UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Sistemi trifase

Fondamenti di Ingegneria Elettrica · Generatori e carichi trifase · Tensioni di fase e di linea · Circuito monofase equivalente · Potenze

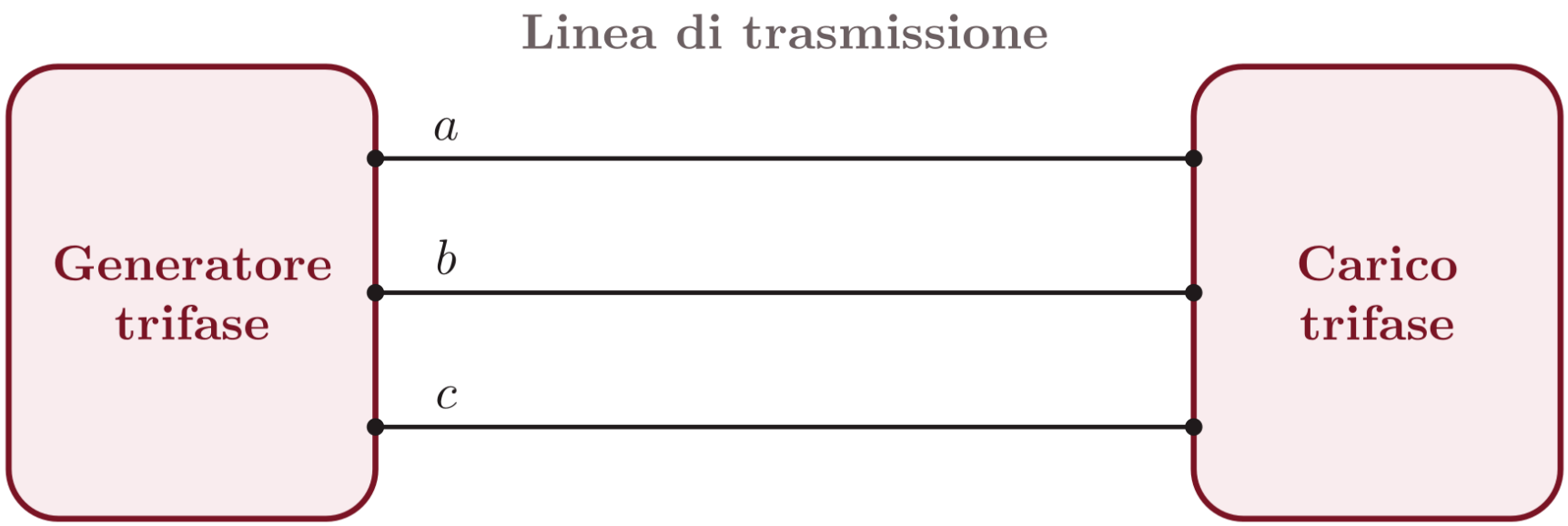
01

Generatori trifase e tensioni

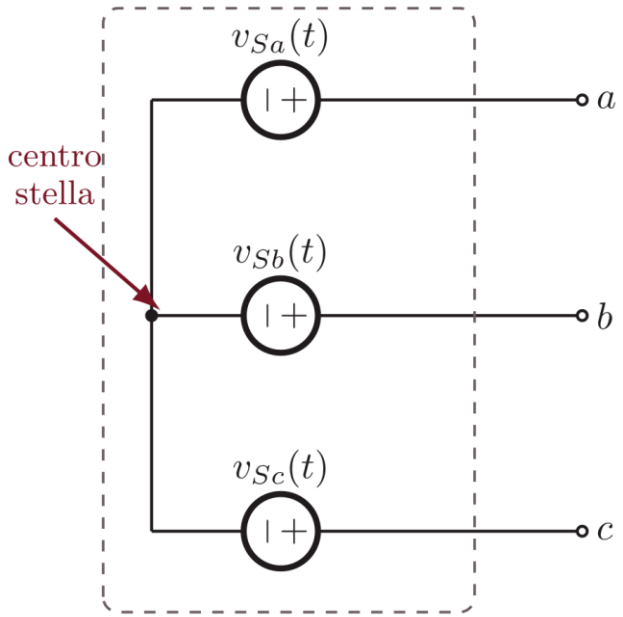
Terna simmetrica, tensioni di fase e tensioni di linea (concatenate)

Introduzione ai sistemi trifase

- I sistemi trifase vengono utilizzati per il **trasporto dell'energia elettrica**.
- Impiegano **tre conduttori** (eventualmente un quarto conduttore, il **neutro**).
- Sono composti da tre parti: un **generatore trifase**, una **linea di trasmissione** e un **carico trifase**.

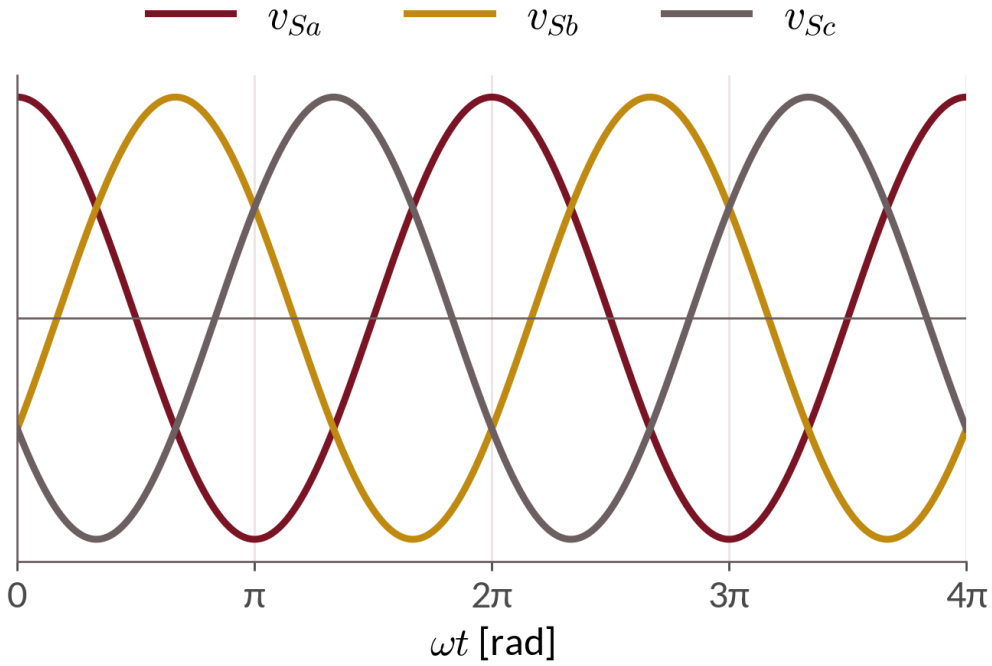


Generatore trifase



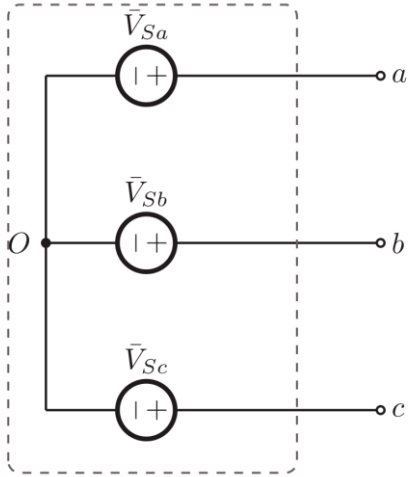
$$\begin{cases} v_{Sa}(t) = \sqrt{2}\, V_S \cos(\omega t) \\ v_{Sb}(t) = \sqrt{2}\, V_S \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_{Sc}(t) = \sqrt{2}\, V_S \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

- Esternamente è un componente a **tre terminali** (*a*, *b*, *c*).
- I tre generatori sono collegati a **stella**.
- Il nodo di collegamento si chiama **centro stella**.

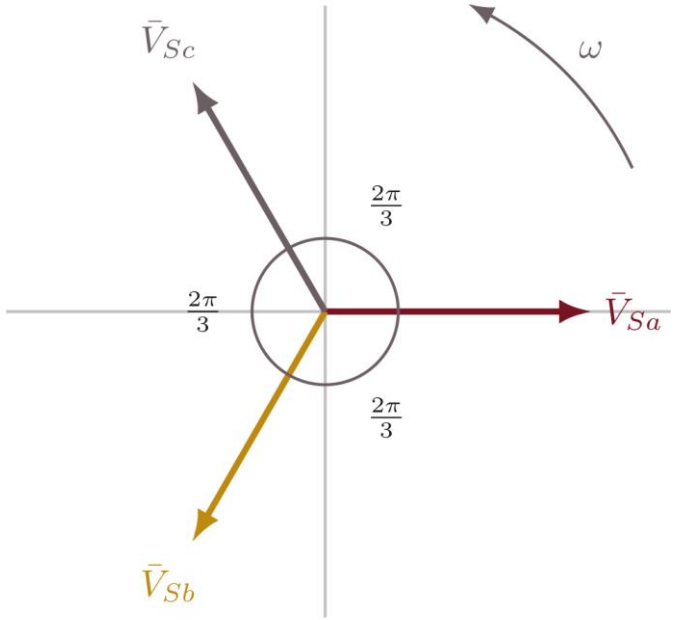


Generatore trifase nel dominio dei fasori

- Le tre tensioni formano una **terna simmetrica** di tensioni di fase.
- Nel dominio dei fasori:



$$\begin{cases} \bar{V}_{Sa} = V_S \\ \bar{V}_{Sb} = V_S\, e^{-j2\pi/3} \\ \bar{V}_{Sc} = V_S\, e^{-j4\pi/3} = V_S\, e^{j2\pi/3} \end{cases}$$



