Esercitazione 1

Per Unit e matrice delle ammettenze

September 15, 2026

1 Il sistema Per Unit (p.u.)

Nell'analisi dei sistemi elettrici di potenza è prassi esprimere tensioni, correnti, potenze e impedenze non in unità assolute (V, A , VA, Ω), ma come rapporto rispetto a un valore di riferimento (base), ottenendo così grandezze adimensionali dette per unit (p.u.):

$$\text{valore}_{pu} = \frac{\text{valore effettivo}}{\text{valore di base}}$$

Il sistema in p.u. si usa perché:

- semplifica i calcoli con i trasformatori: se le basi sono scelte coerentemente sui due lati di un trasformatore (in accordo con il suo rapporto di trasformazione), l'impedenza in p.u. è la stessa vista da entrambe i lati, eliminando la necessità di riportare i valori da un livello di tensione all'altro.
- Facilita il confronto: macchine e linee di taglia molto diversa hanno tipicamente impedenze in p.u. comprese in intervalli simili, rendendo più agevole individuare valori anomali.
- riduce il rischio di errore: lavorando con grandezze adimensionali si evitano errori di fattore $\sqrt{3}$ o di conversione tra unità (kV, MVA, Ω tipici dei sistemi trifase.

Procedura per la trasformazione in p.u.

1-Scelta delle grandezze di base
Si scelgono liberamente due grandezze di base indipendenti, solitamente la potenza apparente S_{base} e la tensione V_{base}. La potenza si sceglie tra le potenze nominali dei trasformatori o dei generatori, mentre la tensione di base è quella riferita ad un dato livello di tensione della rete. Da queste si ricavano tutte le altre:

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}\, V_{base}} \qquad Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}} \qquad Y_{base} = \frac{1}{Z_{base}} = \frac{S_{base}}{V_{base}^2}$$

2-Conversione delle grandezze di linea
Per un elemento con reattanza serie X [Ω] e suscettanza shunt B [S]:

$$\dot{x} = \frac{X}{Z_{base}} \qquad \dot{b} = B \cdot Z_{base} = \frac{B}{Y_{base}}$$

D'ora in avanti tutte le grandezze con il pallino indicano valori in p.u..Una volta espresse in pu, tutte le grandezze della rete (reattanze di linea, di trasformatore, di generatore) possono essere combinate direttamente nella stessa base comune.

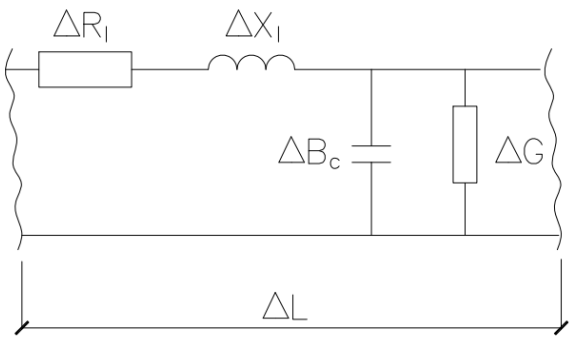


Figure 1: Circuito equivalente di una linea di lunghezza ΔL a parametri distribuiti

2 Modellazioine delle linee elettriche

Il circuito equivalente relativo ad un tratto di linea di lunghezza ΔL può essere schematizzato come in figura 1, ottenendo un circuito a parametri distribuiti dove ΔR_l, ΔX_l, ΔB_c e ΔG sono i parametri longitudinali e trasversali.

Per schematizzare tutta la linea occorrerebbe collegare in cascata tanti doppi bipoli quanti sono i tratti elementari considerati (infiniti).

Per ridurne la complessità si passa dalla rappresentazione della linea a parametri distribuiti a quella a parametri concentrati, dove le costanti elettriche della linea sono concentrate in un solo punto (o in un numero limitato di punti).

