UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Regime sinusoidale permanente e potenze in regime sinusoidale

Fondamenti di Ingegneria Elettrica · Fasori · Impedenze e ammettenze · Potenza attiva, reattiva e complessa

01

Il regime sinusoidale

Funzioni periodiche e sinusoidali, valore efficace, transitorio e regime permanente

Introduzione al regime sinusoidale permanente

- Consideriamo circuiti con sorgenti variabili nel tempo; in particolare ci concentriamo su forme d'onda periodiche di tipo **sinusoidale**.
- Questi circuiti hanno un ruolo fondamentale negli impianti industriali e civili: la **generazione**, la **distribuzione** e l'**utilizzo** dell'energia avvengono in regime sinusoidale permanente (AC, *alternating current*, corrente alternata).
- Inoltre qualunque segnale periodico può essere scomposto nella somma di funzioni seno e coseno (**sviluppo in serie di Fourier**): un'applicazione molto importante in elettronica e nell'analisi dei segnali.

Regime sinusoidale permanente

1. **Generazione**
   centrali con alternatori sincroni
2. **Trasmissione e distribuzione**
   linee e trasformatori in AC
3. **Utilizzo**
   carichi civili e industriali

Funzioni periodiche

Definizioni e proprietà generali delle funzioni periodiche

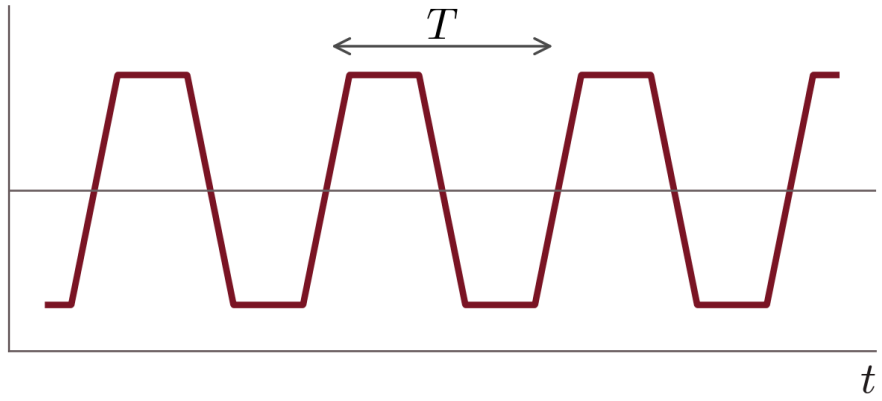
- Una funzione del tempo **periodica** di periodo *T* soddisfa la condizione:

$$a(t_0 + T) = a(t_0) \qquad \forall\, t_0$$

- Al periodo *T* è associata la **frequenza** $f=1/T$
- **Valore medio** della funzione $a(t)$:

$$a_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)\, dt$$

- Le funzioni periodiche a valore medio nullo si dicono **alternate**.



Esempio di funzione periodica alternata di periodo *T*

Funzioni periodiche: valore efficace

- Il **valore efficace** (rms, *root mean square*) di una funzione periodica è:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a(t)^2\,dt}$$

Il valore efficace è la grandezza di riferimento per tensioni e correnti alternate: i valori di targa (ad es. 230 V) sono valori efficaci.

- Le **funzioni sinusoidali** sono un tipo particolare di segnali periodici e alternati:

$$a(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi)$$
$$b(t) = B_x \cos(\omega t + \psi)$$

  - A_x, B_x: ampiezze (valori massimi)
  - ω: pulsazione, $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \omega/2\pi$
  - φ, ψ: angoli di fase

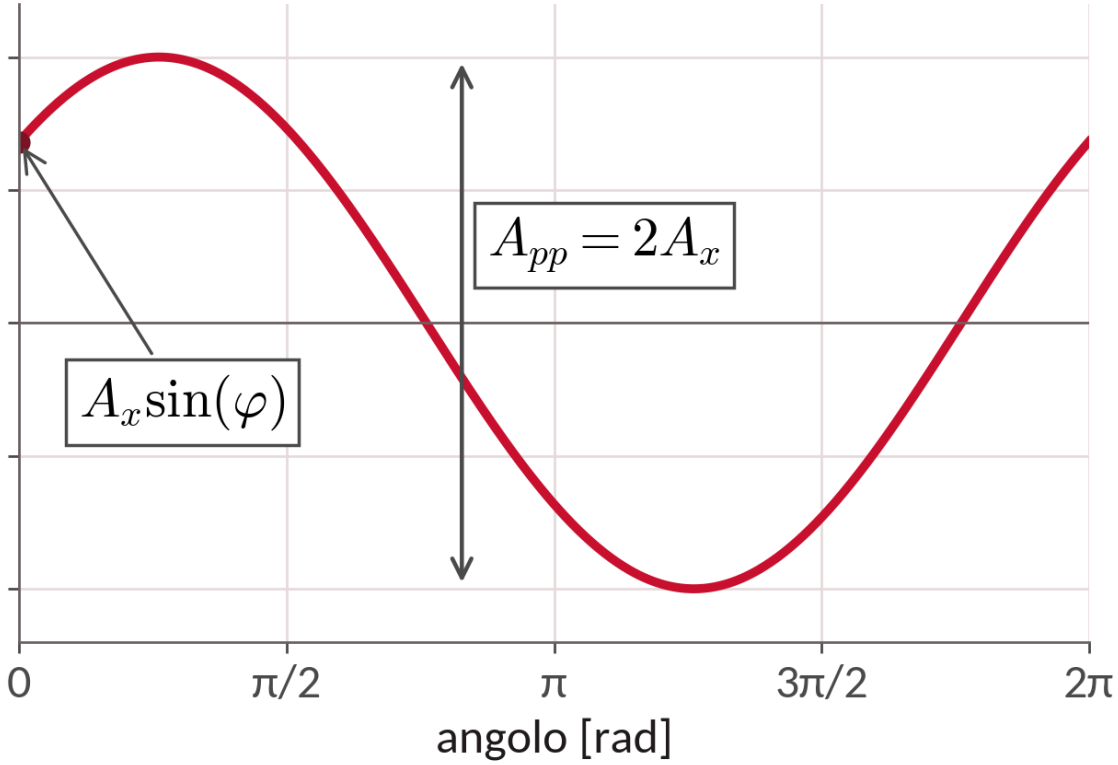
Funzioni sinusoidali

- Scegliendo opportunamente l'angolo di fase:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

è quindi del tutto equivalente esprimersi in termini di funzioni **seno** o **coseno**.