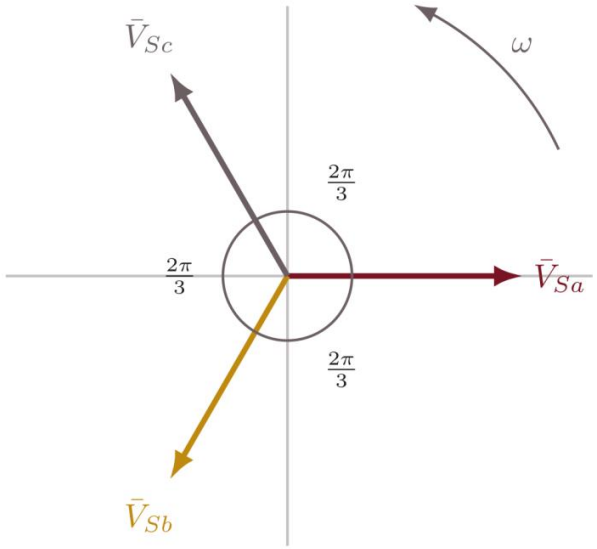
Terna simmetrica

$$\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc} = 0$$

Tensioni di fase: terna diretta e terna inversa

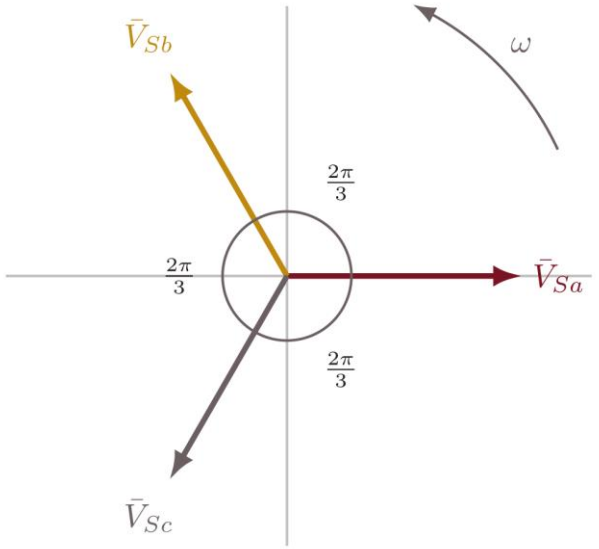
Le tensioni $\bar{V}_{Sa}$, $\bar{V}_{Sb}$, $\bar{V}_{Sc}$ sono dette **tensioni stellate** o **tensioni di fase**. A seconda dell'ordine con cui i fasori si susseguono durante la rotazione si distinguono due terne:

Terna simmetrica DIRETTA



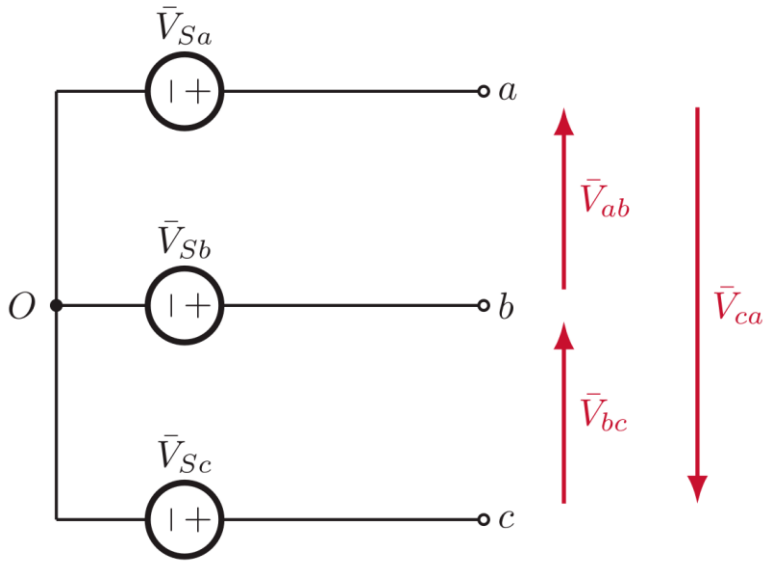
Sequenza delle fasi: $a \rightarrow b \rightarrow c$

Terna simmetrica INVERSA



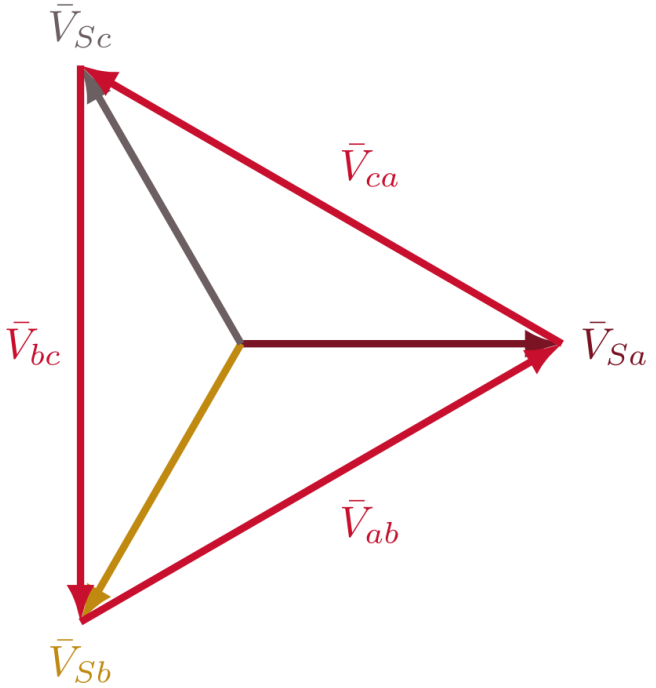
Sequenza delle fasi: $a \rightarrow c \rightarrow b$

Tensioni di linea o concatenate



Le tensioni tra i conduttori di linea sono dette **tensioni di linea** o **concatenate**:

$$\begin{cases} \bar{V}_{ab} = \bar{V}_{Sa} - \bar{V}_{Sb} \\ \bar{V}_{bc} = \bar{V}_{Sb} - \bar{V}_{Sc} \\ \bar{V}_{ca} = \bar{V}_{Sc} - \bar{V}_{Sa} \end{cases}$$



I fasori delle tensioni di linea chiudono il triangolo costruito sulle punte delle tensioni di fase.

Tensioni di linea: somma nulla

- La terna delle tensioni di linea ha **somma nulla** **per qualunque terna** di tensioni di fase:

$$\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} + \bar{V}_{ca} = 0$$

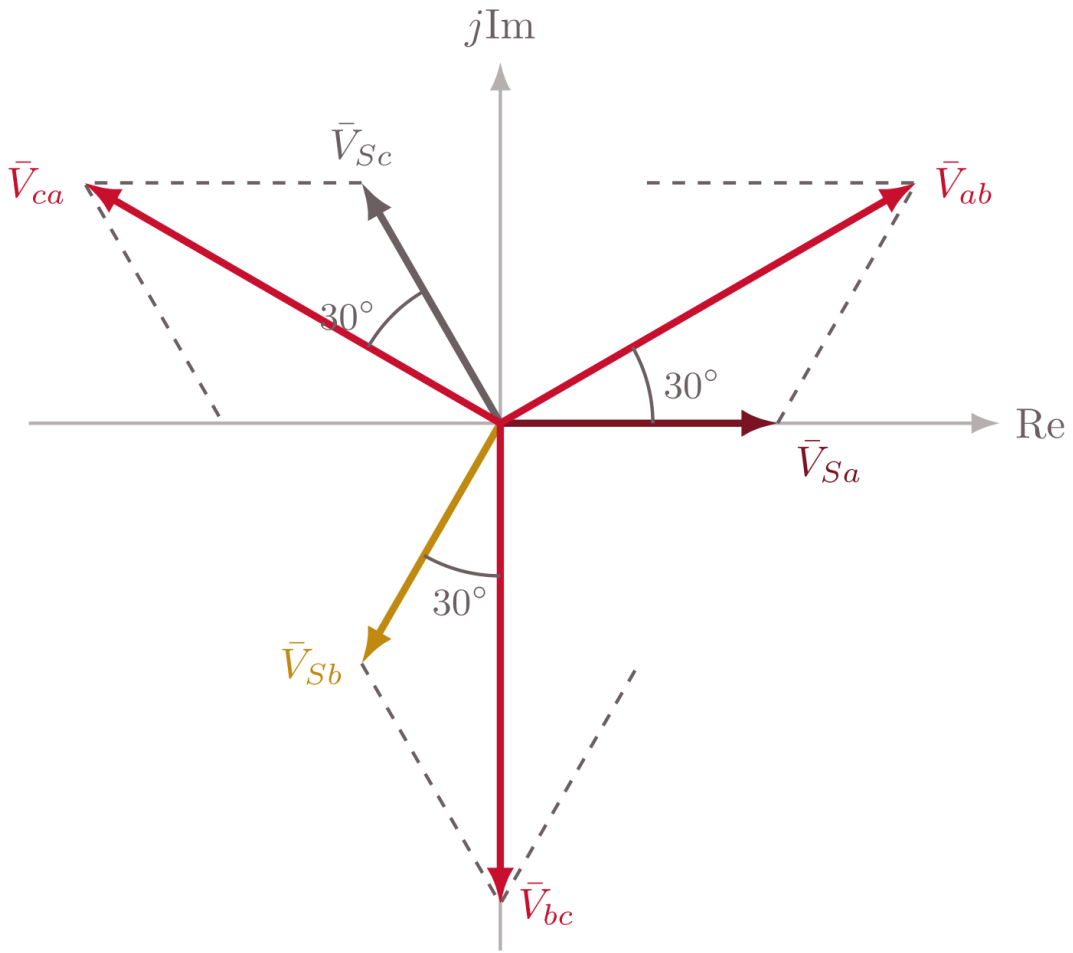
$$\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} + \bar{V}_{ca} = (\cancel{\bar{V}_{Sa}} - \cancel{\bar{V}_{Sb}}) + (\cancel{\bar{V}_{Sb}} - \cancel{\bar{V}_{Sc}}) + (\cancel{\bar{V}_{Sc}} - \cancel{\bar{V}_{Sa}}) = 0$$

- La proprietà vale anche se risultasse:

$$\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc} \neq 0$$

È una conseguenza della **legge di Kirchhoff delle tensioni** applicata alla maglia formata dai tre conduttori di linea.

Tensioni di linea: diagramma fasoriale



- Ogni tensione di linea si ottiene come differenza di due tensioni di fase, ad esempio:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_{Sa} + (-\bar{V}_{Sb})$$

- Graficamente: regola del parallelogramma tra $\bar{V}_{Sa}$ e $-\bar{V}_{Sb}$ (tratteggio).
- Le tensioni di linea sono **ruotate di 30°** in anticipo rispetto alle corrispondenti tensioni di fase.