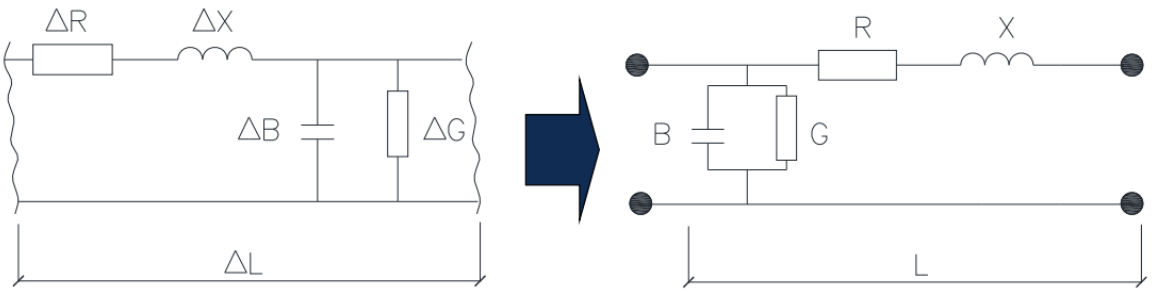


Figure 2: Circuito equivalente di una linea da parametri distribuiti a parametri concentrati

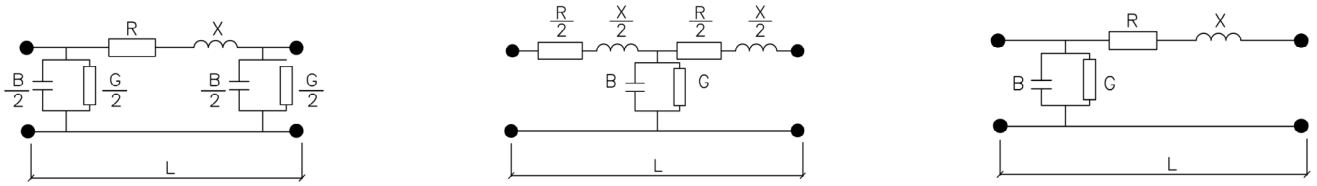
Dati i parametri riferiti all'intera lunghezza L della linea, ovvero: $R[\Omega]$, $X[\Omega]$, $B[S]$ e $G[S]$, allora è possibile ricavare i parametri relativi a una lunghezza unitaria di $1km$ come:

$$r = \frac{R}{L} \qquad x = \frac{X}{L} \qquad b = \frac{B}{L} \qquad g = \frac{G}{L}$$

Esistono diverse modellizzazioni della linea a parametri concentrati e la scelta di quale utilizzare si basa sul compromesso tra complessità e accuratezza del modello. I modelli più utilizzati sono:

- Modello a pi greco
- Modello a T
- Modello a Γ

I modelli a pi greco e a T vengono maggiormente utilizzati nelle reti di trasmissione ovvero nelle reti dove la tensione è molto elevata, mentre il modello a Γ viene maggiormente utilizzato nelle reti di distribuzione, ovvero dove la tensione è bassa.



(a). Modello π **(b).** Modello a T **(c).** Modello a Γ

Figure 3: Modelli equivalenti: (a) modello π, (b) modello a T e (c) modello a Γ.

3 Matrice delle ammettenze (Y)

La matrice delle ammettenze di bus, indicata con Y_{bus}, è la rappresentazione matriciale più comune di una rete elettrica lineare in regime sinusoidale permanente. Essa lega il vettore delle correnti iniettate in ciascun bus al vettore delle tensioni di bus:

$$I = Y_{bus}\, V \tag{1}$$

dove $I \in \mathbb{C}^n$ è il vettore delle correnti iniettate, $V \in \mathbb{C}^n$ il vettore delle tensioni di bus (fasori) e n il numero di bus della rete. Y_{bus} racchiude interamente la topologia della rete e i parametri elettrici di linee, trasformatori e carichi/ generatori shunt, tutti espressi in per unit sulla stessa base comune. Il modello della linea considerato per il calcolo della matrice delle ammettenze è il modello π, questo perché si considerano linee di trasmissione ad alta tensione, dunque si avrà un ramo serie di ammettenza $y = 1/(jx_{pu})$ tra i due bus terminali, e due elementi shunt di ammettenza $j\, b_{pu}/2$, uno per ogni estremo. Questa suddivisione a metà è il motivo per cui, nel calcolo degli elementi sulla diagonale della matrice compare il fattore $b_{ik}/2$: ciascun bus "vede" solo la propria metà della suscettanza totale della linea.