L'ampiezza picco-picco di una sinusoide è $A_{pp}=2A_x$; il valore iniziale vale $A_x\sin(\varphi)$.



Funzioni sinusoidali: valore efficace

- Applicando la definizione di valore efficace a una funzione sinusoidale si ottiene:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(A_x \sin(\omega t + \varphi)\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{A_x^2}{2}\left(1 - \cos 2(\omega t + \varphi)\right) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{A_x^2}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} dt} = \sqrt{\frac{A_x^2}{2T}\,T} = \frac{A_x}{\sqrt{2}}$$

Valore massimo

A_x è il **valore massimo** (ampiezza) della sinusoide.

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari al valore massimo diviso √2.

$$A = \frac{A_x}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\, A_x$$

Significato fisico del valore efficace

- Si consideri una corrente sinusoidale $i(t)=I_x \sin(\omega t)$ che attraversa un resistore R: l'energia dissipata in un periodo è

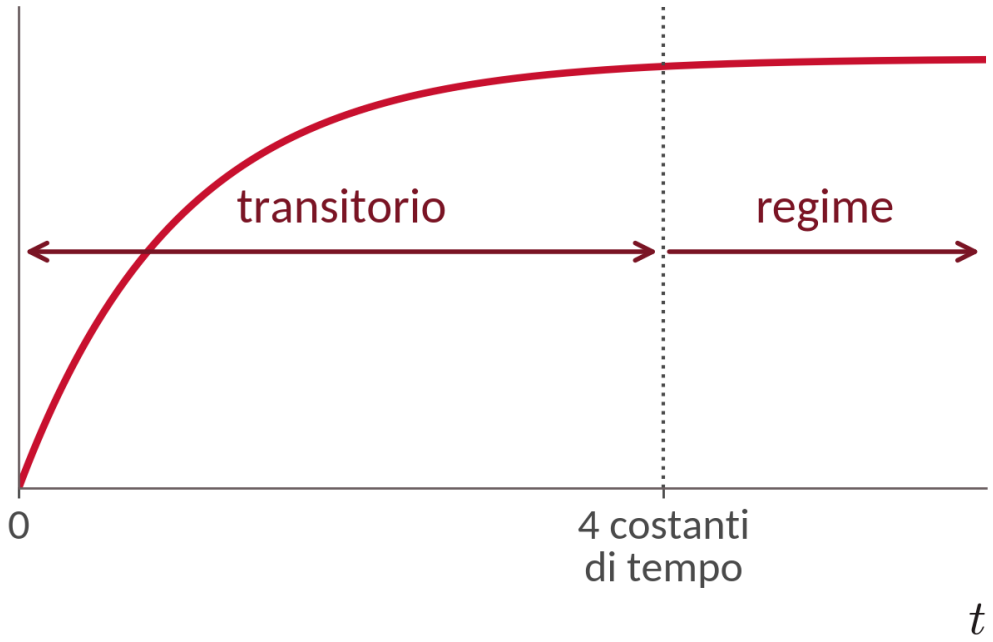
$$W = \int_0^T R \left(I_x \sin(\omega t)\right)^2 dt =$$

$$= RT \left(\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, dt} \right)^2 = R\, I^2\, T$$

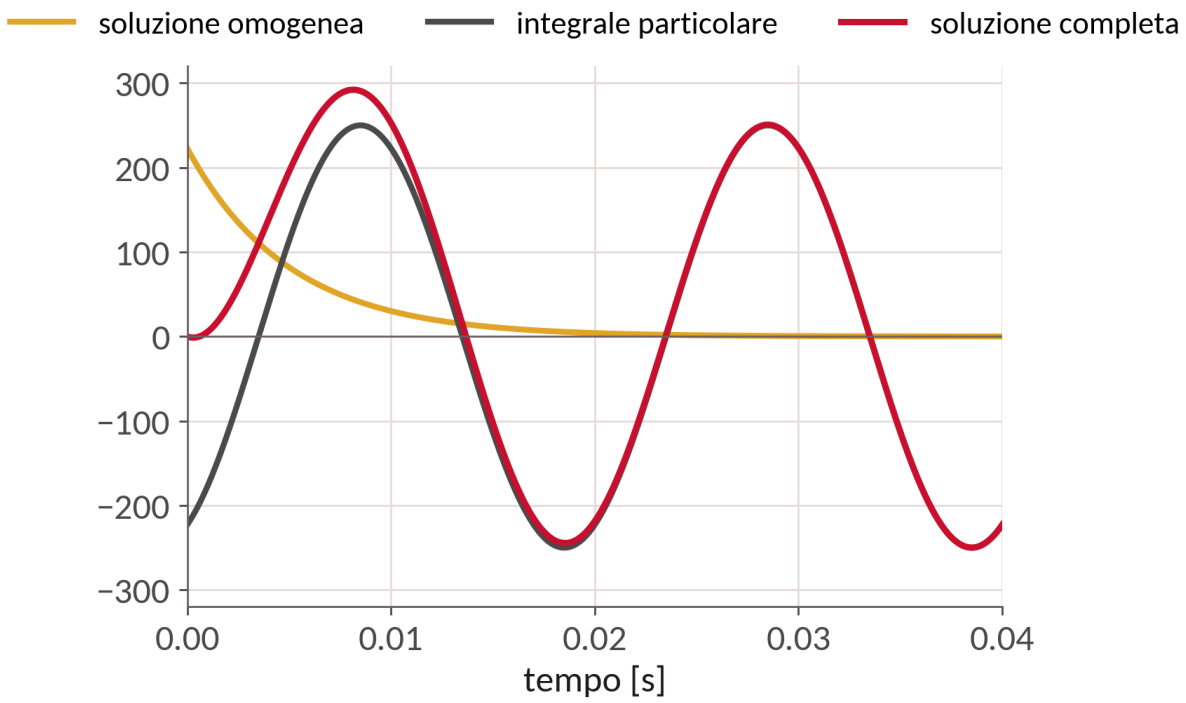
Quindi in un periodo T la corrente $i(t)$ dissipa su R la **stessa energia** di una corrente continua di valore pari al suo **valore efficace** I.