Relazione tra tensioni di linea e di fase

Se la terna di tensioni di fase è **simmetrica**:

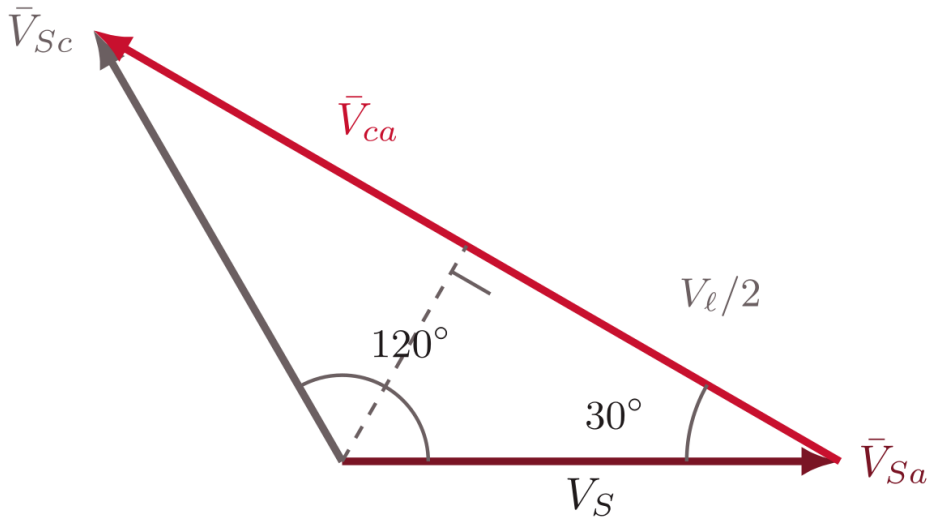
$$\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc} = 0$$

le tensioni di linea costituiscono una terna di tensioni:

- **sfasata di 30°** rispetto alla terna delle tensioni di fase;
- di **modulo** pari a:

$$V_\ell = \sqrt{3}\, V_S$$

Esempio: V_S=230 V ⇒ V_ℓ=√3·230≈400 V (rete di bassa tensione; un tempo 220/380 V).



$$\frac{V_\ell}{2} = V_S \cos 30° = V_S \frac{\sqrt{3}}{2}$$

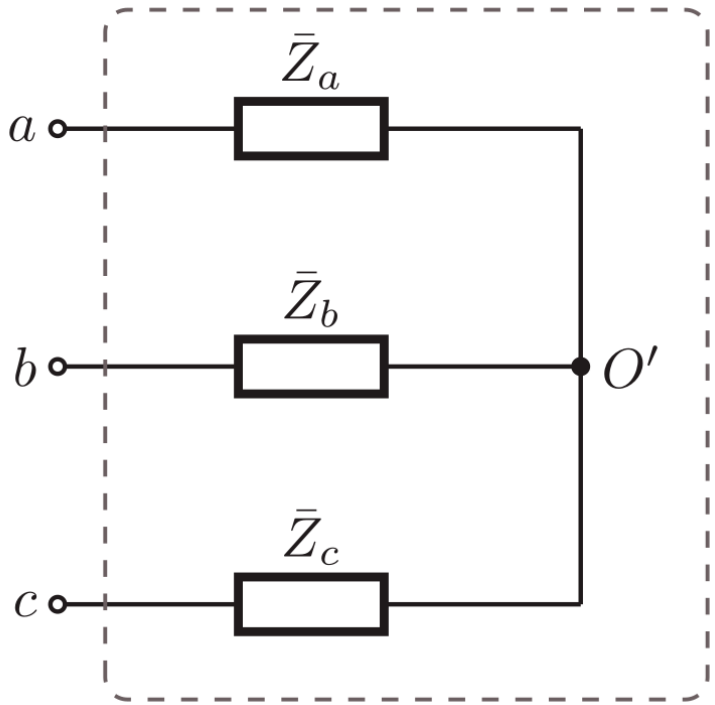
02

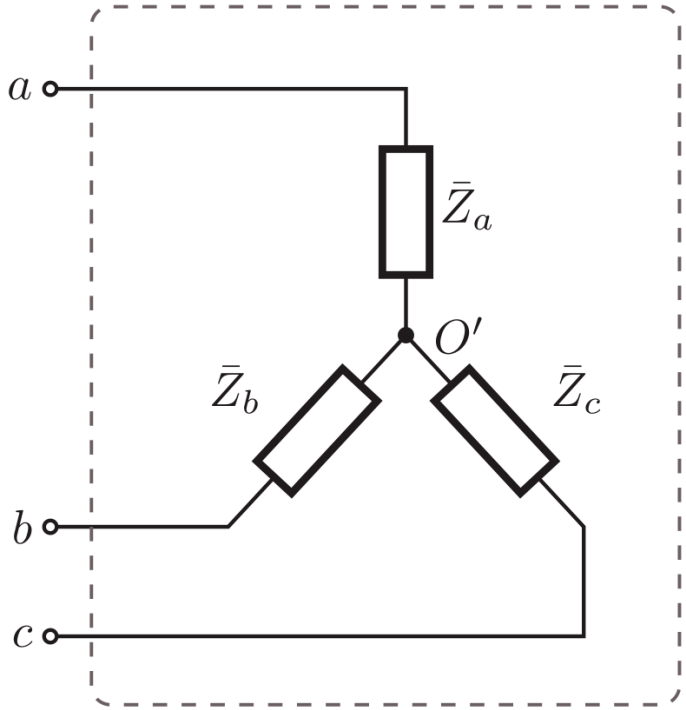
Carichi trifase

Collegamento a stella e a triangolo, trasformazioni stella-triangolo, carico equilibrato, grandezze di linea e di fase

Carico trifase: collegamento a stella

Due rappresentazioni **equivalenti** dello stesso carico:

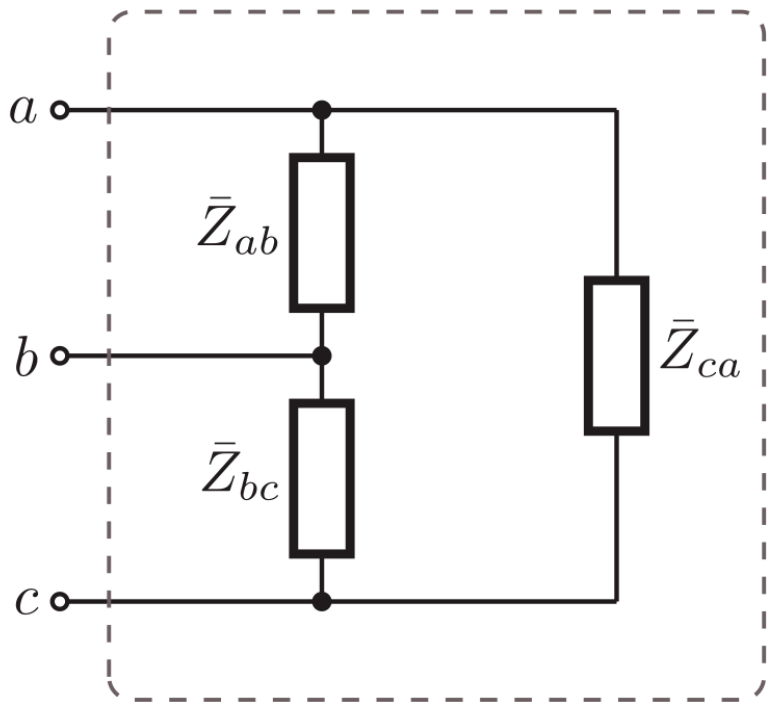


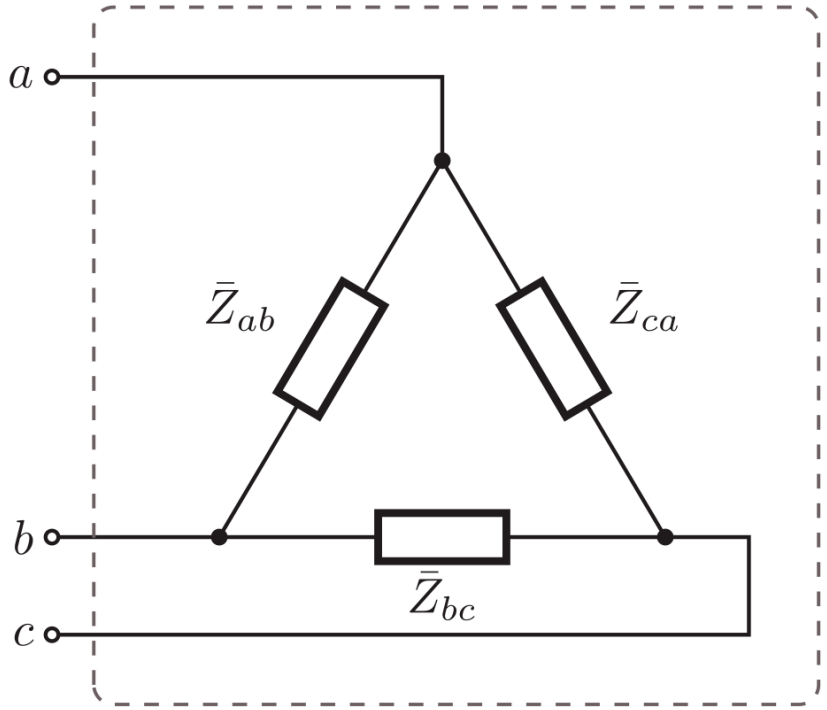


Le tre impedenze hanno un terminale in comune: il **centro stella** del carico *O*'.

Carico trifase: collegamento a triangolo

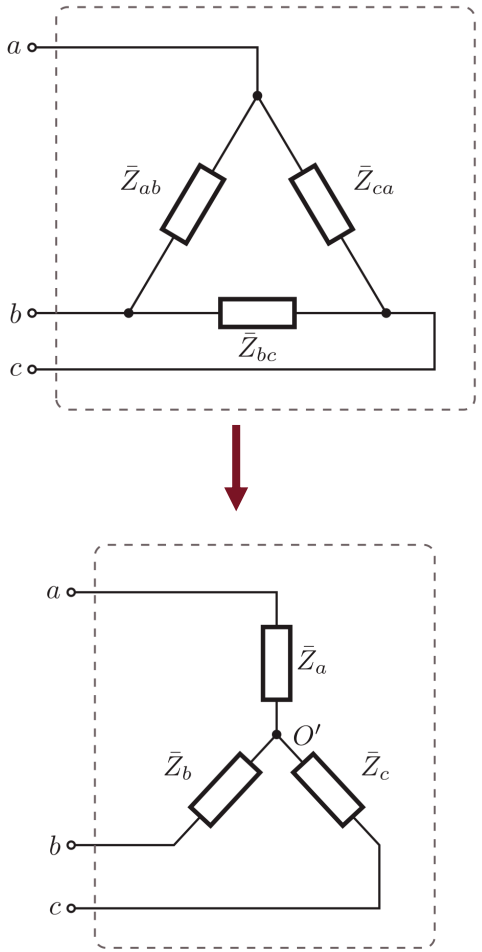
Due rappresentazioni **equivalenti** dello stesso carico:





Ogni impedenza è collegata **tra due conduttori di linea**: non esiste un centro stella.