Metodi di costruzione

Metodo per ispezione

Ogni ramo (linea, trasformatore) collegato tra i bus i e j contribuisce alla matrice in due modi: con la propria ammettenza serie y_{ij} e, nel caso di una linea, con le ammettenze shunt (capacitive) ai due estremi. Gli elementi di Y_{bus} si ottengono per sovrapposizione dei contributi di tutti i rami:

- **Elementi diagonali** (auto-ammettenza del bus i): somma di tutte le ammettenze serie dei rami incidenti su i, più la somma delle ammettenze shunt collegate a i.

$$Y_{ii} = \sum_{k\,\in\,\mathcal{N}(i)} y_{ik} \;+\; \sum_{k\,\in\,\mathcal{N}(i)} j\,\frac{b_{ik}}{2} \tag{2}$$

  dove $\mathcal{N}(i)$ è l'insieme dei bus direttamente collegati a i.

- **Elementi fuori diagonale** (mutua ammettenza tra i e j): l'opposto dell'ammettenza serie del ramo che collega direttamente i e j, se esiste; zero altrimenti.

$$Y_{ij} = \begin{cases} -\,y_{ij} & \text{se esiste un ramo diretto tra } i \text{ e } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i \neq j) \tag{3}$$

Interpretazione fisica (metodo delle prove a cortocircuito)

Gli elementi di Y_{bus} hanno anche un'interpretazione fisica diretta, che discende dalla definizione stessa di ammettenza:

$$Y_{ij} = \left.\frac{I_i}{V_j}\right|_{V_k=0,\ \forall k\neq j} \tag{4}$$

In pratica, per ricavare la colonna j di Y_{bus} si può immaginare di:

1. cortocircuitare a terra tutti i bus tranne il bus j;
2. applicare al bus j una tensione unitaria, $V_j = 1$ pu;
3. misurare le correnti I_i che è necessario iniettare in ciascun bus i per mantenere questa condizione (bus j a 1 pu, tutti gli altri a 0 pu).

Questo procedimento dà un significato concreto ai due tipi di elemento della matrice:

- Y_{ii} **(auto-ammettenza)**: con $V_i = 1$ pu e tutti gli altri bus a terra, ogni ramo collegato al bus i (serie o shunt) ha ai propri capi l'intera tensione di 1 pu e fa quindi fluire una corrente pari alla propria ammettenza. La corrente totale da iniettare in i per sostenere $V_i = 1$ pu è dunque la somma delle ammettenze di tutti i rami incidenti su i — esattamente la formula di Y_{ii} vista sopra.
- Y_{ij} **(mutua ammettenza)**: con $V_j = 1$ pu e tutti gli altri bus (compreso i) a terra, il ramo serie che collega direttamente i e j fa fluire una corrente $y_{ij}(V_j - V_i) = y_{ij}$ dal bus j verso il bus i. Per mantenere $V_i = 0$ occorre estrarre dal bus i una corrente pari a quella in arrivo, cioè iniettarvi una corrente $-y_{ij}$: da qui $Y_{ij} = -y_{ij}$. Se i e j non sono collegati da alcun ramo diretto, nessuna corrente raggiunge i e quindi $Y_{ij} = 0$.

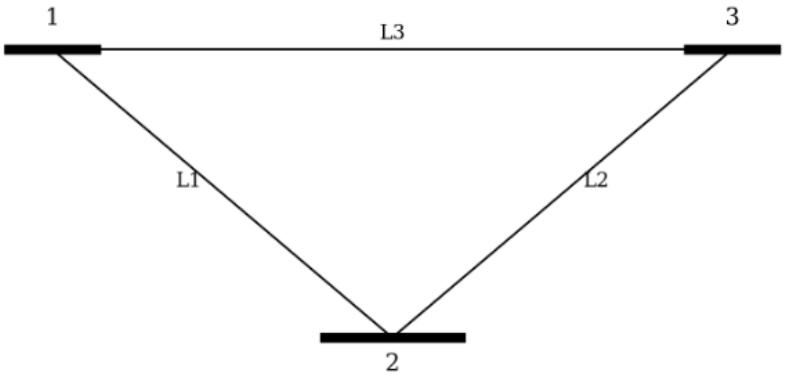
Questa lettura "per prove" è utile perché ricostruisce l'intera matrice Y_{bus}, colonna per colonna, applicando in successione una tensione unitaria a ciascun bus (con tutti gli altri cortocircuitati a terra) e misurando le correnti risultanti — senza dover scrivere esplicitamente le equazioni di Kirchhoff per ogni nodo.