Risposta transitoria e risposta a regime

- Nell'intervallo **transitorio** nelle grandezze di rete sono presenti sia la risposta naturale sia la risposta forzata.
- Nell'intervallo di **regime**, che dura per $4\tau<t<+\infty$ o fino a una nuova perturbazione, il circuito non cambia e la dinamica delle grandezze di rete coincide con quella della **risposta forzata**.



Transitorio e regime nel caso sinusoidale



- In un circuito **stabile** il raggiungimento della condizione di regime è garantito.
- Nelle applicazioni reali l'analisi del transitorio in AC ha un ruolo solo marginale.
- L'interesse principale è rivolto alla **soluzione in condizioni di regime**.

02

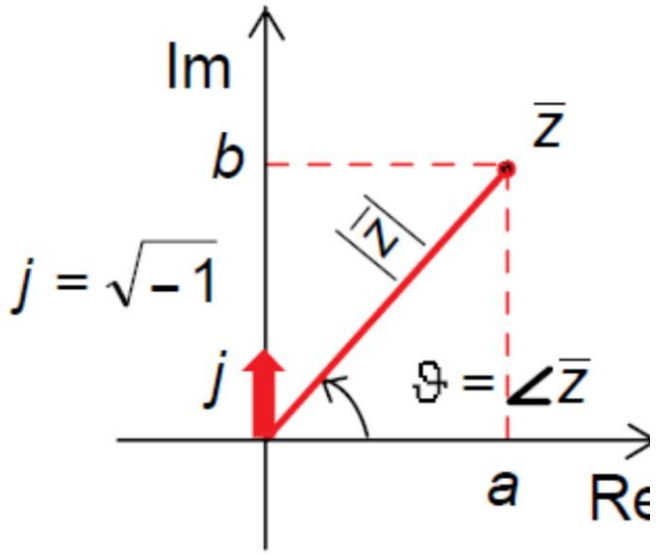
Il metodo dei fasori

Numeri complessi, vettori rotanti, fasori e loro proprietà

Metodo dei fasori: numeri complessi

- L'ingresso sinusoidale è così importante nella pratica che è stato definito un formalismo apposito per trattare le funzioni sinusoidali del tempo mediante l'**algebra dei numeri complessi**.
- Un numero complesso può essere scritto in **forma binomia** (rettangolare) o in **forma esponenziale** (polare).

Piano di Argand-Gauss



Forma binomia (rettangolare)

$$\bar{z} = a + jb$$

Forma esponenziale (polare)

$$\bar{z} = |\bar{z}|\, e^{j\vartheta}$$

$j = \sqrt{-1}$; $j^2 = -1$

Numeri complessi: conversioni tra le forme

Da forma binomia a forma esponenziale

$$\bar{z} = a + jb \quad \Longrightarrow$$

$$a = \mathrm{Re}[\bar{z}]$$

$$b = \mathrm{Im}[\bar{z}]$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = z$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Da forma esponenziale a forma binomia

$$\bar{z} = |\bar{z}|\, e^{j\vartheta} \quad \Longrightarrow$$

$$a = |\bar{z}| \cos(\vartheta)$$

$$b = |\bar{z}| \sin(\vartheta)$$

Il passaggio inverso usa la **formula di Eulero**: $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$.

Numeri complessi: forma cartesiana e forma esponenziale

Forma cartesiana o rettangolare

$$z = x + j\,y$$

$$x = \mathrm{Re}[z] \qquad y = \mathrm{Im}[z]$$

x: **parte reale** · *y*: **parte immaginaria**

Forma esponenziale

$$z = \rho\, e^{j\phi}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ρ: **modulo** · *φ*: **argomento** (fase)

Numeri complessi: formula di Eulero

Formula di Eulero

$$z = \rho\, e^{j\phi} = \rho\left[\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right]$$

$$x = \mathrm{Re}[z] = \rho\cos(\phi) \qquad y = \mathrm{Im}[z] = \rho\sin(\phi)$$

Attenzione al quadrante nel calcolo della fase

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{quadranti 1 e 4}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \qquad \text{quadranti 2 e 3}$$

Esempio

z_1=1+j1 (1° quadrante):

$$\rho = \sqrt{2}, \qquad \phi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

z_2=−1−j1 (3° quadrante):

$$\rho = \sqrt{2}, \qquad \phi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

La funzione $\tan^{-1}$ da sola non distingue z_1 da z_2: il rapporto y/x è lo stesso!

Vettore rotante e funzioni sinusoidali

Funzioni sinusoidali ⇔ numeri complessi

- L'idea di rappresentare una sinusoide con un numero complesso si basa sull'**identità di Eulero**:

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta \qquad\qquad j = \sqrt{-1}\ ;\ j^2 = -1$$