Carico trifase: trasformazione triangolo → stella



Le impedenze della **stella** si esprimono in funzione delle impedenze del **triangolo** come:

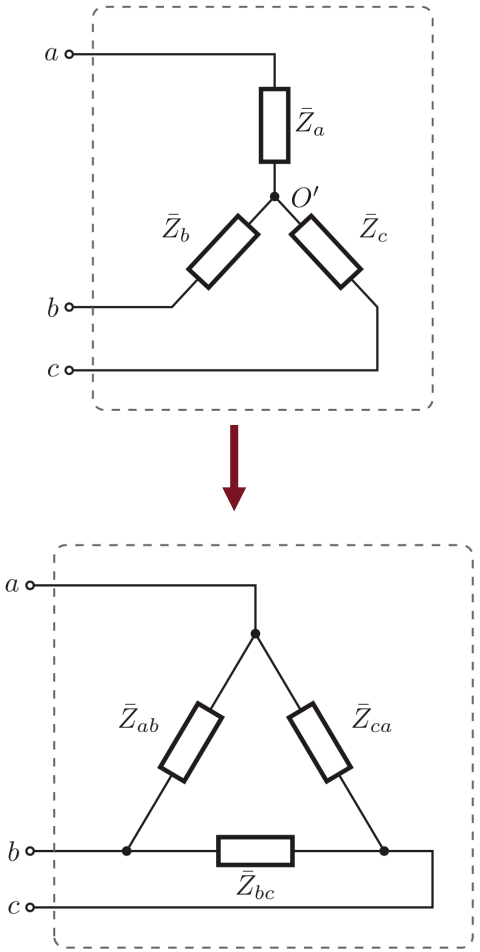
$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{Z}_{ab}\,\bar{Z}_{ca}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}}$$

$$\bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_{ab}\,\bar{Z}_{bc}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}}$$

$$\bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_{bc}\,\bar{Z}_{ca}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}}$$

Regola: prodotto delle due impedenze **adiacenti** al nodo, diviso la somma delle tre.

Carico trifase: trasformazione stella → triangolo



Le impedenze del **triangolo** si esprimono in funzione delle impedenze della **stella** come:

$$\bar{Z}_{ab} = \frac{\bar{Z}_a\bar{Z}_b + \bar{Z}_b\bar{Z}_c + \bar{Z}_c\bar{Z}_a}{\bar{Z}_c}$$

$$\bar{Z}_{bc} = \frac{\bar{Z}_a\bar{Z}_b + \bar{Z}_b\bar{Z}_c + \bar{Z}_c\bar{Z}_a}{\bar{Z}_a}$$

$$\bar{Z}_{ca} = \frac{\bar{Z}_a\bar{Z}_b + \bar{Z}_b\bar{Z}_c + \bar{Z}_c\bar{Z}_a}{\bar{Z}_b}$$

Oppure, in termini di **ammettenze**, con formule analoghe alle precedenti.

Carico trifase equilibrato

Un carico trifase si dice **equilibrato** se è costituito da **impedenze uguali** (in modulo e fase), ovvero se:

$$\text{stella:} \qquad \bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c$$
$$\text{triangolo:} \qquad \bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca}$$

Nel caso in cui le impedenze risultino diverse si parla di **carico squilibrato**.

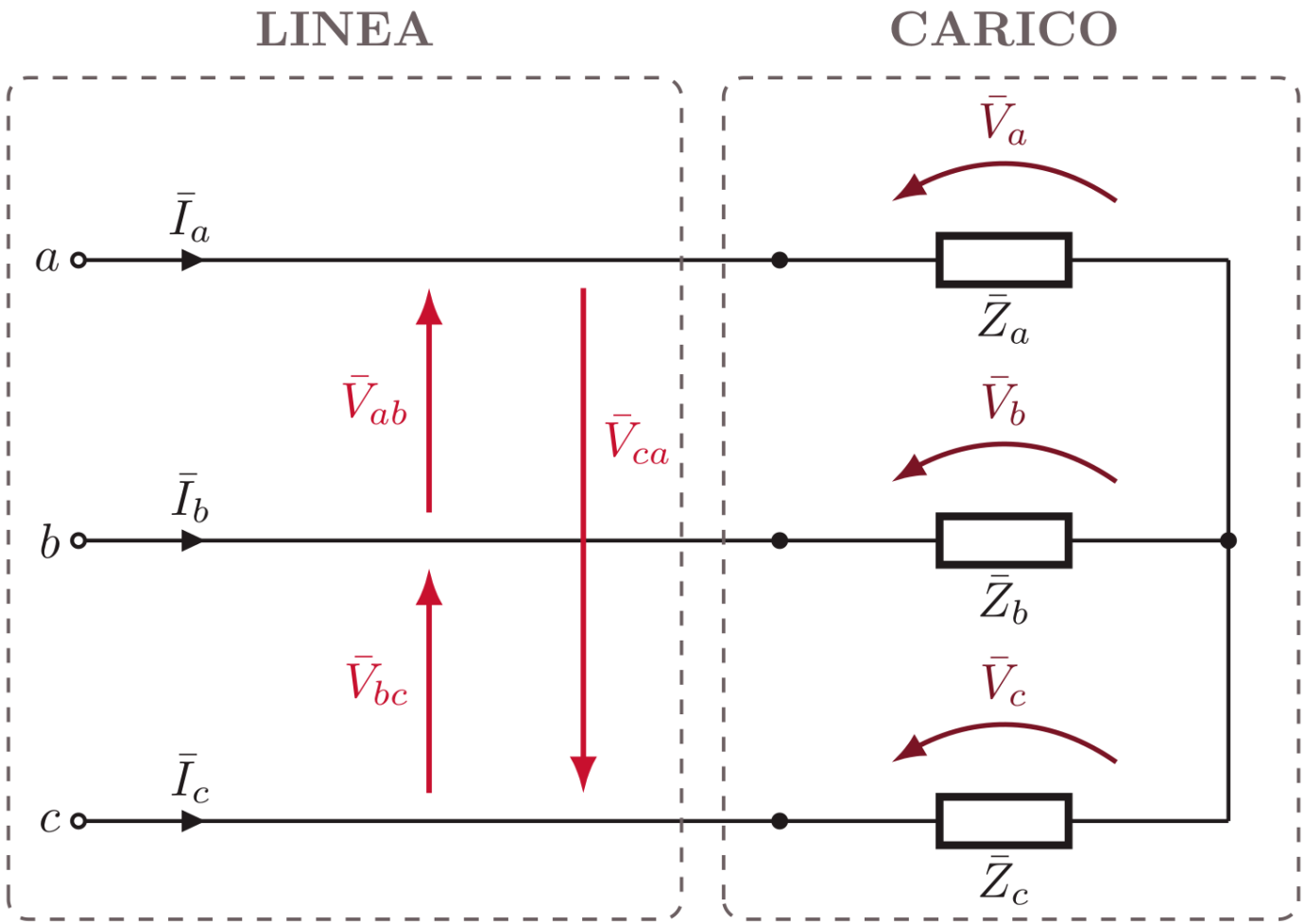
Equivalenza stella–triangolo

Per un carico equilibrato le impedenze della stella e del triangolo sono legate dalla relazione:

$$\bar{Z}_\Delta = 3\,\bar{Z}_Y$$

Si ottiene subito dalle formule di trasformazione ponendo tutte le impedenze uguali.

Collegamento a stella: grandezze di linea e di fase

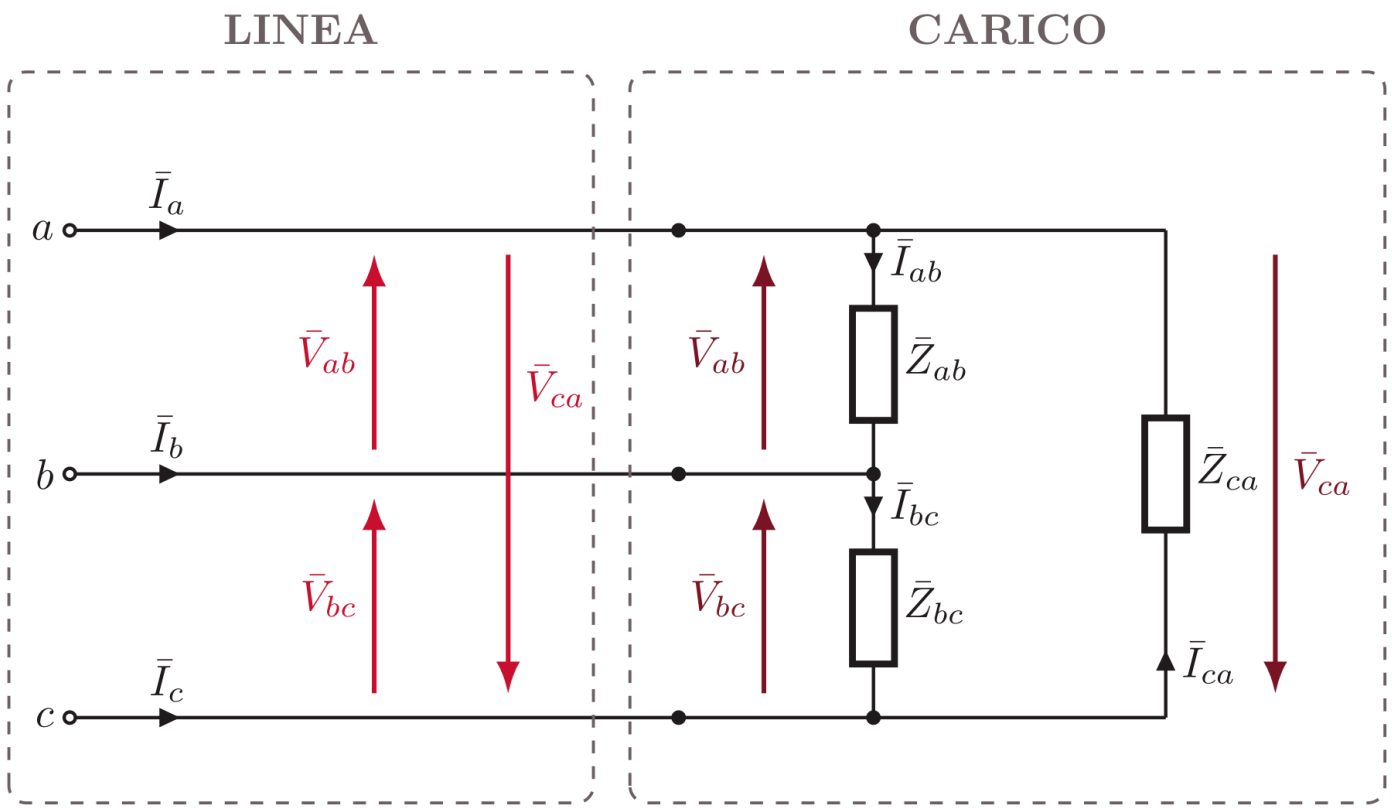


Le **correnti di linea** coincidono con le **correnti di fase** del carico.

Le **tensioni di fase** $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$, $\bar{V}_c$ sono applicate alle singole impedenze; le **tensioni di linea** sono le tensioni tra i conduttori.

In regime simmetrico: $I_\ell = I_f$, $V_\ell = \sqrt{3}\, V_f$.