Costruzione tramite la matrice di incidenza

Un metodo alternativo, particolarmente adatto all'implementazione sistematica su calcolatore, costruisce Y_{bus} a partire dalla topologia della rete, espressa come matrice di incidenza ramo–nodo A, e dalla matrice primitiva delle ammettenze di ramo Y_{prim}:

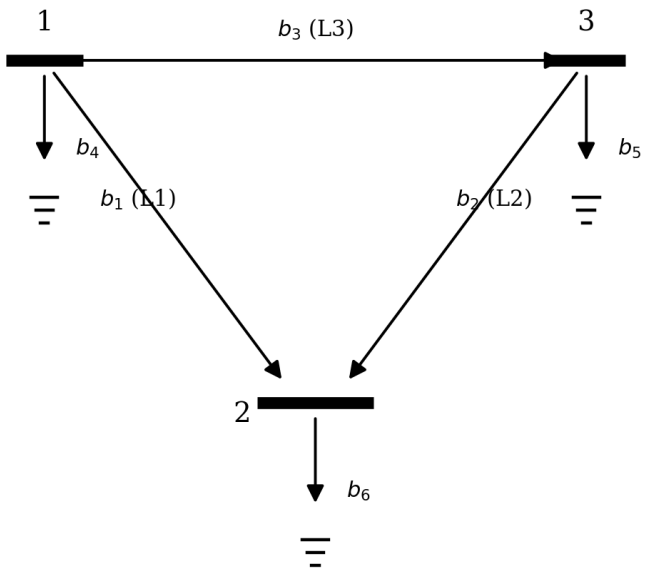
$$Y_{bus} = A^T \, Y_{prim} \, A \tag{5}$$

Vediamo il procedimento passo per passo, applicandolo alla rete a 3 bus di figura 3.



Passo 1 — Numera i rami e assegna un verso di riferimento. Ogni ramo della rete (le tre linee $L1, L2, L3$, ma anche i tre elementi shunt, trattati come rami che vanno da un bus fino a un nodo di riferimento fittizio, la terra) viene numerato e gli si assegna un verso positivo arbitrario, indicato da una freccia.

Rete con versi di riferimento assegnati a ciascun ramo
(la freccia indica il verso positivo del ramo; b_4, b_5, b_6 = shunt verso terra)

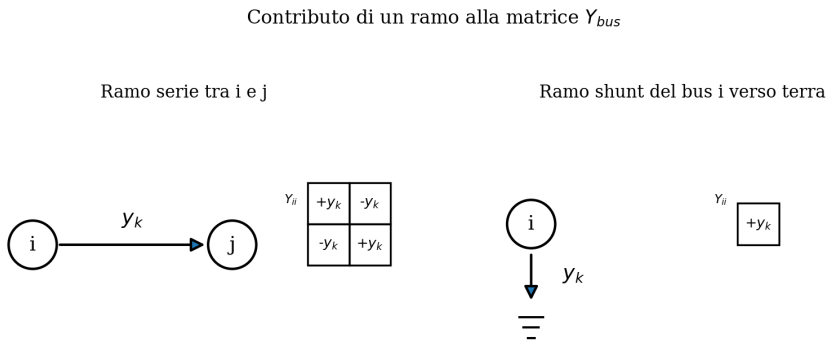


Passo 2 — Costruisci la matrice di incidenza A. Una riga per ogni ramo, una colonna per ogni bus. Nella riga del ramo k: $+1$ nella colonna del bus da cui esce la freccia, -1 nella colonna del bus in cui entra, 0 altrove. Per un ramo shunt (l'altro capo è a terra) resta solo il $+1$.