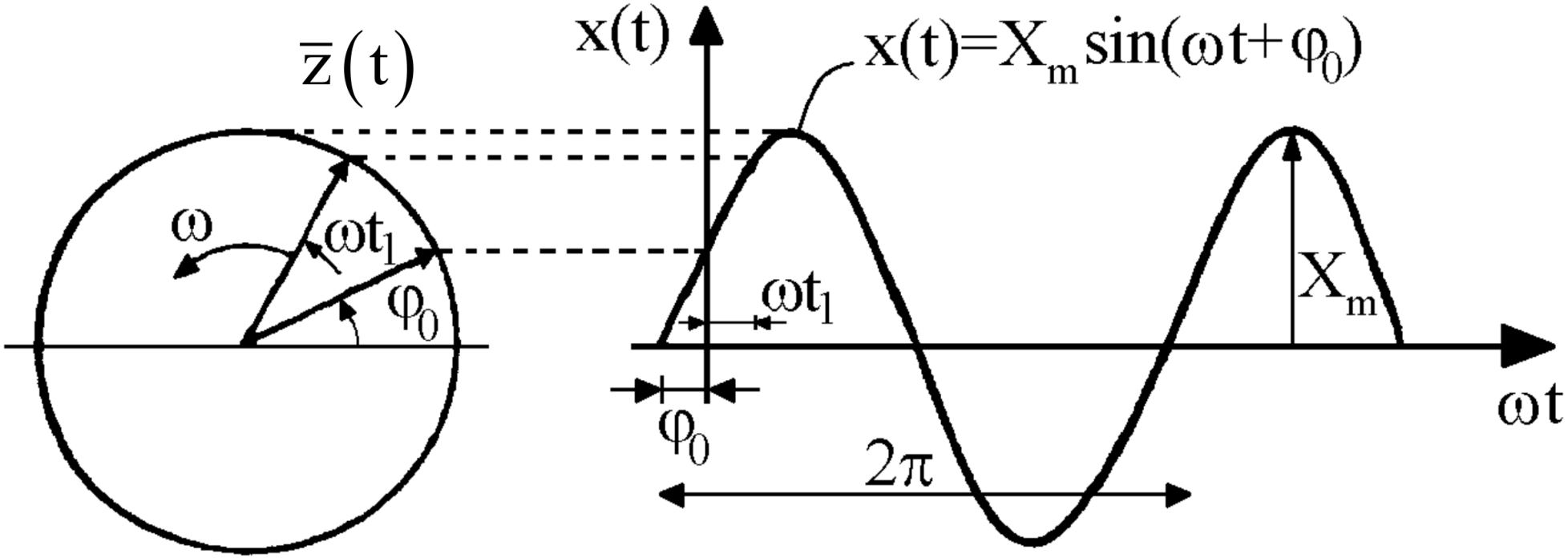
- Un punto del piano complesso che ruota con velocità angolare uniforme attorno all'origine su un'orbita circolare, con posizione iniziale (a t=0) di fase φ, è descritto dall'equazione:

$$\bar{z}(t) = z\, e^{j(\omega t+\varphi)} \qquad \text{vettore rotante}$$

- Le sue proiezioni sugli assi reale e immaginario sono:

$$a(t) = \mathrm{Re}\{\bar{z}(t)\} = z\cos(\omega t+\varphi) \qquad \text{funzione coseno}$$
$$b(t) = \mathrm{Im}\{\bar{z}(t)\} = z\sin(\omega t+\varphi) \qquad \text{funzione seno}$$

Vettore rotante e funzioni sinusoidali: interpretazione grafica



$$\bar{z}(t) = z\, e^{j(\omega t+\varphi)} \qquad \text{vettore rotante}$$

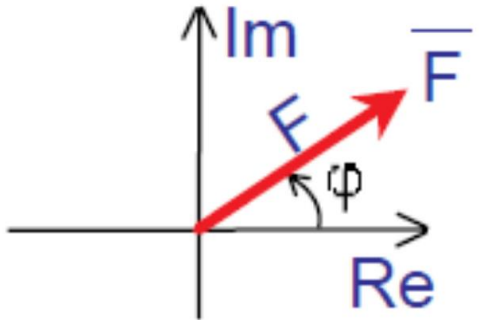
- Un legame tra $\bar{z}(t)$ e le funzioni **coseno** o **seno** si ottiene quindi applicando l'operatore Re{$\bar{z}(t)$} oppure Im{$\bar{z}(t)$}.

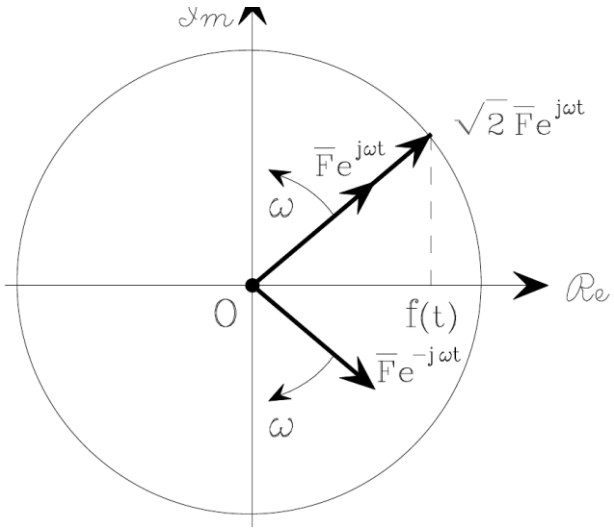
Metodo dei fasori: dalla sinusoide al fasore

- La generica funzione sinusoidale $f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\varphi)$ viene associata alla funzione:

$$\bar{z}(t) = \sqrt{2}Fe^{j(\omega t+\varphi)} = \sqrt{2}\,Fe^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

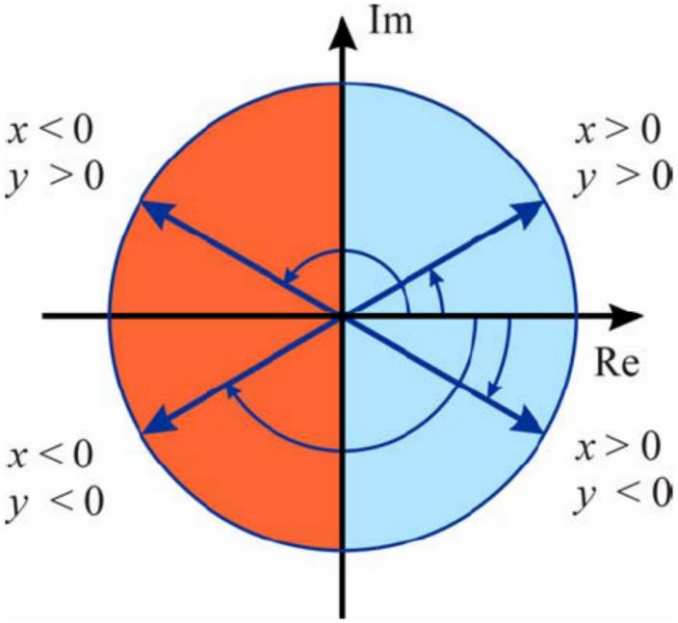
- La quantità $Fe^{j\varphi}$ **non dipende da** t e contiene, a meno del fattore $\sqrt{2}$, due delle informazioni della funzione sinusoidale:
  - l'ampiezza, tramite il valore efficace F;
  - la fase φ.
- Tale quantità è detta **fasore** F della funzione $f(t)$ e può essere rappresentata nel piano complesso.





