qquad x = \frac{X}{L}\left[\frac{\Omega}{\mathrm{km}}\right] \qquad b = \frac{B}{L}\left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{km}}\right] \qquad g = \frac{G}{L}\left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{km}}\right]$$

Parametri concentrati: modelli di linea tipici

È possibile adottare differenti modellizzazioni a parametri concentrati, con **diversi compromessi tra complessità e accuratezza** del modello.

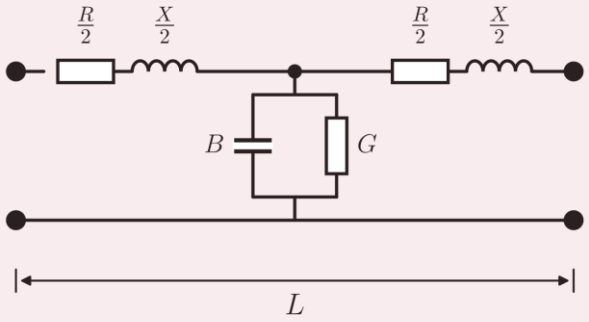
Modello a π



Il più utilizzato

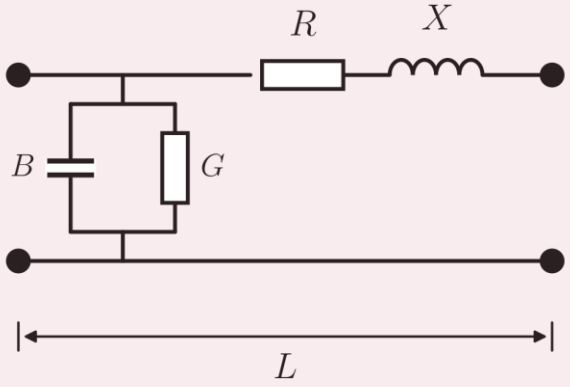
Meno approssimato, più complesso del modello a Γ

Modello a T



Meno approssimato, più complesso del modello a Γ

Modello a Γ



Più approssimato, ma più semplice

03

Il metodo dei valori relativi (per unit, p.u.)

Grandezze di base, trasformatori e sistemi trifase

Valori assoluti e valori relativi

La conoscenza del valore fisico (assoluto) di una grandezza, ad esempio il modulo della corrente assorbita da un apparecchio, è in genere un elemento di **non immediata interpretazione**.

È più significativo il suo **valore relativo**, calcolato sulla base dei dati di targa dell'apparecchio.



Nell'esempio si assume P_n = 100 kW: il tratto in giallo è il sovraccarico (20 %).

Esempio

Un motore che eroga **120 kW** può essere in sovraccarico o meno a seconda della sua potenza nominale.

1,2 p.u.

della potenza nominale, cioè il 120 % di P_n: un'informazione immediata sulle condizioni di funzionamento della macchina.

Grandezze di base

In una **rete elettrica monofase** priva di trasformatori, sia α l'insieme delle grandezze, scalari e vettoriali, della rete (*E*, *I*, *A*, *Z*, *Y*).

Si definisce inoltre un sistema di grandezze scalari β (le cosiddette **«grandezze di base»**):

$$\{\beta\} \equiv \{E_b,\ I_b,\ A_b,\ Z_b,\ Y_b\}$$

β è un **insieme coerente**:

$$A_b = E_b\, I_b \qquad Z_b = \frac{E_b}{I_b} \qquad Y_b = \frac{1}{Z_b}$$

Per definire univocamente β è **necessario e sufficiente fissare due grandezze** (ad es. E_b e I_b, oppure E_b e A_b).

I valori relativi

Esprimere una grandezza dell'insieme α in **valore relativo** rispetto alla base β, cioè in «per unità» (p.u.), significa determinare il **rapporto** tra tale grandezza e la corrispondente grandezza omogenea appartenente a β.

$$\dot{\bar{E}}_i = \frac{\bar{E}_i}{E_b} \qquad \dot{\bar{I}}_i = \frac{\bar{I}_i}{I_b} \qquad \dot{\bar{Z}}_i = \frac{\bar{Z}_i}{Z_b}$$

$$\dot{\bar{A}}_i = \frac{\bar{A}_i}{A_b} \qquad \dot{P}_i = \frac{P_i}{A_b} \qquad \dot{Q}_i = \frac{Q_i}{A_b}$$

Il punto sopra il simbolo indica la grandezza espressa in p.u.

Operativamente: scelta delle basi

Si fissano una **potenza base** A_b e una **tensione base** E_b. Le altre grandezze di base, in funzione di queste due, sono:

$$I_b = \frac{A_b}{E_b} \qquad Z_b = \frac{E_b}{I_b} = \frac{E_b^2}{A_b} \qquad Y_b = \frac{1}{Z_b} = \frac{A_b}{E_b^2}$$

Di conseguenza:

$$\dot{\bar{E}}_i = \frac{\bar{E}_i}{E_b} \qquad \dot{\bar{I}}_i = \frac{\bar{I}_i}{A_b} E_b \qquad \dot{\bar{Z}}_i = \frac{\bar{Z}_i A_b}{E_b^2}$$

$$\dot{\bar{A}}_i = \frac{\bar{A}_i}{A_b} \qquad \dot{P}_i = \frac{P_i}{A_b} \qquad \dot{Q}_i = \frac{Q_i}{A_b}$$

Relazioni tra grandezze

Le grandezze in p.u. sono **adimensionali**: hanno modulo diverso da quello delle corrispondenti di α, ma **argomento identico**.

Se β è coerente, le relazioni esistenti tra le grandezze fisiche sussistono anche tra le corrispondenti grandezze in p.u.

Ad esempio, se è $\bar{Z}_i = \dfrac{\bar{E}_i}{\bar{I}_i}$ è anche $\dot{\bar{Z}}_i = \dfrac{\bar{Z}_i}{Z_b} = \dfrac{\bar{E}_i}{\bar{I}_i} \cdot \dfrac{I_b}{E_b} = \dfrac{\dot{\bar{E}}_i}{\dot{\bar{I}}_i}$

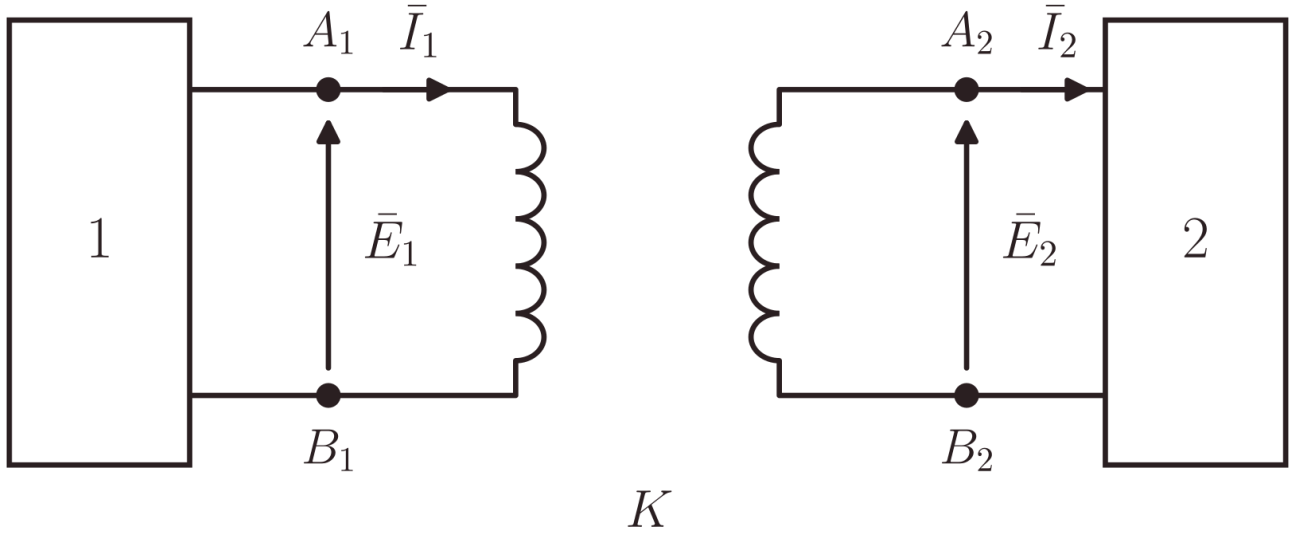
Le leggi di Kirchhoff (LKC e LKT) valgono anche in p.u.:

$$\sum_j \frac{\bar{I}_j}{I_b} = \sum_j \dot{\bar{I}}_j = 0 \qquad \sum_k \frac{\bar{E}_k}{E_b} = \sum_k \dot{\bar{E}}_k = 0$$

I trasformatori

Il vantaggio del metodo consiste anche nella **semplificazione dei calcoli** effettuati su reti con trasformatori.

Si consideri un sistema costituito da due reti, 1 e 2, a differenti livelli di tensione nominale, E_{n1} e E_{n2}, connesse da un trasformatore ideale di rapporto $K = E_{n1}/E_{n2}$.



I trasformatori: tensioni e correnti di base

Risulta, per la presenza del trasformatore ideale:

$$\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2} = K = \frac{E_{n1}}{E_{n2}} \qquad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{1}{K} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}$$

Si assumano due tensioni di base E_{1b} e E_{2b} tali che:

$$\frac{E_{1b}}{E_{2b}} = K$$

Fissando una potenza di base A_b, risultano le correnti di base I_{1b} e I_{2b}:

$$I_{1b} = \frac{A_b}{E_{1b}} \qquad I_{2b} = \frac{A_b}{E_{2b}}$$

I trasformatori: rapporto di trasformazione in p.u.

Per come sono state scelte le grandezze di base si ha che:

$$\frac{\dot{\bar{E}}_1}{\dot{\bar{E}}_2} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2}\frac{E_{2b}}{E_{1b}} = \frac{K}{K} = 1$$

$$\frac{\dot{\bar{I}}_1}{\dot{\bar{I}}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\frac{I_{2b}}{I_{1b}} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\frac{E_{1b}}{E_{2b}}\frac{A_b}{A_b} = \frac{K}{K} = 1$$

Il rapporto $\dot{E}_1/\dot{E}_2$ corrisponde alla definizione di **rapporto di trasformazione in «per unità»**:

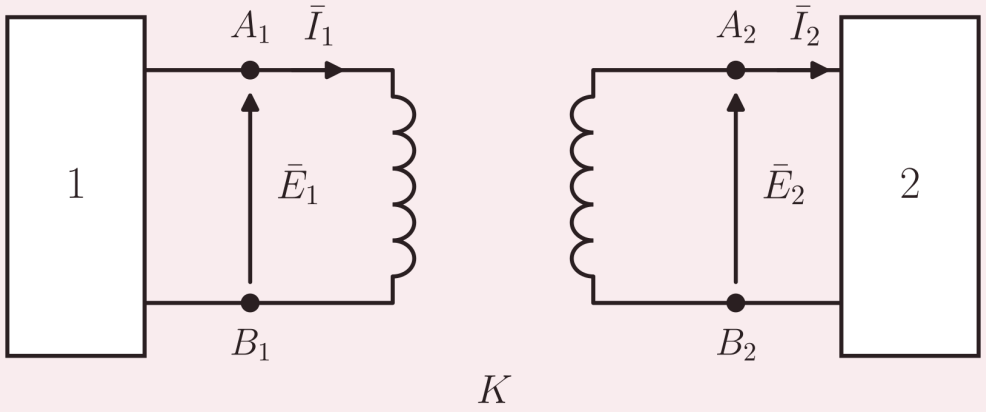
$$\dot{K} = \frac{\dot{\bar{E}}_1}{\dot{\bar{E}}_2} = \frac{\dot{\bar{I}}_1}{\dot{\bar{I}}_2} = 1$$

Quindi, in «per unità»:

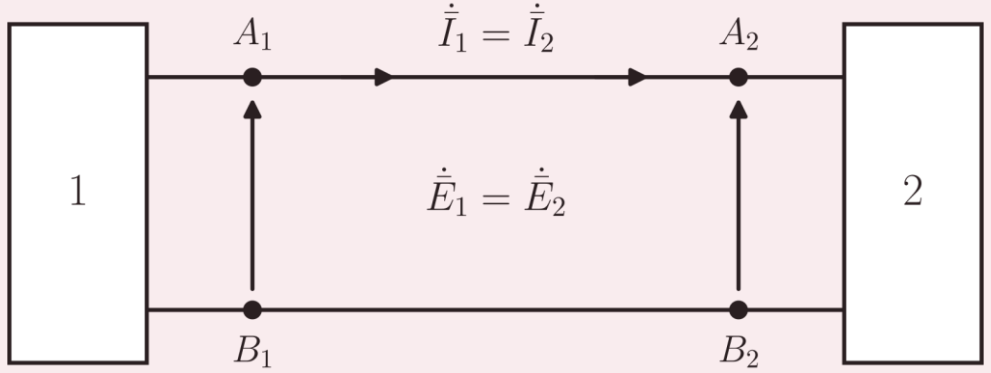
$$\dot{\bar{E}}_1 = \dot{\bar{E}}_2 \qquad \dot{\bar{I}}_1 = \dot{\bar{I}}_2$$

I trasformatori: valori fisici vs valori relativi

In valori fisici:



In «per unità» è come se il trasformatore (ideale) non vi fosse:

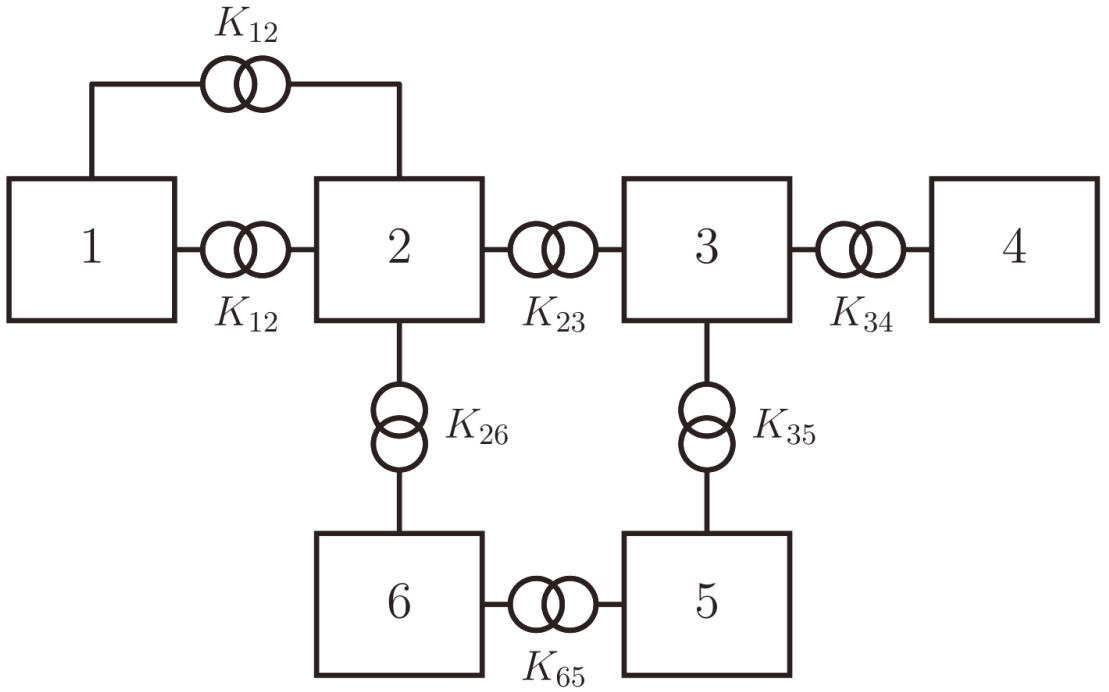


Reti con più trasformatori

Il metodo è applicabile anche quando si ha una rete con più trasformatori.

In questo caso si fissa una **«potenza base» unica** per tutta la rete e la tensione di base per la rete 1, E_{1b}.

Le altre tensioni, E_{2b}, E_{3b}, E_{4b}, ecc., vengono determinate dalle relazioni:



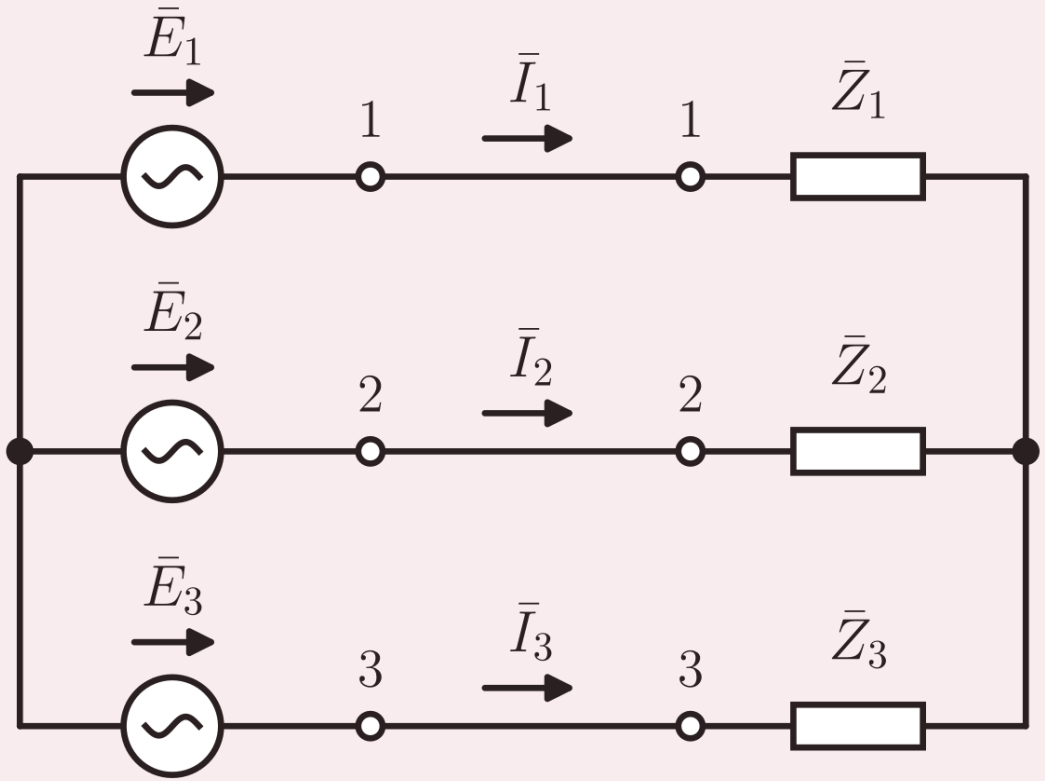
$$\frac{E_{1b}}{E_{2b}} = K_{12} \qquad \frac{E_{2b}}{E_{6b}} = K_{26} \qquad \frac{E_{6b}}{E_{5b}} = K_{65} \qquad \dots$$

Sistemi trifase

Il metodo si estende facilmente ai sistemi trifase.

Si fissano in generale una **tensione concatenata di base** V_b e una **potenza di base (trifase)** A_b.

Se la rete è simmetrica ed equilibrata, si può studiare tramite il suo **sistema equivalente monofase** (dopo aver trasformato le eventuali impedenze a triangolo nelle stelle equivalenti).



Sistemi trifase: grandezze di base

Nella trasformazione in p.u. del sistema monofase equivalente conviene assumere come grandezze di base una tensione «di fase» $E_b = V_b/\sqrt{3}$ e una potenza «di fase» $A_{fb} = A_b/3$.

$$I_b = \frac{A_{fb}}{E_b} = \frac{A_b/3}{V_b/\sqrt{3}} = \frac{A_b}{\sqrt{3}\,V_b} \qquad Z_b = \frac{E_b}{I_b} = \frac{V_b/\sqrt{3}}{I_b} = \frac{V_b^2}{A_b} \qquad Y_b = \frac{A_b}{V_b^2}$$

Ciò permette di determinare I_b, Z_b e Y_b a partire da V_b e A_b:

$$\dot{\bar{E}}_i = \frac{\bar{E}_i}{E_b} = \frac{\bar{E}_i}{V_b/\sqrt{3}} \qquad \dot{\bar{I}}_i = \frac{\bar{I}_i}{I_b} = \frac{\bar{I}_i\sqrt{3}\,V_b}{A_b} \qquad \dot{\bar{Z}}_i = \frac{\bar{Z}_i}{Z_b} = \frac{\bar{Z}_i\,A_b}{V_b^2}$$

Sistemi trifase: calcoli in p.u.

La trasformazione in p.u. consente di svolgere i calcoli trifase con gli **stessi formalismi (stesse equazioni) del caso monofase**. Ad esempio, per calcolare una potenza complessa a partire da tensione e corrente:

1 **Si passa in p.u.**

$$\dot{\bar{E}}_i = \frac{\bar{E}_i}{E_b} = \frac{\bar{E}_i}{V_b/\sqrt{3}} \qquad \dot{\bar{I}}_i = \frac{\bar{I}_i}{I_b} = \frac{\bar{I}_i \sqrt{3}\, V_b}{A_b}$$

2 **Si svolgono i calcoli in p.u.**

$$\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{E}} \cdot \underline{\dot{I}} = \frac{\bar{E}}{V_b/\sqrt{3}} \cdot \frac{\underline{I}\sqrt{3}\, V_b}{A_b} = \frac{3\,\bar{E} \cdot \underline{I}}{A_b} = \frac{\bar{A}}{A_b}$$

3 **Si torna in valori fisici**

$$\bar{A} = \dot{\bar{A}} \cdot A_b = \frac{\bar{A}}{A_b} \cdot A_b$$

Con i p.u. (in monofase) si ottiene **lo stesso risultato** che si otterrebbe tramite il calcolo trifase in valori fisici.