$$A = \begin{array}{r|ccc} & \text{bus 1} & \text{bus 2} & \text{bus 3} \\ \hline b_1\ (L1,\ 1 \to 2) & 1 & -1 & 0 \\ b_2\ (L2,\ 3 \to 2) & 0 & -1 & 1 \\ b_3\ (L3,\ 1 \to 3) & 1 & 0 & -1 \\ b_4\ \text{(shunt bus 1)} & 1 & 0 & 0 \\ b_5\ \text{(shunt bus 3)} & 0 & 0 & 1 \\ b_6\ \text{(shunt bus 2)} & 0 & 1 & 0 \end{array} \tag{6}$$

Passo 3 — Costruisci la matrice primitiva Y_{prim}. Una matrice diagonale con l'ammettenza di ciascun ramo, nello stesso ordine delle righe di A (i rami serie hanno $y = -j/x_{pu}$; i rami shunt hanno l'ammettenza shunt totale.

Passo 4 — Ogni ramo "vota" le celle a cui contribuisce. Un ramo serie k tra i bus i e j contribuisce con $+y_k$ alle due celle diagonali (i,i) e (j,j), e con $-y_k$ alle due celle fuori diagonale (i,j) e (j,i). Un ramo shunt collegato al solo bus i contribuisce con $+y_k$ alla sola cella diagonale (i,i). Questo è esattamente ciò che fa, riga per riga, il prodotto $A^T Y_{prim} A$.



Passo 5 — Somma i contributi di tutti i rami. Sommando i contributi di tutti e sei i rami si ottiene la matrice completa:

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} y_{L1} + y_{L3} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_3}{2} & -y_{L1} & -y_{L3} \\ -y_{L1} & y_{L1} + y_{L2} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_2}{2} & -y_{L2} \\ -y_{L3} & -y_{L2} & y_{L2} + y_{L3} + j\frac{b_2}{2} + j\frac{b_3}{2} \end{bmatrix} \text{ pu} \tag{7}$$

Questo approccio è quello preferito nei programmi di calcolo (load flow, cortocircuito) perché si generalizza immediatamente a reti di qualsiasi dimensione e topologia: basta costruire A dalla lista dei rami e Y_{prim} dai loro parametri, senza dover scrivere a mano le regole di somma per ogni bus.

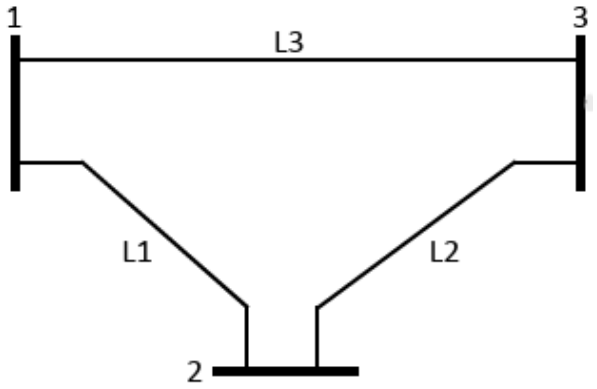
Proprietà utili

- **Simmetria**: per reti passive e reciproche, $Y_{ij} = Y_{ji}$, quindi Y_{bus} è simmetrica.
- **Sparsità**: $Y_{ij} = 0$ per ogni coppia di bus non direttamente collegata da un ramo; nelle reti reali, con molti bus e pochi collegamenti diretti, la matrice è quindi in gran parte fatta di zeri.
- **Verifica per riga/colonna**: la somma degli elementi di ciascuna riga i è uguale esattamente al contributo shunt totale del bus i (poiché i contributi serie si elidono a coppie), utile come controllo di correttezza dopo il calcolo.

Y_{bus} è il punto di partenza per la maggior parte degli studi sui sistemi di potenza — flussi di potenza (load flow), analisi di cortocircuito, studi di stabilità — perché permette di scrivere le equazioni di rete in forma compatta e di sfruttarne la sparsità nei metodi numerici di soluzione.

Esercizio

Si consideri la rete riportata di seguito con le reattanze di linea (x) e le suscettanze totali di linea (b)



Dove

Linea	X [Ω]	B [S]
L1	20	0.020
L2	10	0.014
L3	10	0.012

Table 1: Caption

Si consideri come valori di riferimento $S = 100\ MVA$ e $V = 100\ kV$.
Determinare:

- i parametri delle linee in p.u.
- la matrice delle ammettenze Y

Soluzione

Determinazione dei parametri in p.u.