Metodo dei fasori: dal fasore alla sinusoide

$$\bar{A} = x + jy = A_M\, e^{j\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} a(t) &= \mathrm{Re}\{\bar{A}\, e^{j\omega t}\} = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= |\bar{A}| \cos\big(\omega t + \arg(\bar{A})\big) \end{aligned}$$



$$A_M = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + \pi \cdot \mathrm{sgn}(y) & \text{per } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \mathrm{sgn}(y) & \text{per } x = 0 \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & \text{per } y < 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ 1 & \text{per } y > 0 \end{cases}$$

Proprietà dei fasori: prodotto per una costante e somma

- **Prodotto per una costante**: moltiplicare una funzione sinusoidale per una costante *K* equivale a moltiplicare per *K* il fasore corrispondente

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi) \;\Rightarrow\; \bar{A}_M = A_M\, e^{j\alpha}$$

$$y(t) = K\, a(t) = K\ \mathrm{Re}\{\bar{A}_M e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{K \bar{A}_M e^{j\omega t}\} \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{Y}_M = K\, \bar{A}_M} \qquad K > 0,\ K \in \mathbb{R}$$

- **Somma**: alla somma di due sinusoidi isofrequenziali corrisponde il fasore dato dalla somma dei due fasori

$$a_{1,2}(t) = A_{M1,2} \cos(\omega t + \alpha_{1,2}) \;\Rightarrow\; \bar{A}_{M1,2} = A_{M1,2}\, e^{j\alpha_{1,2}}$$

$$y(t) = a_1(t) + a_2(t) = \mathrm{Re}\{\bar{A}_{M1} e^{j\omega t}\} + \mathrm{Re}\{\bar{A}_{M2} e^{j\omega t}\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{(\bar{A}_{M1} + \bar{A}_{M2})\, e^{j\omega t}\} \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{Y}_M = \bar{A}_{M1} + \bar{A}_{M2}}$$

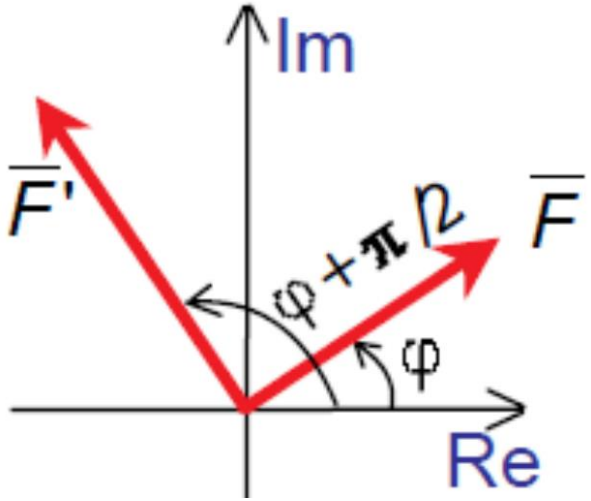
Proprietà dei fasori: derivata e integrale

- **Derivata**: alla derivata di una funzione sinusoidale di pulsazione ω corrisponde il fasore della sinusoide moltiplicato per $j\omega$

$$y(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{d\ \mathrm{Re}\{\bar{A}_M e^{j\omega t}\}}{dt} = \mathrm{Re}\left\{\frac{d\,\bar{A}_M e^{j\omega t}}{dt}\right\} =$$
$$= \mathrm{Re}\{j\omega\,\bar{A}_M e^{j\omega t}\} \Rightarrow \boxed{\bar{Y}_M = j\omega\,\bar{A}_M}$$

- **Integrale**: all'integrale di una funzione sinusoidale di pulsazione ω corrisponde il fasore della sinusoide diviso per $j\omega$

$$y(t) = \int a(t)\,dt = \int \mathrm{Re}\{\bar{A}_M e^{j\omega t}\}\,dt = \mathrm{Re}\left\{\int \bar{A}_M e^{j\omega t} dt\right\} =$$
$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{\bar{A}_M}{j\omega} e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \boxed{\bar{Y}_M = \frac{\bar{A}_M}{j\omega}}$$



Derivare equivale a **moltiplicare per** $j\omega$: il fasore ruota di $+\pi/2$ e il modulo è moltiplicato per ω.

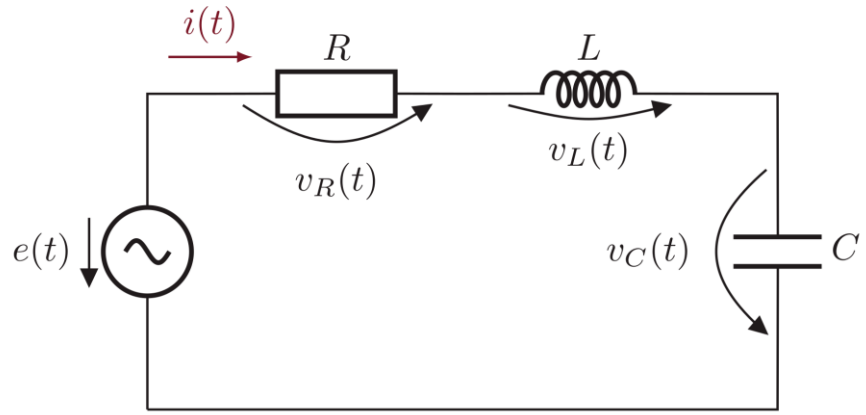
03

Analisi dei circuiti nel dominio dei fasori

Dall’equazione differenziale all’equazione algebrica, leggi di Kirchhoff, relazioni costitutive, impedenza, induttori accoppiati

Metodo dei fasori e soluzione del circuito a regime

Esempio: circuito RLC con ingresso sinusoidale



$$\begin{cases} e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ R\,i(t) + L\dfrac{d}{dt}i(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\,dt = e(t) \end{cases}$$

equazione differenziale

- Considerando l'ingresso sinusoidale e usando l'identità del metodo dei fasori:

$$e(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\{Ee^{j\alpha}e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\{\bar{E}\,e^{j\omega t}\}$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\{Ie^{j\beta}e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\{\bar{I}\,e^{j\omega t}\}$$

dove *I* e *β* sono le **incognite**.