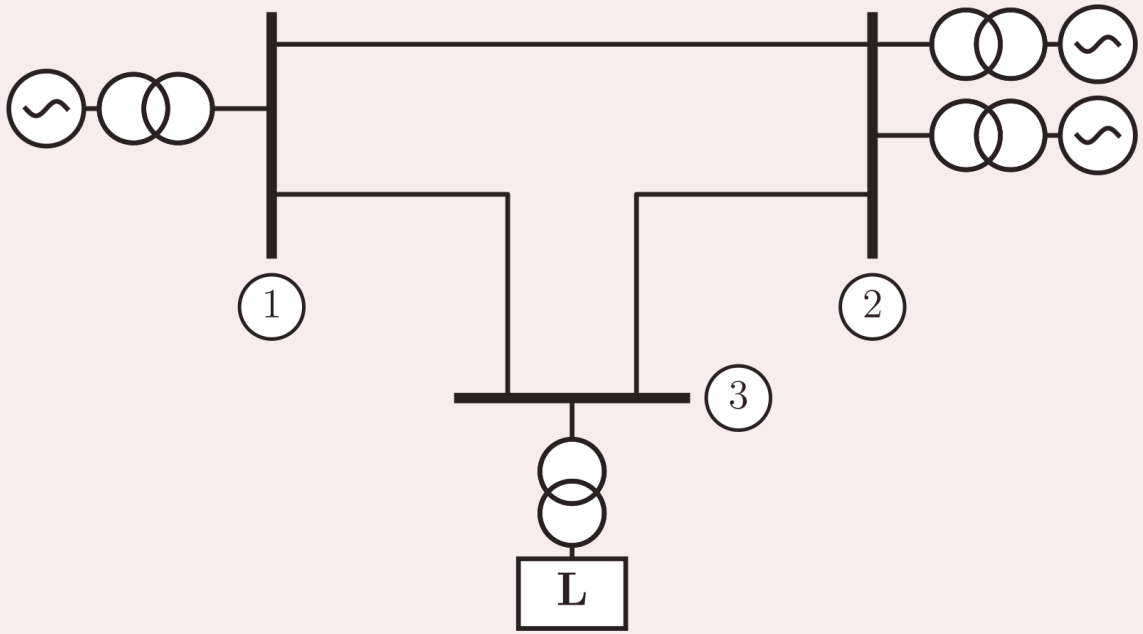
04

Modelli per lo studio dei flussi di potenza

Grafo della rete, matrice di incidenza e matrice delle ammettenze nodali

Esempio #1: un sistema a tre nodi

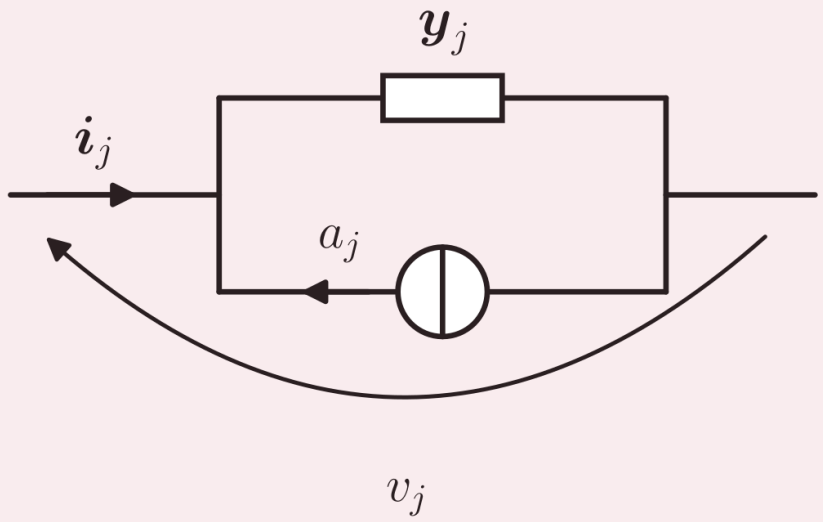
- Si studi il sistema elettrico in figura: una centrale al nodo 1, due centrali al nodo 2 e un carico (L) alimentato dal nodo 3
- Per semplicità, si assume di poter **trascurare le perdite nei trasformatori**
- Si individuano **3 nodi** (sbarre), a partire dai quali si può rappresentare il **grafo** corrispondente



Modello generale di ramo

Si definiscono:

- $[\bar{V}]$: vettore delle tensioni di nodo rispetto al riferimento (nodo 0)
- $[\bar{v}]$: vettore delle tensioni ai capi dei rami
- $[\bar{y}]$: matrice diagonale delle ammettenze di ramo
- $[\bar{a}]$: vettore delle correnti impresse nei rami

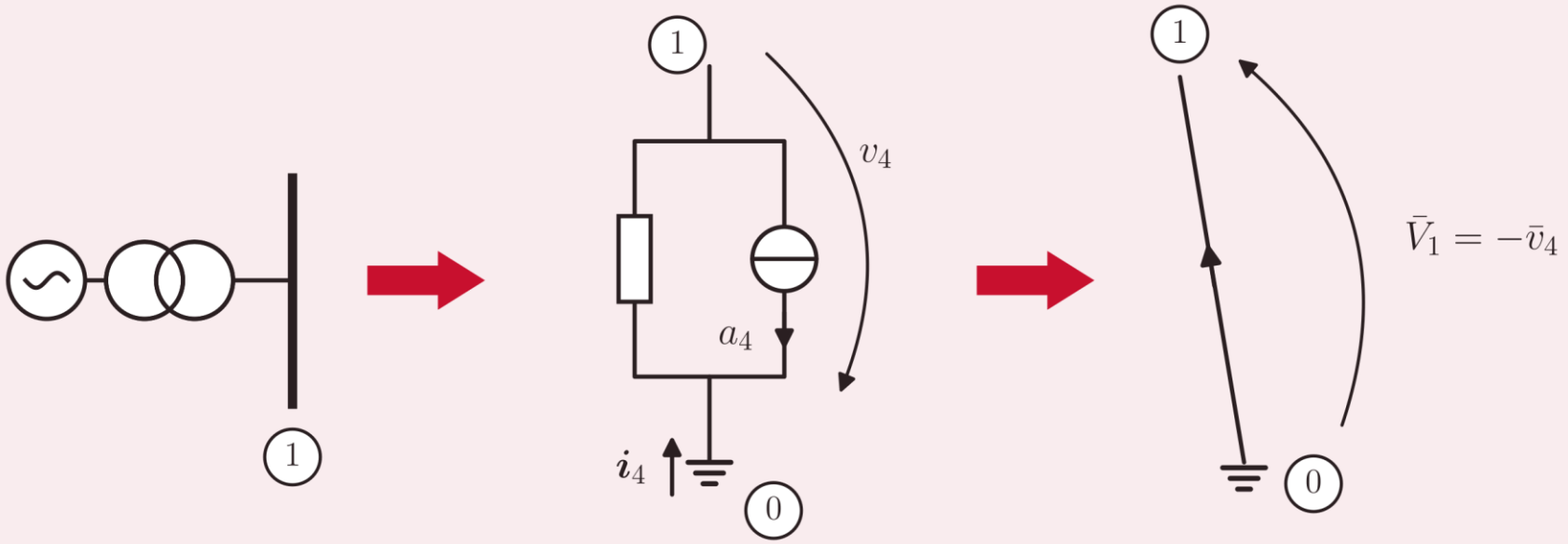


La relazione tra queste grandezze è:

$$[\bar{\imath}] + [\bar{a}] = [\bar{y}]\,[\bar{v}]$$

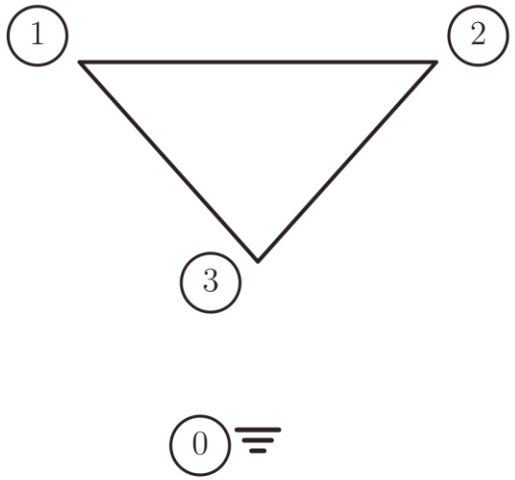
Equivalente dei rami attivi (generatori, carichi)

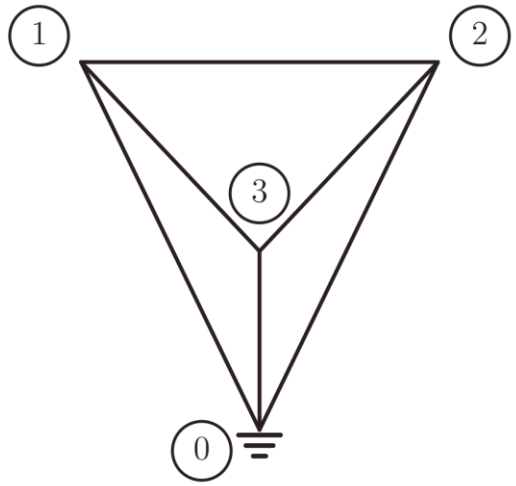
Si consideri ad esempio il nodo 1: si numera **arbitrariamente** come #4 il ramo che modella la generazione e gli si assegna un verso **arbitrario** (per convenzione, lo stesso della corrente di ramo i_4). Si ottiene (grandezze complesse):



Esempio #1 (segue): grafo della rete

Per il sistema a tre nodi dell'esempio #1 si possono adottare **diversi grafi**, ad esempio:



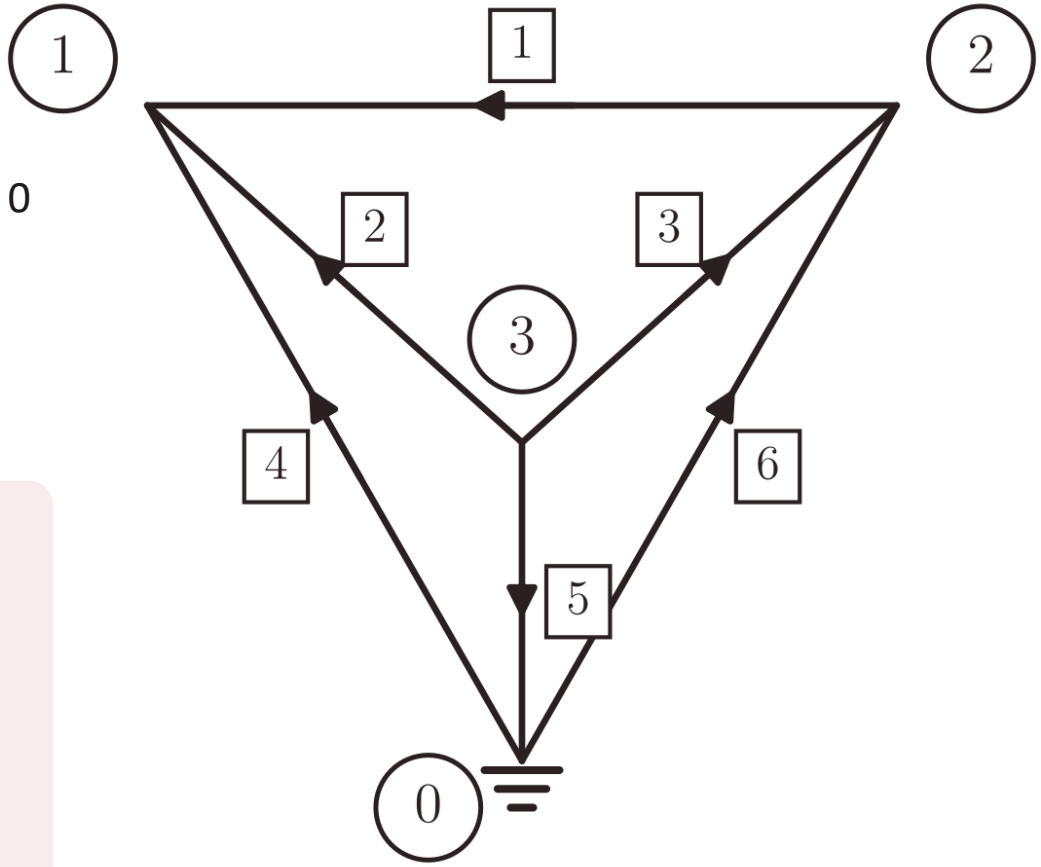


Grafo **non connesso**: il nodo di terra non è collegato.

Considerando i rami derivati dell'**equivalente di Norton**, le **capacità di linea** o le **ammettenze derivate** dei trasformatori, la stessa rete è rappresentata da un grafo **connesso**.

Matrice di incidenza [A]

- Per grafi orientati, la topologia è descritta dalla **matrice di incidenza** $[A]_{n\times l}$
- Ogni nodo e ogni ramo vanno numerati e orientati **arbitrariamente**
- Il verso dei rami coincide con quello della corrente i_k
- $[A]$ ha n righe e l colonne; qui $n = 4$, incluso il nodo di terra (riferimento) 0

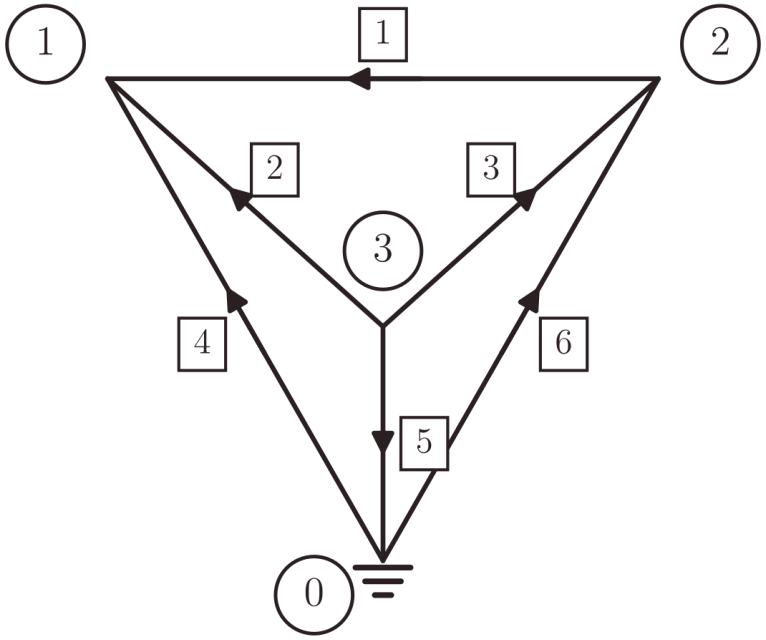


L'elemento A_{ij} vale:

- **0** se il ramo j non è connesso al nodo i
- **+1** se il ramo j **esce** dal nodo i
- **−1** se il ramo j **entra** nel nodo i

Matrice di incidenza ridotta

$$[A] = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} \text{nodo 1} \\ \text{nodo 2} \\ \text{nodo 3} \\ \\ \text{nodo 0} \end{matrix}$$



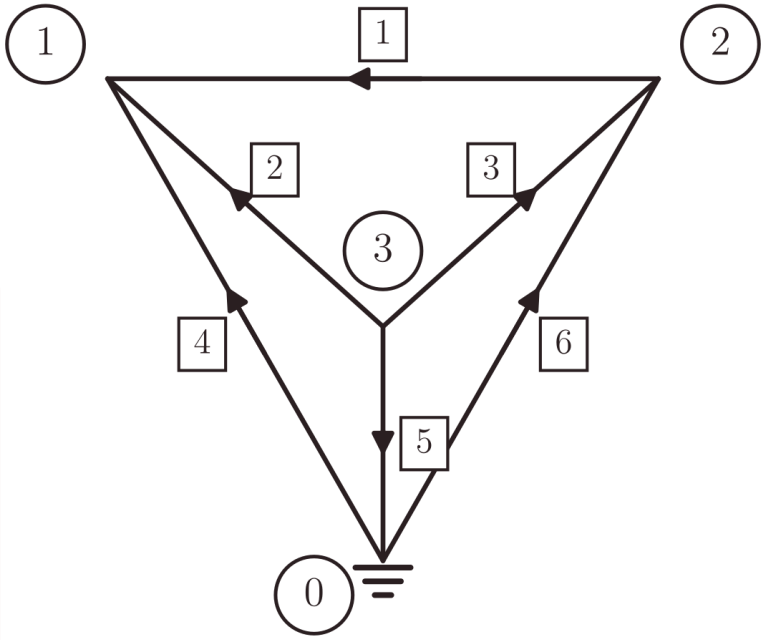
L'ultima riga, relativa al nodo di riferimento, di solito **non viene considerata** (matrice di incidenza **ridotta**): si può ricavare dagli altri elementi di [*A*], poiché ogni colonna deve contenere un +1 e un −1.

Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

Si definisce il vettore delle **correnti di ramo** (con il verso dato dall'orientamento del grafo):

$$[\bar{\imath}] = \begin{bmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 & \cdots & \bar{\imath}_l \end{bmatrix}^T$$

$$[A]\,[\bar{\imath}] = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{\imath}_1 \\ \bar{\imath}_2 \\ \bar{\imath}_3 \\ \bar{\imath}_4 \\ \bar{\imath}_5 \\ \bar{\imath}_6 \end{bmatrix} = 0$$



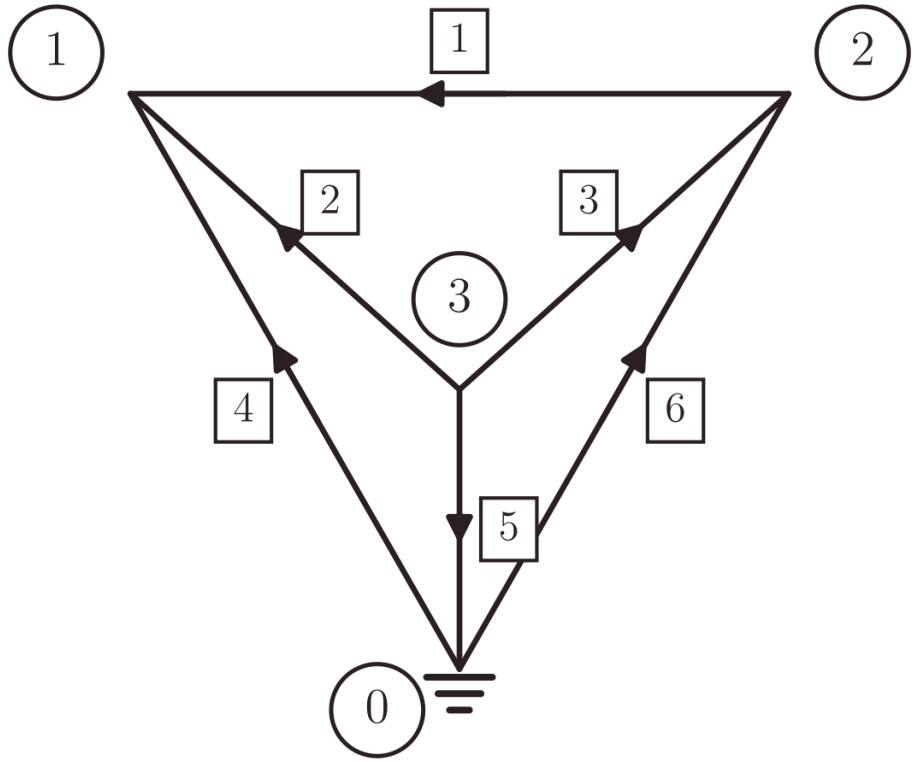
- Con la matrice di incidenza **completa**, l'ultima equazione si ricava dalle altre (è linearmente dipendente)
- D'ora in poi si utilizza la matrice di incidenza **ridotta**

Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

Con la matrice [*A*] ridotta, la LKT sulla rete si scrive:

$$[A]^T [\bar{V}] = [\bar{v}]$$

$$[A]^T [\bar{V}] = \begin{bmatrix} -\bar{V}_1 + \bar{V}_2 \\ -\bar{V}_1 + \bar{V}_3 \\ -\bar{V}_2 + \bar{V}_3 \\ -\bar{V}_1 \\ \bar{V}_3 \\ -\bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \\ \bar{v}_6 \end{bmatrix}$$



Equazioni della rete: legge di Ohm

L'equazione relativa ai rami è:

$$[\bar{\imath}] + [\bar{a}] = [\bar{y}]\,[\bar{v}]$$

Moltiplicando per [*A*] (LKC):

$$\underbrace{[A]\,[\bar{\imath}]}_{=0} + [A]\,[\bar{a}] = [A]\,[\bar{y}]\,[\bar{v}]$$

Sostituendo $[\bar{v}] = [A]^T[\bar{V}]$:

$$[A]\,[\bar{a}] = [A]\,[\bar{y}]\,[A]^T\,[\bar{V}]$$

$$[\bar{y}] = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{y}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{y}_6 \end{bmatrix}$$

$$[A]\,[\bar{a}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{a}_4 \\ \bar{a}_5 \\ \bar{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_4 \\ -\bar{a}_6 \\ \bar{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene infine:

$$[\bar{I}] = [\bar{Y}]\,[\bar{V}]$$

dove $[\bar{Y}]$ è per definizione la **matrice delle ammettenze nodali** e $[\bar{I}]$ il vettore delle **correnti nodali** iniettate nei nodi.