Partendo dai valori di riferimento di potenza apparente S e della tensione V si vanno a calcolare le altre grandezze di base neccessarie. In questo sono necessarie solo Z_{base} e Y_{base} e le ricaviamo come:

$$Z_{base} = \frac{V^2}{S} = \frac{(100\ kV)^2}{100\ MVA} = 100\ \Omega$$

$$Y_{base} = \frac{S}{V^2} = \frac{1}{Z_{base}} = 0.01\ S$$

Una volta ottenute le grandezze di base possiamo convertire le reattanze delle linee come:

$$\dot{X} = \frac{X}{Z_{base}}$$

ottenendo i seguenti valori di reattanza delle 3 linee:

$$L1 : \dot{X}_1 = \frac{20}{100} = 0.2\ p.u. \qquad L2 : \dot{X}_2 = \frac{10}{100} = 0.1\ p.u. \qquad L3 : \dot{X}_3 = \frac{10}{100} = 0.1\ p.u.$$

Invece per ottenere le suscettanze capacitive di linea in per unit applichiamo:

$$\dot{B} = \frac{B}{Y_{base}} = B \cdot Z_{base}$$

da cui si ottene:

$L1 : \dot{B}_1 = 0.020 \cdot 100 = 2.0\ p.u. \qquad L2 : \dot{B}_2 = 0.014 \cdot 100 = 1.4\ p.u. \qquad L3 : \dot{B}_3 = 0.012 \cdot 100 = 1.2\ p.u.$

Introducendo l'ipotesi che l'impedenza serie della linea abbia resistenza trascurabile, si ottiene $z = jx$, quindi si può calcolare l'ammettenza della linea come:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{j\dot{X}} = -j\frac{1}{\dot{X}}$$

Dunque i valori delle ammettenze in p.u sono:

$$L1 : \dot{Y}_1 = \frac{-j}{0.2} = -j5 \qquad L2 : \dot{Y}_2 = \frac{-j}{0.1} = -j10 \qquad L3 : \dot{Y}_3 = \frac{-j}{0.1} = -j10$$

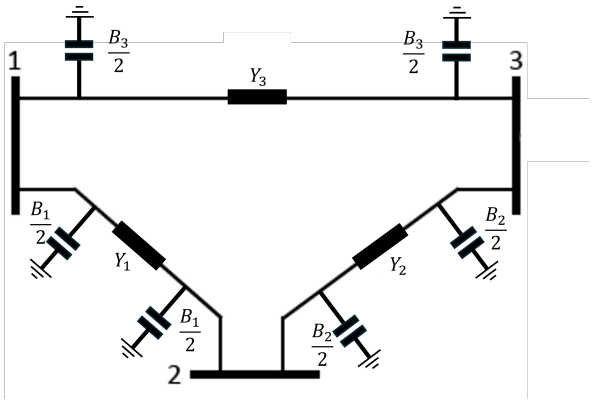
Riassumendo i parametri della linea in $p.u.$ sono:

Linea	$\dot{X}$	$\dot{Y}$	$\dot{B}$
1	0.2	-j5	2
2	0.1	-j10	1.4
3	0.1	-j10	1.2

Table 2

Calcolo della matrice delle ammettenze

Metodo per ispezione Si disegna la rete con tutti i parametri in p.u. considerando il modello π per le linee.



Per ottenere la matriche delle ammettenze con il metodo per ispezione seguiamo le seguenti regole:

$$Y_{ii} = \sum(\text{ammettenze serie collegate a } i) \ + \ \sum(\text{shunt collegati a } i$$

$$Y_{ij} = -(\text{ammettenza serie tra il bus } i \text{ e il bus } j)$$

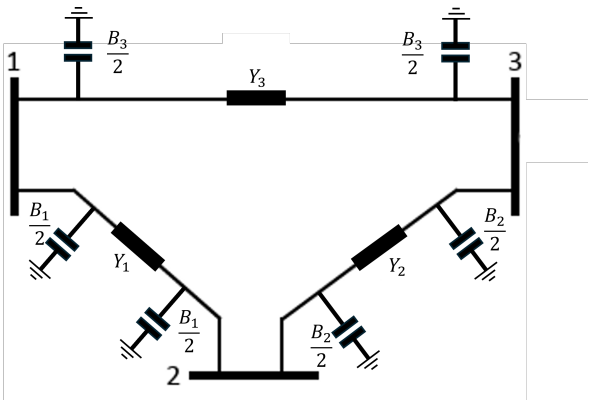
Dunque si ottiene:

- $Y_{11} = Y_1 + Y_3 + j(B_1/2 + B_3/2) = -j13.4$
- $Y_{22} = Y_1 + Y_2 + j(B_1/2 + B_2/2) = -j13.3$
- $Y_{33} = Y_2 + Y_3 + j(B_2/2 + B_3/2) = -j18.7$
- $Y_{12} = Y_{21} = -Y_1 = j5$
- $Y_{13} = Y_{31} = -Y_3 = j10$
- $Y_{23} = Y_{32} = -Y_2 = j10$

$$Y_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} y_{L1} + y_{L3} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_3}{2} & -y_{L1} & -y_{L3} \\ -y_{L1} & y_{L1} + y_{L2} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_2}{2} & -y_{L2} \\ -y_{L3} & -y_{L2} & y_{L2} + y_{L3} + j\frac{b_2}{2} + j\frac{b_3}{2} \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

$$= j \begin{bmatrix} -13.4 & 5 & 10 \\ 5 & -13.3 & 10 \\ 10 & 10 & -18.7 \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

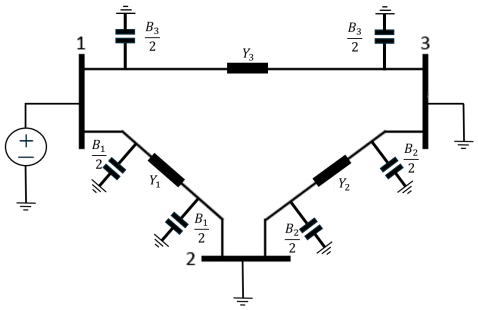
Metodo fisico Partendo sempre dalla figura dello schema del circuito



Si calcola la corrente iniettata nella rete dai tre bus

$$I_1 = Y_1(V_1 - V_2) + Y_3(V_1 - V_3) + j(B_1/2)V_1 + j(B_3/2)V_1$$
$$I_2 = Y_1(V_2 - V_1) + Y_2(V_2 - V_3) + j(B_1/2)V_2 + j(B_3/2)V_2$$
$$I_3 = Y_3(V_3 - V_1) + Y_2(V_3 - V_2) + j(B_3/2)V_3 + j(B_2/2)V_3$$

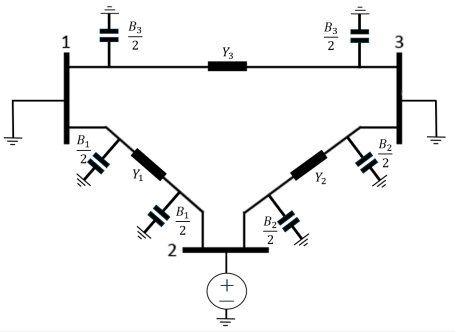
Per ricavare la prima colonna della matrice delle ammettenze, si ipotizza di cortocircuitare i bus 2 e 3 e di collegare un generatore di tensione di valore unitario, quindi $V_1 = 1$, dunque le equazioni delle correnti diventano:



$$I_1 = Y_1(1 - 0) + Y_3(1 - 0) + j(B_1/2)1 + j(B_3/2)1$$
$$I_2 = Y_1(0 - 1) + Y_2(0 - 0) + j(B_1/2)0 + j(B_3/2)0$$
$$I_3 = Y_3(0 - 1) + Y_2(0 - 0) + j(B_3/2)0 + j(B_2/2)0$$