Metodo dei fasori e soluzione del circuito: sostituzione

- Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$R\,\mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\} + L\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\} + \frac{1}{C}\int \mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\}dt - \mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{E}e^{j\omega t}\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R\,\mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\} + L\,\mathrm{Re}\{\sqrt{2}\,j\omega\bar{I}e^{j\omega t}\} + \frac{1}{C}\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\frac{1}{j\omega}\bar{I}e^{j\omega t}\right\} - \mathrm{Re}\{\sqrt{2}\bar{E}e^{j\omega t}\} = 0$$

- Alcuni fattori sono comuni a tutti i termini e possono essere eliminati, √2 ed $e^{j\omega t} \neq 0$, poiché la soluzione deve valere per ogni t:

$$\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\left(\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]\bar{I} - \bar{E}\right)e^{j\omega t}\right\} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]\bar{I} = \bar{E}}$$

Metodo dei fasori e soluzione del circuito: equazione algebrica

- L'equazione finale è **algebrica**, con incognita complessa $\bar{I}$: la soluzione si ottiene con l'algebra dei numeri complessi

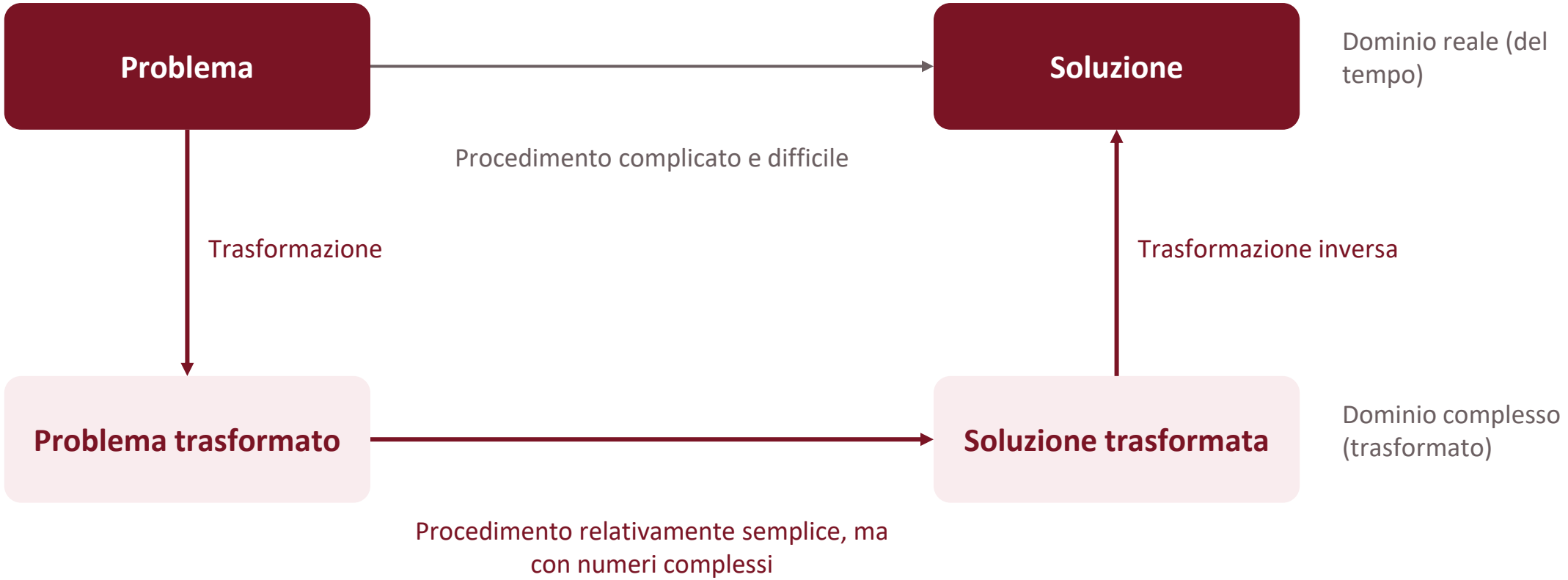
$$\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]\bar{I} = \bar{E} \;\Rightarrow\; \bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \;\Rightarrow\; i(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{\bar{I}\,e^{j\omega t}\}$$

- In molte applicazioni interessa solo la **risposta a regime**: il metodo dei fasori può allora essere applicato in forma più diretta.
- Le equazioni del circuito possono essere scritte **direttamente in termini di fasori**: la scrittura dell'**equazione differenziale** diventa superflua.

tempo	fasore
$\sqrt{2}F\cos(\omega t + \varphi)$	$Fe^{j\varphi}$
k	K
d/dt	$j\omega$
$\int \ldots dt$	$1/j\omega$
$\langle xy \rangle$	$\mathrm{Re}\{\bar{X}\underline{Y}\}$

L’idea del metodo: risolvere nel dominio trasformato

Un problema nel dominio del tempo, complicato da risolvere, viene **trasformato** nel piano complesso, dove si risolve con un procedimento relativamente semplice (soluzione trasformata); la soluzione nel tempo si ottiene infine con la **trasformazione inversa**.