Matrice delle ammettenze nodali: esempio

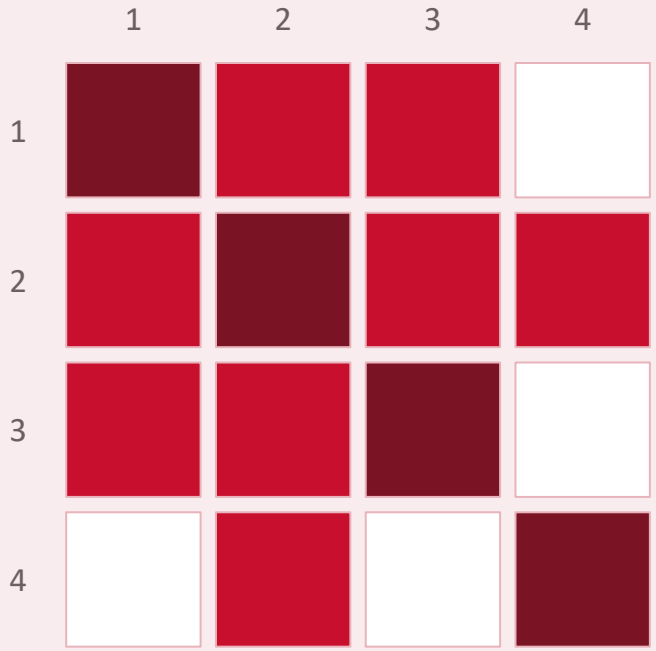
$$[A]\,[\,\bar{y}\,]\,[A]^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{y}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{y}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\,\bar{Y}\,] = [A]\,[\,\bar{y}\,]\,[A]^T = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_4 & -\bar{y}_1 & -\bar{y}_2 \\ -\bar{y}_1 & \bar{y}_1 + \bar{y}_3 + \bar{y}_6 & -\bar{y}_3 \\ -\bar{y}_2 & -\bar{y}_3 & \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_5 \end{bmatrix}$$

- Permette lo studio del sistema elettrico in **diverse condizioni di funzionamento**
- La matrice delle ammettenze nodali si **costruisce facilmente** e si **modifica facilmente** quando avvengono cambiamenti topologici

Forma generale di [Y]

- I termini diagonali Y_{ii} (**autoammettenze**) sono pari alla somma delle ammettenze di tutti i rami incidenti nel nodo *i*
- I termini fuori diagonale Y_{ij} sono pari all'opposto della somma delle ammettenze dei rami che collegano **direttamente** i nodi *i* e *j*
- Nei sistemi di grandi dimensioni [*Y*] è una **matrice sparsa** (la maggior parte degli elementi è nulla): un grande vantaggio sia per la memoria sia per i tempi di calcolo
- I termini derivati, come nel modello di linea a π, influenzano **solo i termini diagonali**



Struttura di [*Y*] per la rete a 4 nodi dell'esempio: in rosso scuro i termini diagonali, in rosso i termini fuori diagonale non nulli, in bianco gli zeri.

Matrice delle ammettenze nodali [Y]

- Il primo passo nella soluzione del load flow è costruire la cosiddetta **matrice delle ammettenze nodali**, spesso indicata con [*Y*] o [Y_{bus}]
- Essa fornisce le relazioni tra tutte le **correnti iniettate nei nodi** e le **tensioni di nodo**:

$$[\bar{I}] = [\bar{Y}][\bar{V}]$$

Se si considerassero tutti i nodi, **incluso quello di riferimento**, [*Y*] sarebbe **singolare** e non sarebbe invertibile.

[*Y*] è una matrice **simmetrica**.

Significato fisico degli elementi di [Y]

Data l'espressione degli elementi di [*Y*]:

$$\bar{I}_p = \sum_{q=1}^{n} \bar{Y}_{pq}\, \bar{V}_q$$

si può osservare che:

$$\bar{Y}_{pq} = \bar{I}_p \Big|_{\substack{\bar{V}_q = 1 \\ \bar{V}_{k \neq q} = 0}}$$

Si può quindi costruire [*Y*] **per colonne**: collegando il nodo *q* a un generatore ideale di tensione da 1 p.u. e cortocircuitando a terra tutti gli altri nodi, si determinano «fisicamente» tutti gli elementi della colonna *q* calcolando le correnti iniettate in tutti i nodi.

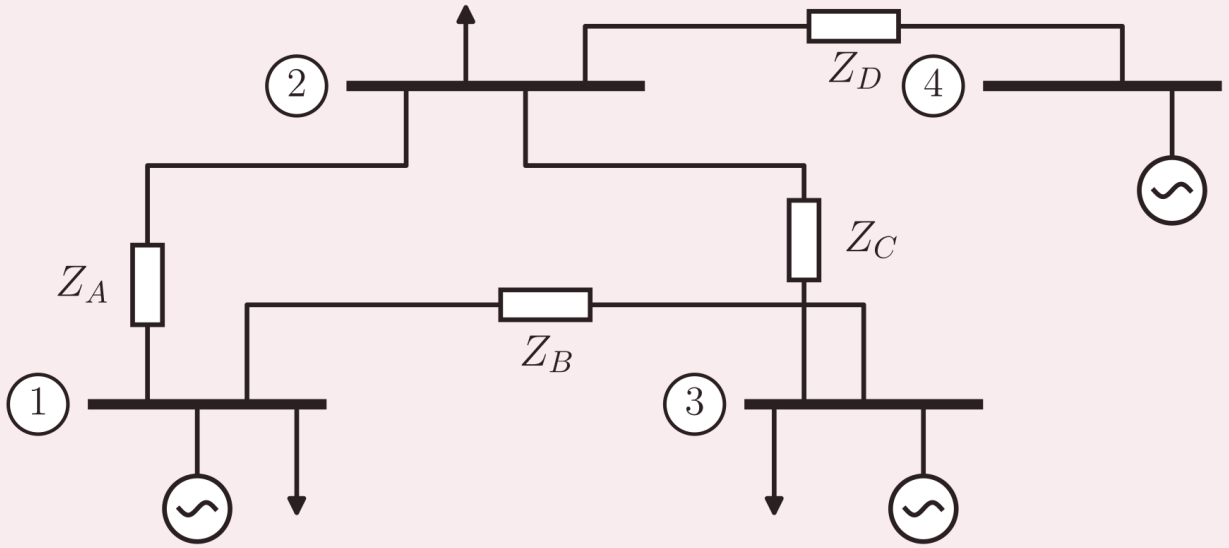
Lo stesso vale per la sua inversa, la matrice [*Z*].

[Y]: esempio

Si determini la matrice delle ammettenze nodali della rete in figura, assumendo che la corrente netta iniettata in ciascun nodo *i* sia

$$\bar{I}_i = \bar{I}_{Gi} - \bar{I}_{Di}$$

dove I_{Gi} è la corrente iniettata nel nodo dal generatore e I_{Di} la corrente assorbita dal carico.