Collegamento a triangolo: grandezze di linea e di fase



Le **tensioni di linea** coincidono con le **tensioni di fase** del carico.

Le **correnti di fase** $\bar{I}_{ab}$, $\bar{I}_{bc}$, $\bar{I}_{ca}$ attraversano le impedenze; le correnti di linea si ottengono con la LKC ai nodi.

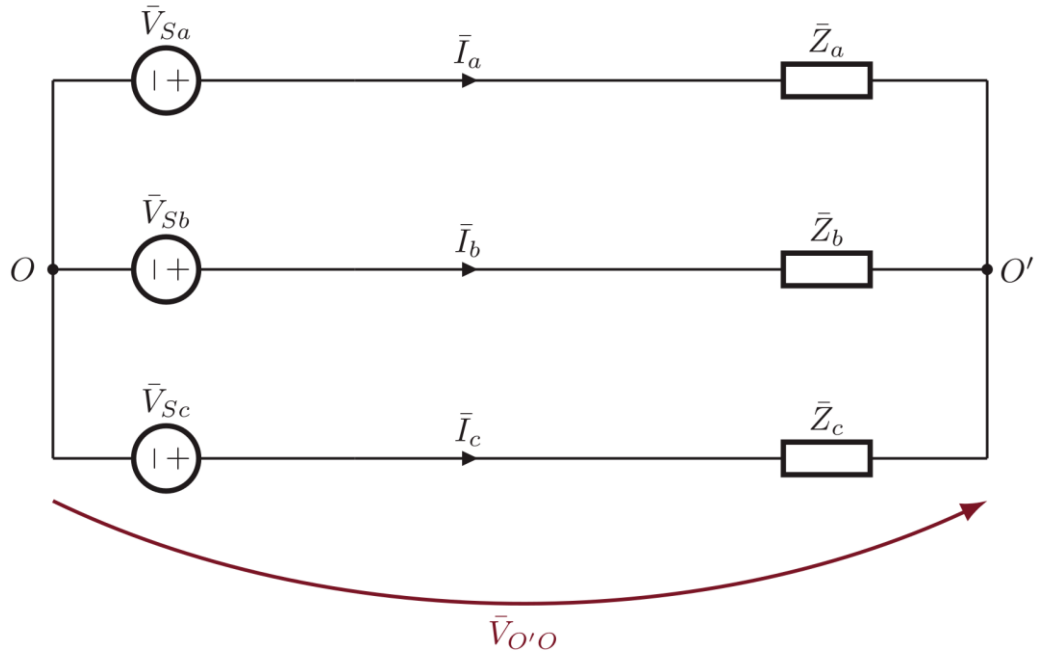
In regime simmetrico: $V_\ell = V_f$, $I_\ell = \sqrt{3}\, I_f$.

03

Soluzione dei sistemi trifase

Formula di Millman, sistemi simmetrici ed equilibrati, circuito monofase equivalente, carichi squilibrati, neutro

Calcolo delle correnti di linea



Il calcolo delle **correnti di linea** $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$, $\bar{I}_c$ richiede la conoscenza della **d.d.p. tra i centri stella** di generatore e carico, $\bar{V}_{O'O}$.

D.d.p. tra i centri stella: formula di Millman

La d.d.p. tra i centri stella si calcola con la **formula di Millman**:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} + \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} + \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c}}{\frac{1}{\bar{Z}_a} + \frac{1}{\bar{Z}_b} + \frac{1}{\bar{Z}_c}}$$

Da cui le tre correnti di linea risultano:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_a} \qquad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_b} \qquad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_c}$$

Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati

In un sistema trifase:

$$\begin{array}{ll} \text{simmetrico} & \bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc} = 0 \\ \text{equilibrato} & \bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = \bar{Z} \end{array}$$

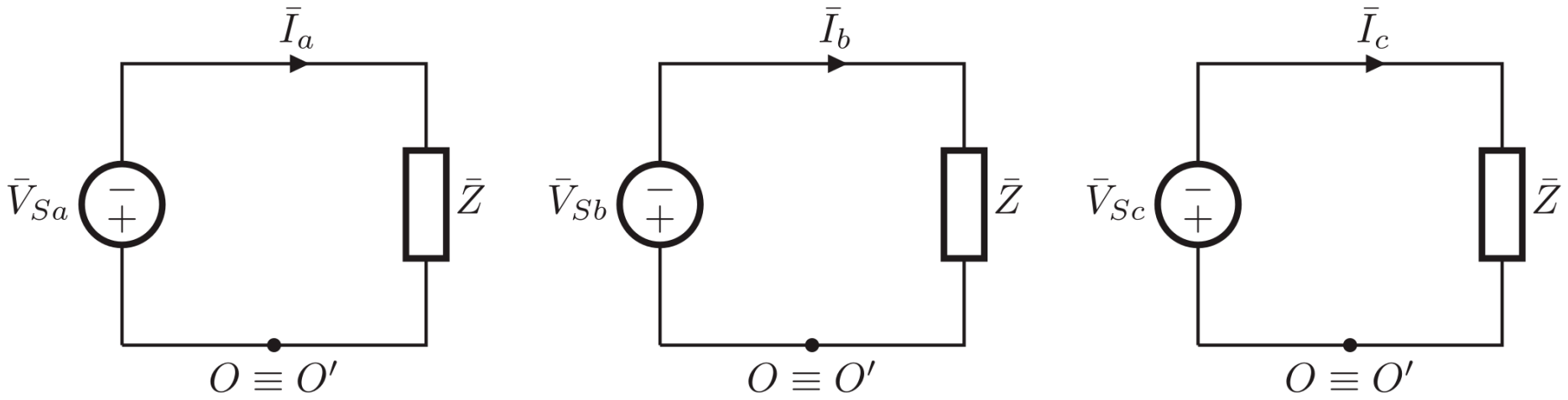
la d.d.p. tra i centri stella di generatore e carico è **nulla**:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\dfrac{\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}}}{\dfrac{3}{\bar{Z}}} = 0$$

Circuiti monofase equivalenti

I centri stella sono allo stesso potenziale: si possono collegare idealmente e studiare **un circuito monofase per ciascun filo**.

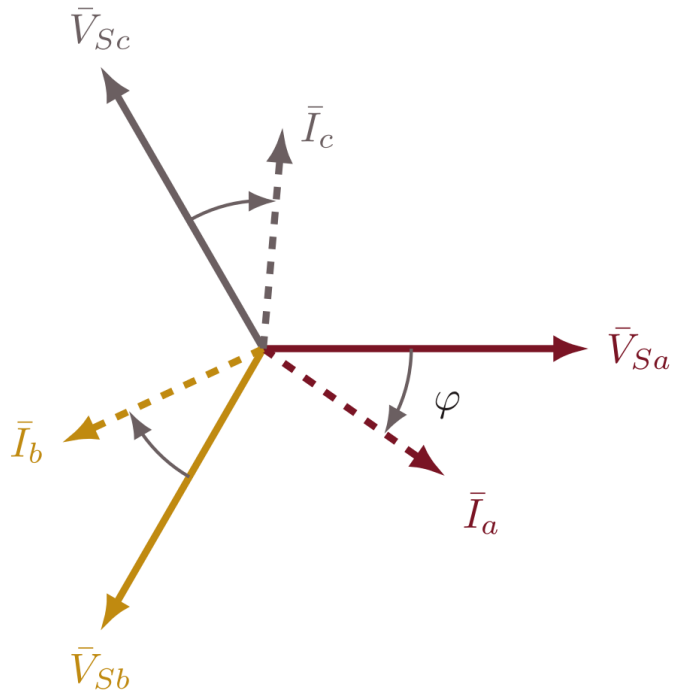
Circuiti monofase equivalenti



$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}} = \frac{V_S}{\bar{Z}}$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}} = \frac{V_S\, e^{-j2\pi/3}}{\bar{Z}} = \bar{I}_a\, e^{-j2\pi/3} \qquad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}} = \frac{V_S\, e^{-j4\pi/3}}{\bar{Z}} = \bar{I}_a\, e^{-j4\pi/3}$$

Circuiti monofase equivalenti: vantaggi



Vantaggio: basta risolvere la sola **fase a**. Le correnti delle altre due fasi si ottengono da $\bar{I}_a$ per **rotazione** di $\mp 2\pi/3$.

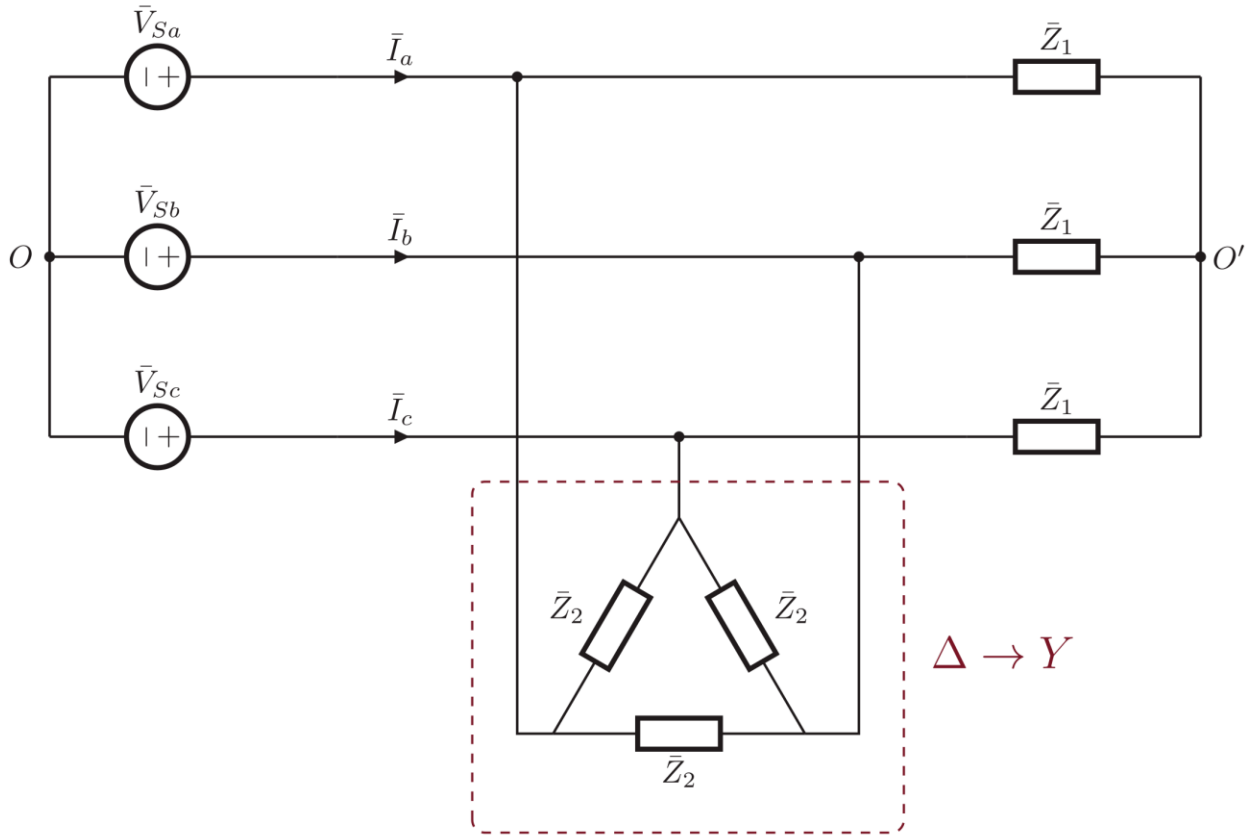
$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}} = \frac{V_S}{\bar{Z}} = \frac{V_S}{Z}\, e^{-j\varphi} \qquad \varphi = \angle \bar{Z}$$