Equazioni costitutive in forma fasoriale: resistore

- Resistore lineare alimentato da una corrente sinusoidale:

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_I) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \underbrace{I e^{j\varphi_I}}_{\bar{I}} e^{j\omega t}\right]$$

- Applicando la legge di Ohm:

$$v(t) = R\sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_I) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \underbrace{RI e^{j\varphi_I}}_{\bar{V}} e^{j\omega t}\right]$$

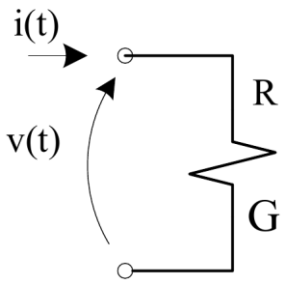
- Il fasore della tensione ai morsetti di *R* è:

$$\boxed{\bar{V} = R\,\bar{I} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |\bar{V}| = RI \\ \angle \bar{V} = \varphi_I \end{cases}}$$

Resistore: dominio del tempo e dominio dei fasori

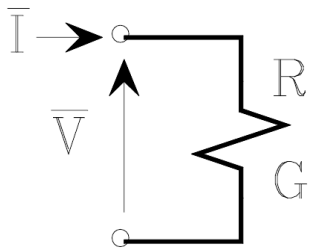
Tempo

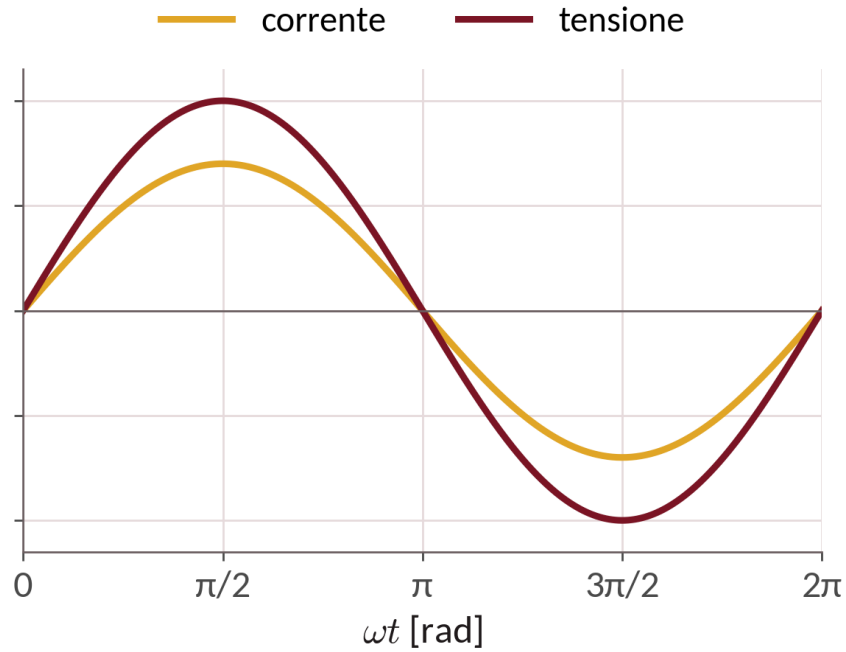
$$\begin{cases} v(t) = R \cdot i(t) \\ i(t) = G \cdot v(t) \end{cases}$$

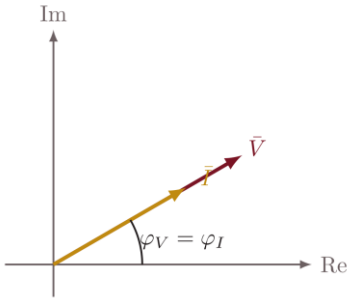


Fasore

$$\begin{cases} \bar{V} = R \cdot \bar{I} \\ \bar{I} = G \cdot \bar{V} \end{cases}$$







Tensione e corrente sono in fase

Equazioni costitutive in forma fasoriale: condensatore

- Condensatore lineare alimentato da una tensione sinusoidale:

$$v(t) = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \varphi_V) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\,\underbrace{V e^{j\varphi_V}}_{\bar{V}}\, e^{j\omega t}\right]$$

- Applicando l'equazione costitutiva:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\,\underbrace{j\omega C V e^{j\varphi_V}}_{\bar{I}}\, e^{j\omega t}\right]$$

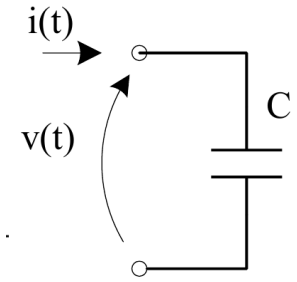
- Il fasore della corrente nel condensatore è:

$$\bar{I} = j\omega C\,\bar{V} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |\bar{I}| = \omega C V \\ \angle\bar{I} = \varphi_V + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Condensatore: dominio del tempo e dominio dei fasori

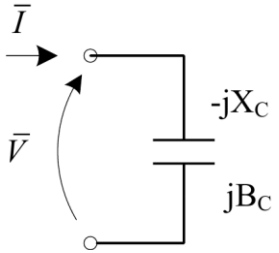
Tempo

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt \\ i(t) = C\,\dfrac{dv(t)}{dt} \end{cases}$$