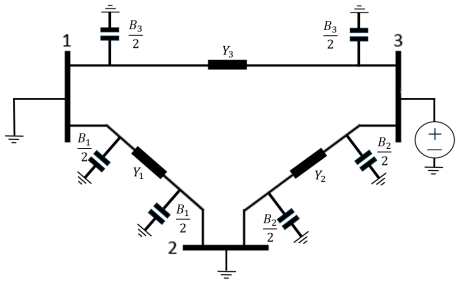
Per ricavare la seconda colonna si cortocircuitano i bus 1 e 3 e si collega un generatore unitario al bus due $V_2 = 1$, dunque le equazioni delle correnti diventano:

$$I_1 = Y_1(0 - 1) + Y_3(0 - 0) + j(B_1/2)0 + j(B_3/2)0$$
$$I_2 = Y_1(1 - 0) + Y_2(1 - 0) + j(B_1/2)1 + j(B_3/2)1$$
$$I_3 = Y_3(0 - 0) + Y_2(0 - 1) + j(B_3/2)0 + j(B_2/2)0$$



Infine, per calcolare la terza colonna della matrice cortocircuitiamo i bus 1 e 2 e colleghiamo un generatore unitario al bus 3 $V_3 = 1$

$$I_1 = Y_1(0-0) + Y_3(0-1) + j(B_1/2)0 + j(B_3/2)0$$
$$I_2 = Y_1(0-0) + Y_2(0-1) + j(B_1/2)0 + j(B_3/2)0$$
$$I_3 = Y_3(1-0) + Y_2(1-0) + j(B_3/2)1 + j(B_2/2)1$$



In questo modo si è ottenuta la matrice completa identica a quella ottenuta con il metodo per ispezione

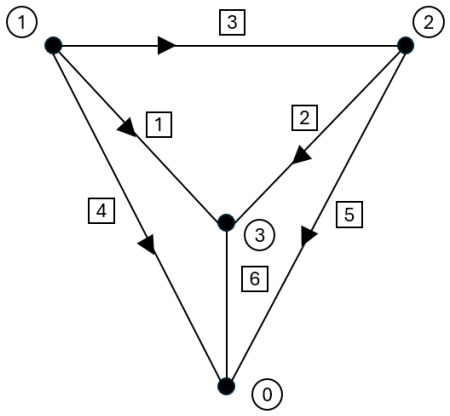
$$Y_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} y_{L1} + y_{L3} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_3}{2} & -y_{L1} & -y_{L3} \\ -y_{L1} & y_{L1} + y_{L2} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_2}{2} & -y_{L2} \\ -y_{L3} & -y_{L2} & y_{L2} + y_{L3} + j\frac{b_2}{2} + j\frac{b_3}{2} \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

$$= j \begin{bmatrix} -13.4 & 5 & 10 \\ 5 & -13.3 & 10 \\ 10 & 10 & -18.7 \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

Metodo della matrice di incidenza Il primo passo è quello di trasformare la rete considerata in un grafo dove i bus diventano dei nodi e le linee diventano rami. I nodi e i rami vengono numerate. Dopodiché si sceglie un riferimento, nel presente caso si considera un riferimento esterno alla rete identificato con 0. Infine si decide il verso dei rami. Per l'elemento a_ij della matrice di incidenza si considera:

- +1 se esce dal nodo
- -1 se entra nel nodo
- 0 se il nodo non è considerato

Nota:Si ricorda che questa scelta è arbitraria



Dunque si ottiene la seguente matrice di incidenza:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso le colonne della matrice rappresentano i nodi del grafo, mentre le righe rappresentano i rami. In seguito si calcola Y_{prim} come

$$Y_{prim} = diag(Y_1, Y_2, Y_3, jB_1, jB_2, jB_3)$$

Infine si ottiene la matrice delle ammettenze applicando:

$$Y = A^T Y_{prim} A$$

Si ottiene la medesima matrice ricavata con i metodi precedentemente descritti

$$Y_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} y_{L1} + y_{L3} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_3}{2} & -y_{L1} & -y_{L3} \\ -y_{L1} & y_{L1} + y_{L2} + j\frac{b_1}{2} + j\frac{b_2}{2} & -y_{L2} \\ -y_{L3} & -y_{L2} & y_{L2} + y_{L3} + j\frac{b_2}{2} + j\frac{b_3}{2} \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

$$= j \begin{bmatrix} -13.4 & 5 & 10 \\ 5 & -13.3 & 10 \\ 10 & 10 & -18.7 \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$