[Y]: esempio, equazioni ai nodi

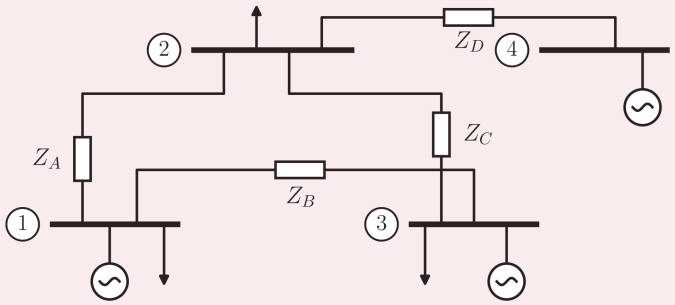
Per la LKC al nodo 1:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{G1} - \bar{I}_{D1}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} + \bar{I}_{13} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_3}{\bar{Z}_B}$$

$$\bar{I}_1 = (\bar{V}_1 - \bar{V}_2)\,\bar{Y}_A + (\bar{V}_1 - \bar{V}_3)\,\bar{Y}_B \qquad \text{con} \quad \bar{Y}_j = \frac{1}{\bar{Z}_j}$$

$$\bar{I}_1 = (\bar{Y}_A + \bar{Y}_B)\,\bar{V}_1 + (-\bar{Y}_A)\,\bar{V}_2 + (-\bar{Y}_B)\,\bar{V}_3$$



Analogamente al nodo 2 (attenzione al segno dell'iniezione: al nodo 2 c'è solo il carico):

$$\bar{I}_2 = -\bar{I}_{D2} = \bar{I}_{21} + \bar{I}_{23} + \bar{I}_{24}$$

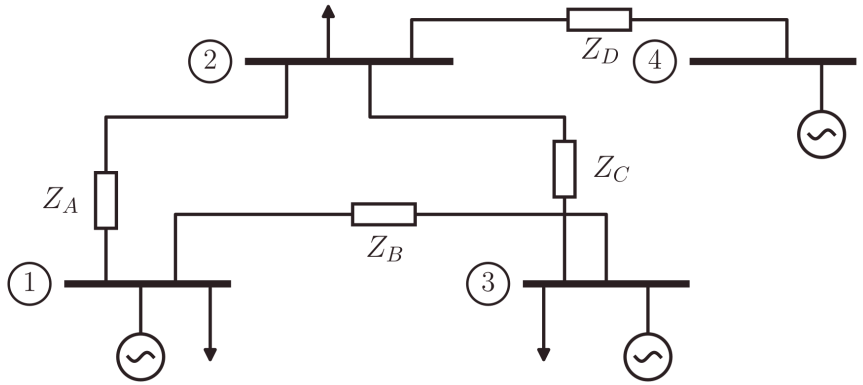
$$\bar{I}_2 = (-\bar{Y}_A)\,\bar{V}_1 + (\bar{Y}_A + \bar{Y}_C + \bar{Y}_D)\,\bar{V}_2 + (-\bar{Y}_C)\,\bar{V}_3 + (-\bar{Y}_D)\,\bar{V}_4$$

[Y]: esempio, forma matriciale

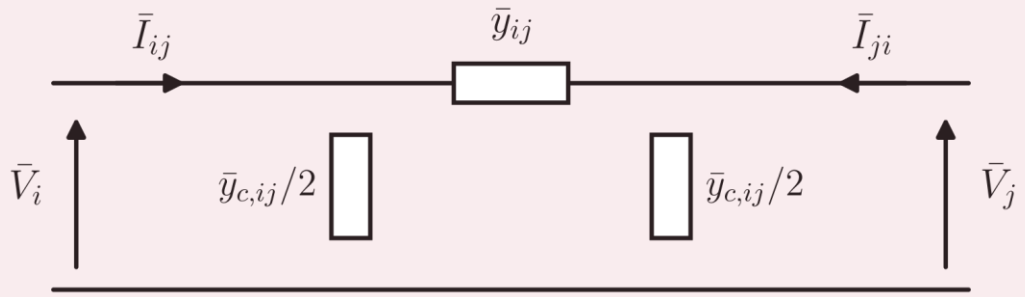
Si ottengono relazioni analoghe per i nodi 3 e 4; i risultati si esprimono in forma matriciale $[\bar{I}] = [\bar{Y}][\bar{V}]$:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \\ \bar{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_A + \bar{Y}_B & -\bar{Y}_A & -\bar{Y}_B & 0 \\ -\bar{Y}_A & \bar{Y}_A + \bar{Y}_C + \bar{Y}_D & -\bar{Y}_C & -\bar{Y}_D \\ -\bar{Y}_B & -\bar{Y}_C & \bar{Y}_B + \bar{Y}_C & 0 \\ 0 & -\bar{Y}_D & 0 & \bar{Y}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{V}_4 \end{bmatrix}$$

Per un sistema con *n* nodi indipendenti, [*Y*] è una matrice *n*×*n* **simmetrica** e **sparsa**: gli elementi non nulli sono in posizione *ij* solo se i nodi *i* e *j* sono **direttamente** connessi.



Elementi derivati in [Y]



Per il ramo *ij* con modello a π:

$$\bar{I}_{ij} = (\bar{V}_i - \bar{V}_j)\,\bar{y}_{ij} + \bar{V}_i\,\frac{\bar{y}_{c,ij}}{2}$$

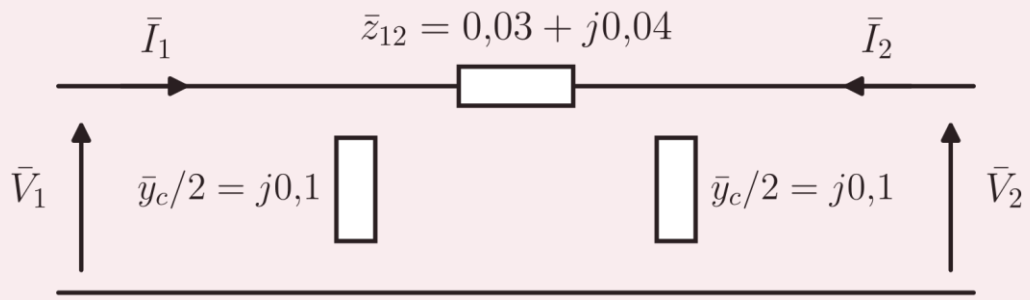
il contributo del ramo *ij* alla matrice [*Y*] è:

$$\bar{Y}_{ii} = \ldots + \bar{y}_{ij} + \frac{\bar{y}_{c,ij}}{2} + \ldots$$

Si noti che:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{\bar{z}_{ij}} = \frac{1}{r_{ij} + jx_{ij}} \cdot \frac{r_{ij} - jx_{ij}}{r_{ij} - jx_{ij}} = \frac{r_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} - j\,\frac{x_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} = g + jb$$

Esempio: sistema a due nodi



Ammettenza serie della linea:

$$\bar{y}_{12} = \frac{1}{\bar{z}_{12}} = \frac{1}{0{,}03 + j0{,}04} = 12 - j16$$

Matrice delle ammettenze nodali:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{12} + \dfrac{\bar{y}_c}{2} & -\bar{y}_{12} \\ -\bar{y}_{12} & \bar{y}_{12} + \dfrac{\bar{y}_c}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - j15{,}9 & -12 + j16 \\ -12 + j16 & 12 - j15{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix}$$