Le **correnti di linea** costituiscono una **terna simmetrica** sfasata dell'angolo φ rispetto alla terna delle tensioni di fase:

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

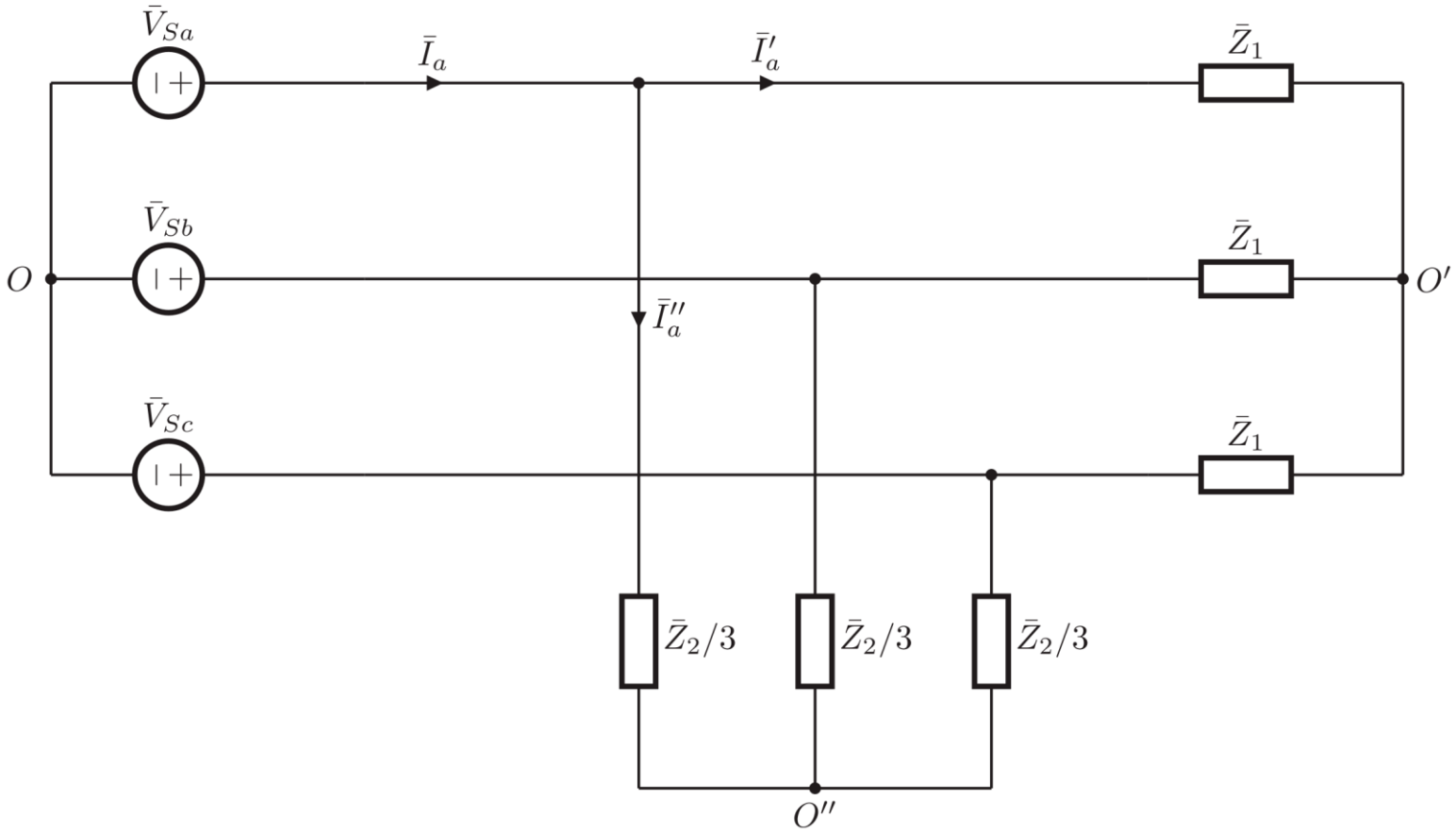
Circuiti monofase equivalenti: un esempio

Sistema simmetrico che alimenta due carichi equilibrati: Z_1 collegato a **stella** e Z_2 collegato a **triangolo**.



Esempio – Passo 1: triangolo → stella equivalente

Passo 1: il carico a triangolo viene trasformato nell'equivalente a stella, $Z_Y=Z_2/3$.



Si ottengono **due carichi a stella** in parallelo, con centri stella *O*' e *O*''.

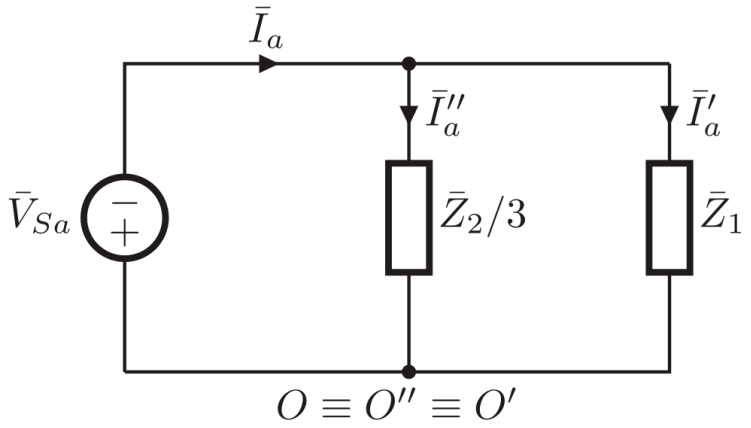
La LKC ai centri stella permette di valutarne i potenziali.

Esempio – Passi 2 e 3: centri stella e circuito monofase

Passo 2: si valuta la d.d.p. tra i centri stella *O'O* e *O''O* (sistema simmetrico, carichi equilibrati):

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}(\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc})}{3\,\frac{1}{\bar{Z}_1}} = 0 \qquad \bar{V}_{O''O} = \frac{\frac{3}{\bar{Z}_2}(\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc})}{3\,\frac{3}{\bar{Z}_2}} = 0$$

Passo 3: circuito monofase equivalente per la fase *a*:



Esempio – Passi 4 e 5: correnti di linea e di fase

Passo 4: si calcolano le correnti sulla fase *a* (partitore di corrente):

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\dfrac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{3\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}} \qquad \bar{I}'_a = \frac{\bar{Z}_2}{3\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}\,\bar{I}_a \qquad \bar{I}''_a = \frac{3\bar{Z}_1}{3\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}\,\bar{I}_a$$

Passo 5: le correnti sulle fasi *b* e *c* si ottengono per rotazione:

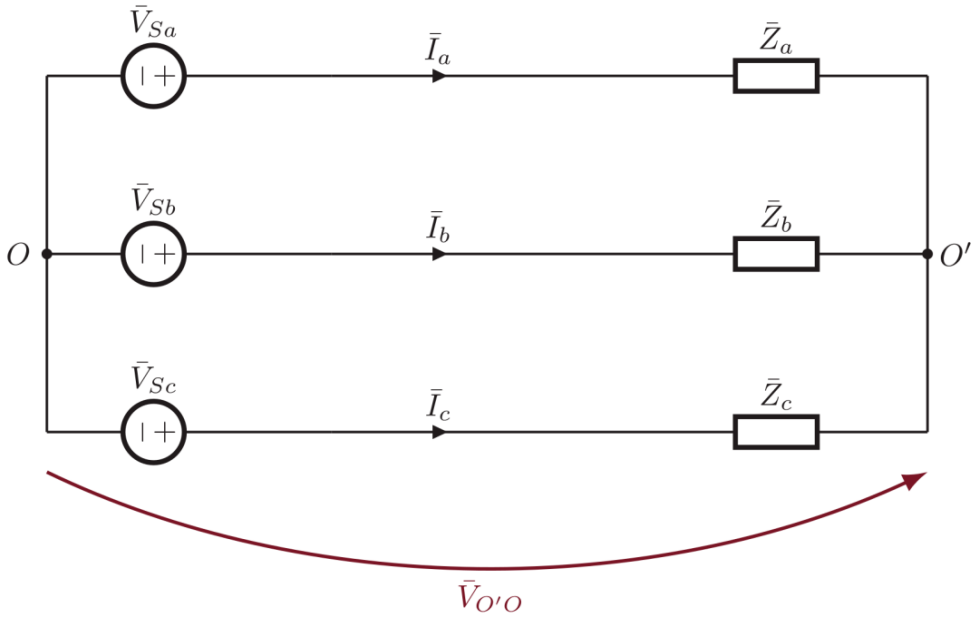
Fase b

$$\bar{I}_b = \bar{I}_a\, e^{-j2\pi/3}$$
$$\bar{I}'_b = \bar{I}'_a\, e^{-j2\pi/3}$$
$$\bar{I}''_b = \bar{I}''_a\, e^{-j2\pi/3}$$

Fase c

$$\bar{I}_c = \bar{I}_a\, e^{-j4\pi/3}$$
$$\bar{I}'_c = \bar{I}'_a\, e^{-j4\pi/3}$$
$$\bar{I}''_c = \bar{I}''_a\, e^{-j4\pi/3}$$

Sistemi trifase con carico squilibrato



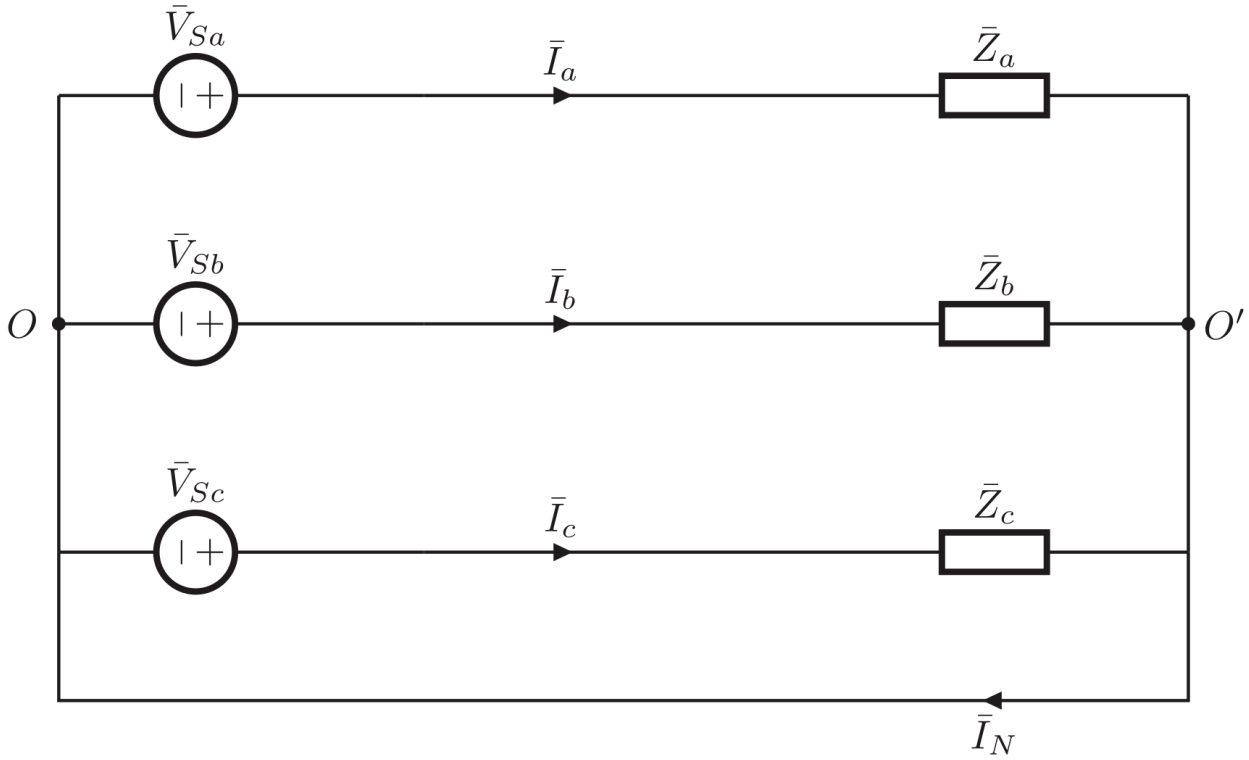
$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_a} \qquad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_b} \qquad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc} - \bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_c}$$

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} + \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} + \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c}}{\frac{1}{\bar{Z}_a} + \frac{1}{\bar{Z}_b} + \frac{1}{\bar{Z}_c}} \neq 0$$

- **Non** è possibile introdurre i circuiti monofase equivalenti.
- Le correnti di linea si valutano per ciascuna fase mediante la LKT:

Lo squilibrio si riflette in una **d.d.p. non nulla tra i centri stella**, mentre le correnti restano a somma nulla per il vincolo topologico.

Sistemi trifase con neutro (quarto filo)



- L'introduzione di un **quarto filo** (in corto circuito) forza la d.d.p. tra i centri stella ad essere **nulla**.
- In questo caso lo squilibrio del carico si riflette nella **circolazione di corrente** $\bar{I}_N$ non nulla nel quarto filo (**neutro**).

Sistemi trifase con neutro: carico squilibrato

Infatti, se $\bar{V}_{O'O}=0$ (vincolo topologico imposto dal neutro), le correnti di linea risultano:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} \qquad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} \qquad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c}$$

e la corrente nel neutro assume l'espressione:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} + \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} + \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c} \neq 0$$

in caso di **carico squilibrato**, ovvero se $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$.

Sistemi trifase con neutro: carico equilibrato

Se invece il sistema è **simmetrico ed equilibrato** (Z_a=Z_b=Z_c=Z), l'introduzione del quarto filo è **inutile**: la tensione tra i centri stella è già nulla, $V_{O'O}$=0.

Le correnti di linea costituiscono una terna simmetrica:

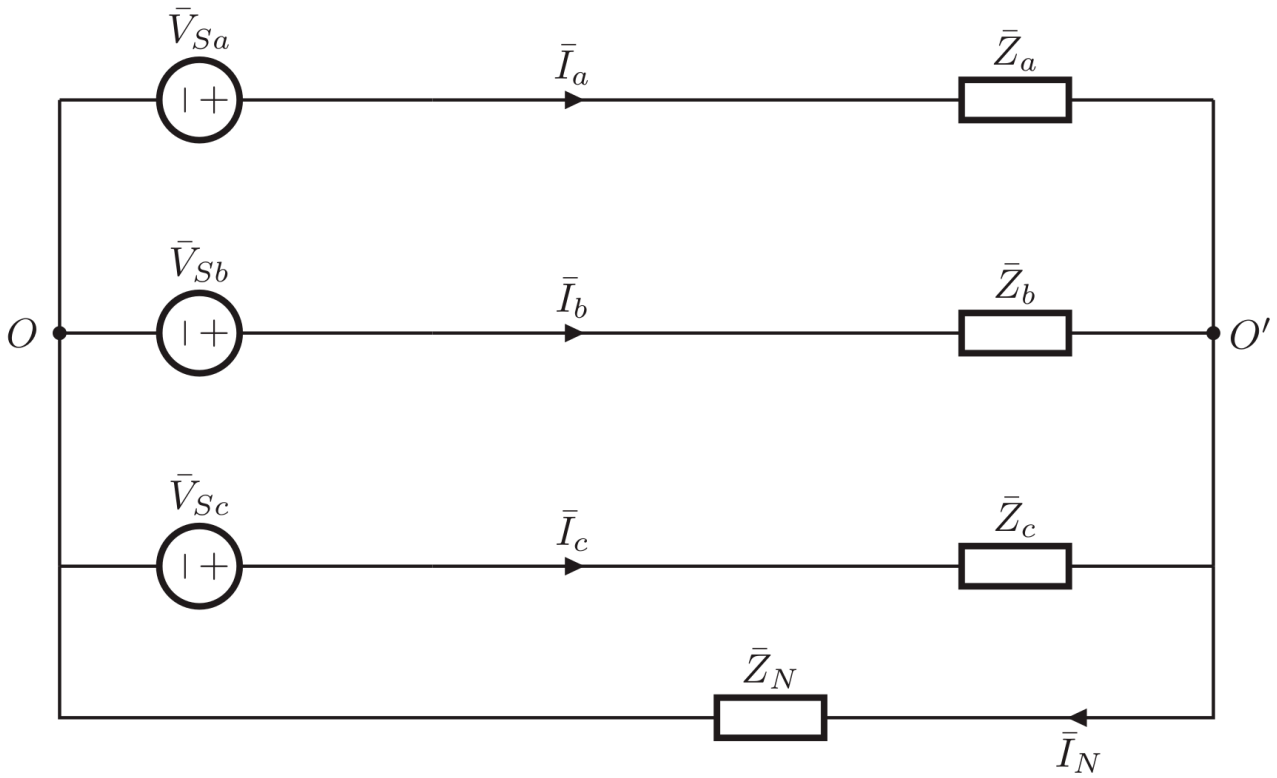
$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}} \qquad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}} \qquad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}}$$

Pertanto il quarto filo **non è percorso da corrente**:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sa} + \bar{V}_{Sb} + \bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}} = 0$$

Sistemi trifase con neutro di impedenza non nulla

Le considerazioni precedenti restano valide anche se il quarto filo ha **impedenza non nulla** Z_N.



D.d.p. tra i centri stella con neutro

La formula di Millman diventa:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} + \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} + \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c}}{\frac{1}{\bar{Z}_a} + \frac{1}{\bar{Z}_b} + \frac{1}{\bar{Z}_c} + \frac{1}{\bar{Z}_N}}$$

e le correnti risultano:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_a} - \frac{\bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_a} \qquad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{Sb}}{\bar{Z}_b} - \frac{\bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_b}$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{Sc}}{\bar{Z}_c} - \frac{\bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_c} \qquad \bar{I}_N = \frac{\bar{V}_{O'O}}{\bar{Z}_N} = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c$$

Carico equilibrato

$$\bar{V}_{O'O} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{I}_N = 0$$

Carico squilibrato

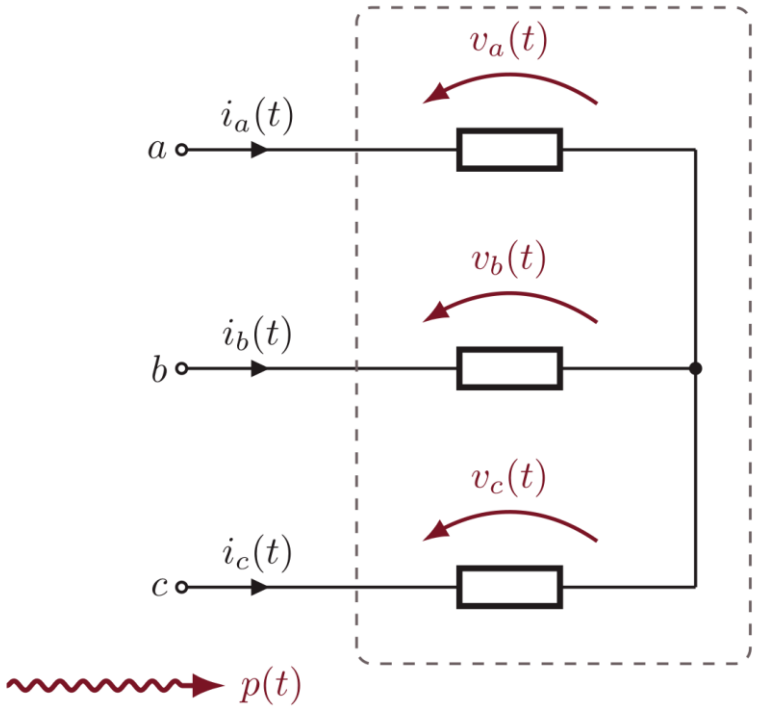
$$\bar{V}_{O'O} \neq 0 \;\Rightarrow\; \bar{I}_N \neq 0$$

04

Potenza nei sistemi trifase

Potenza istantanea, attiva, reattiva e complessa di carichi equilibrati e squilibrati

Potenza istantanea assorbita da un carico trifase



Carico trifase **simmetrico ed equilibrato** con:

$$\begin{cases} v_a(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t) \\ v_b(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_c(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_a(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t - \varphi) \\ i_b(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) \\ i_c(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t - 4\pi/3 - \varphi) \end{cases}$$

Potenza istantanea: somma delle tre fasi

La potenza complessivamente assorbita dal carico è la **somma** delle potenze assorbite da ciascuna fase:

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = v_a(t)\, i_a(t) + v_b(t)\, i_b(t) + v_c(t)\, i_c(t)$$

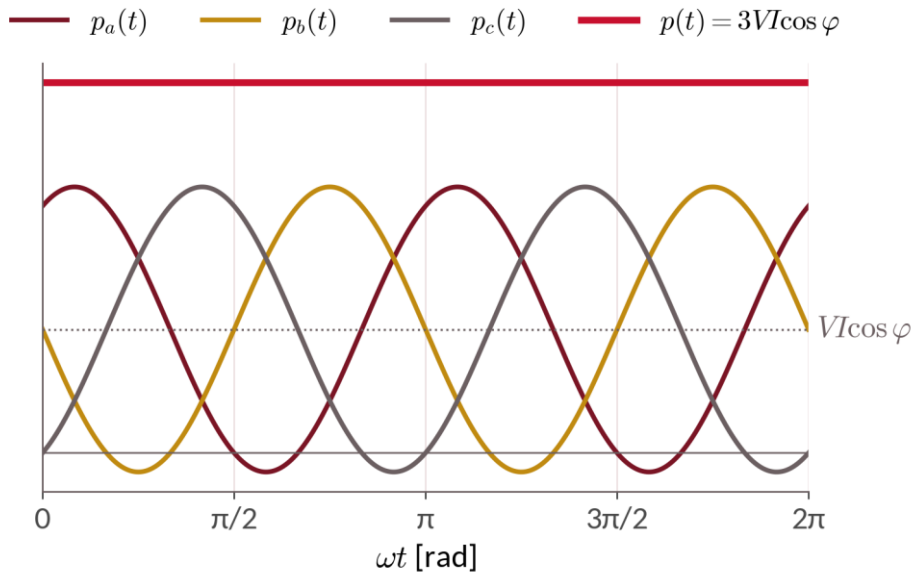
$$\begin{aligned}
p_a(t) &= 2VI\cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t - \varphi) \\
p_b(t) &= 2VI\cos(\omega t - 2\pi/3)\cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t - 4\pi/3 - \varphi) \\
p_c(t) &= 2VI\cos(\omega t + 2\pi/3)\cos(\omega t + 2\pi/3 - \varphi) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t + 4\pi/3 - \varphi)
\end{aligned}$$

Potenza istantanea costante

$$p(t) = 3VI\cos\varphi + \underbrace{+ VI\cos(2\omega t - \varphi) + VI\cos\left(2\omega t - \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right) + VI\cos\left(2\omega t + \tfrac{4\pi}{3} - \varphi\right)}_{=0 \text{ (terna simmetrica)}}$$

In un sistema trifase **simmetrico ed equilibrato** la potenza istantanea assorbita dal carico è **costante** e coincide con la potenza media (a differenza del caso monofase):

$$p(t) = 3VI\cos\varphi$$



Vantaggio per il generatore trifase (macchina rotante): lavora a **coppia costante**, riducendo notevolmente le vibrazioni.

Potenza media assorbita da un carico trifase

$$P = p(t) = 3V\,I\cos\varphi$$

- *V*: valore efficace della **tensione di fase**;
- *I*: valore efficace della **corrente di fase** (= di linea per la stella);
- *φ*: sfasamento tra tensione e corrente di fase (argomento della *Z* di carico alla frequenza di funzionamento).

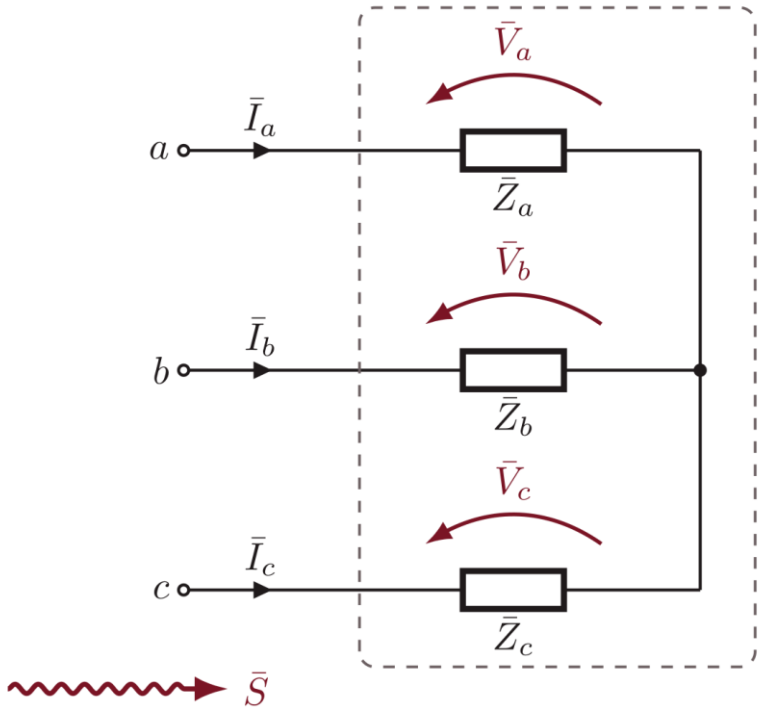
In funzione della tensione di linea

Nelle applicazioni la potenza si esprime spesso in funzione della tensione di linea (concatenata):

$$P = \sqrt{3}\,V_\ell\,I\cos\varphi$$

φ denota **sempre** lo sfasamento tra tensione di fase e corrente di fase.

Potenza complessa assorbita da un carico trifase



La potenza complessa assorbita dal carico è la somma delle potenze complesse delle tre fasi:

$$\bar{S} = \bar{S}_a + \bar{S}_b + \bar{S}_c = \bar{V}_a\,\bar{I}_a^* + \bar{V}_b\,\bar{I}_b^* + \bar{V}_c\,\bar{I}_c^*$$

L'asterisco indica il **complesso coniugato** (in altre notazioni il coniugato è indicato con la sottolineatura).

Potenza complessa: carico simmetrico ed equilibrato

$$\bar{S}_a = \bar{V}_a\,\bar{I}_a^* = V e^{j0} \cdot \left(\frac{V}{Z} e^{-j\varphi}\right)^* = \frac{V^2}{Z} e^{j\varphi} = V I\, e^{j\varphi}$$

$$\bar{S}_b = \bar{V}_b\,\bar{I}_b^* = V e^{-j2\pi/3} \cdot \left(\frac{V}{Z} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi/3}\right)^* = \frac{V^2}{Z} e^{j\varphi} = V I\, e^{j\varphi}$$

$$\bar{S}_c = \bar{V}_c\,\bar{I}_c^* = V e^{-j4\pi/3} \cdot \left(\frac{V}{Z} e^{-j\varphi} e^{-j4\pi/3}\right)^* = \frac{V^2}{Z} e^{j\varphi} = V I\, e^{j\varphi}$$

Le tre fasi assorbono la **stessa** potenza complessa, quindi:

$$\bar{S} = 3V I\, e^{j\varphi} = \underbrace{3V I \cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{3V I \sin\varphi}_{Q} = P + jQ$$

Potenza attiva e reattiva di un carico trifase equilibrato

$$\bar{S} = 3VI\,e^{j\varphi} = \underbrace{3VI\cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{3VI\sin\varphi}_{Q}$$

- *V*: valore efficace della **tensione di fase** (stellata);
- *I*: valore efficace della **corrente di linea**;
- *φ*: sfasamento tra tensione e corrente di fase (= linea), argomento dell'impedenza di carico *Z*.

In termini di tensione di linea

$$\bar{S} = \underbrace{\sqrt{3}V_\ell I\cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{\sqrt{3}V_\ell I\sin\varphi}_{Q}$$

Fattore di potenza del carico

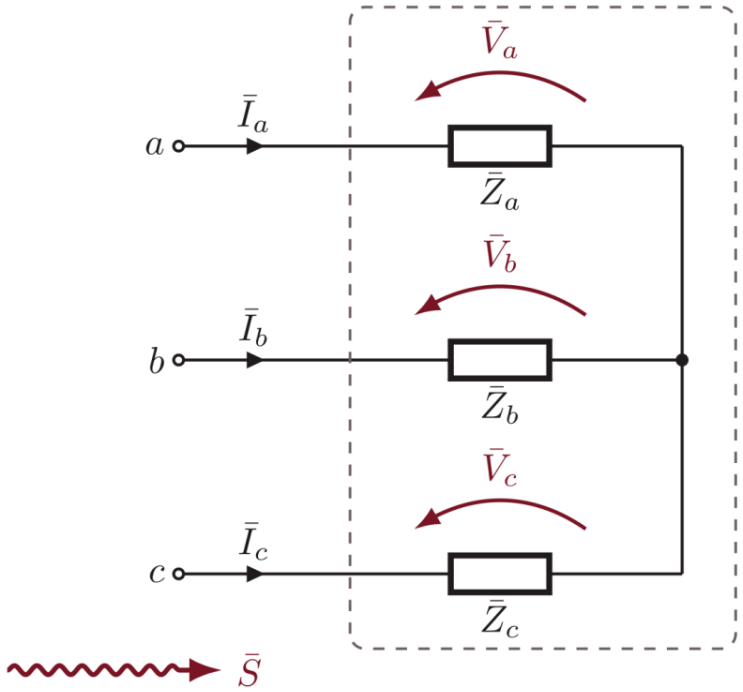
$$\cos\varphi = P/S$$

Potenza nei sistemi trifase: triangolo e carico squilibrato

- Se il sistema è **simmetrico ed equilibrato** con carico a **triangolo**, valgono i risultati precedenti previa trasformazione triangolo → stella:

$$\bar{Z}_Y = \bar{Z}_\Delta / 3$$

- Nel caso di **carico non equilibrato** occorre invece sommare le potenze delle singole fasi, ciascuna con la propria tensione, corrente e sfasamento.



Potenza nei sistemi trifase: carico squilibrato

$$\bar{S} = \bar{S}_a + \bar{S}_b + \bar{S}_c = \bar{V}_a \bar{I}_a^* + \bar{V}_b \bar{I}_b^* + \bar{V}_c \bar{I}_c^* = P + jQ$$

Potenza attiva

$$P = \mathrm{Re}[\bar{S}] = P_a + P_b + P_c = \\ = V_a I_a \cos\varphi_a + V_b I_b \cos\varphi_b + V_c I_c \cos\varphi_c$$

Potenza reattiva

$$Q = \mathrm{Im}[\bar{S}] = Q_a + Q_b + Q_c = \\ = V_a I_a \sin\varphi_a + V_b I_b \sin\varphi_b + V_c I_c \sin\varphi_c$$

Vale il **teorema di Boucherot**: le potenze attive e reattive delle fasi si sommano algebricamente, mentre le potenze apparenti in generale no.