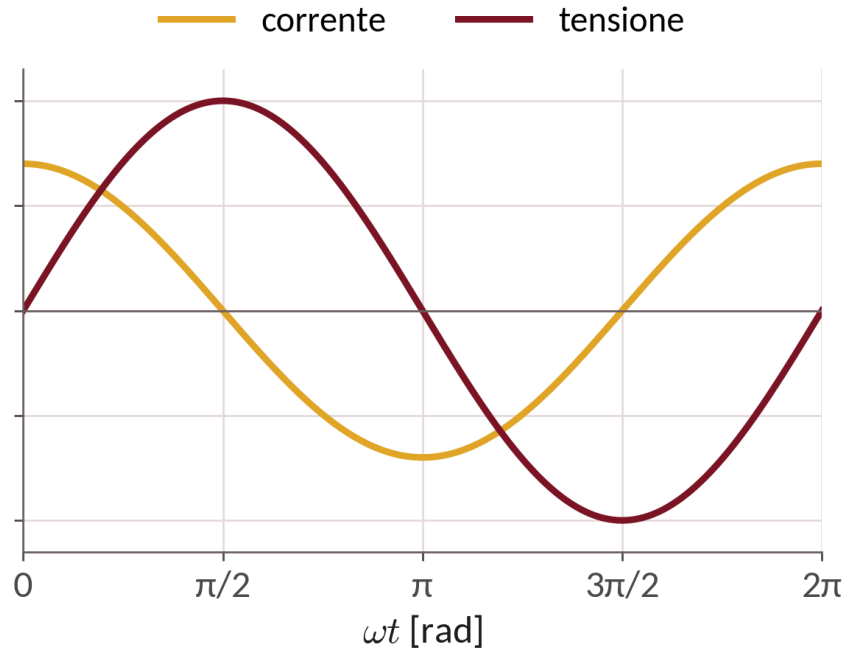


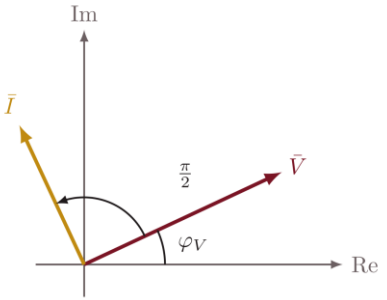
Fasore

$$\begin{cases} \bar{V} = -j\dfrac{1}{\omega C}\cdot\bar{I} \\ \bar{I} = j\omega C\cdot\bar{V} \end{cases}$$



$$X_C = \frac{1}{\omega C}\ [\Omega] \qquad B_C = \omega C\ [\mathrm{S}]$$





La corrente è in anticipo di 90° rispetto alla tensione

Equazioni costitutive in forma fasoriale: induttore

- Induttore lineare alimentato da una corrente sinusoidale:

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_I) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \underbrace{I e^{j\varphi_I}}_{\bar{I}} e^{j\omega t}\right]$$

- Applicando l'equazione costitutiva:

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \underbrace{j\omega L I e^{j\varphi_I}}_{\bar{V}} e^{j\omega t}\right]$$

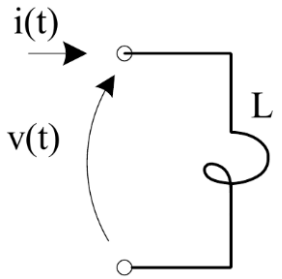
- Il fasore della tensione ai morsetti di *L* è:

$$\bar{V} = j\omega L\, \bar{I} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |\bar{V}| = \omega L I \\ \angle \bar{V} = \varphi_I + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Induttore: dominio del tempo e dominio dei fasori

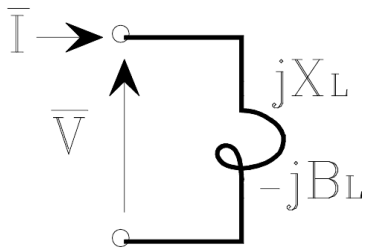
Tempo

$$\begin{cases} v(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt} \\ i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \end{cases}$$

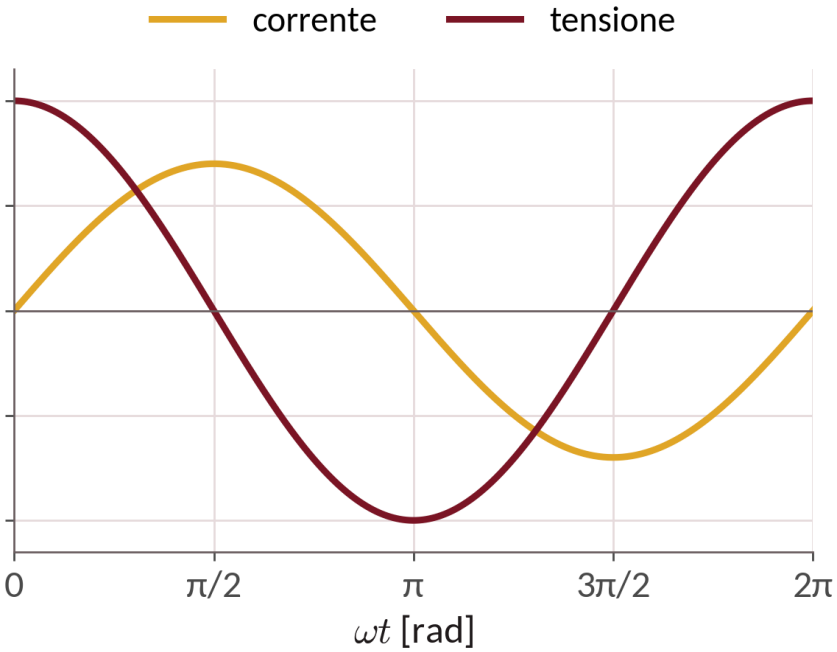


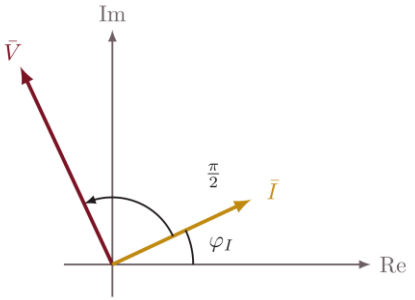
Fasore

$$\begin{cases} \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I} \\ \bar{I} = -j\dfrac{1}{\omega L} \cdot \bar{V} \end{cases}$$



$$X_L = \omega L\ [\Omega] \qquad B_L = \frac{1}{\omega L}\ [\mathrm{S}]$$

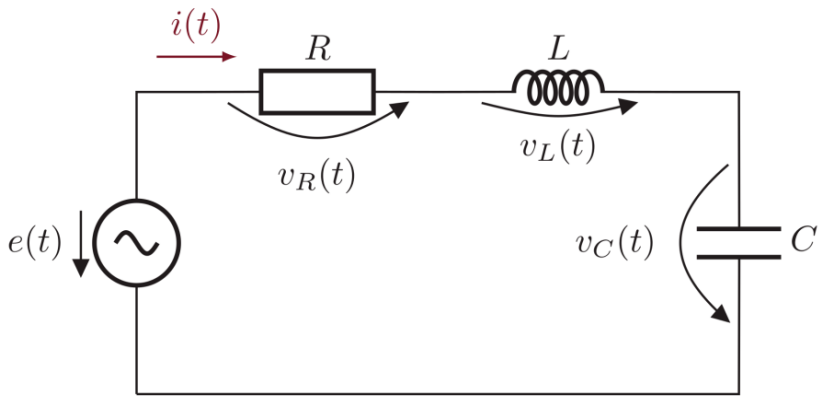




La tensione è in anticipo di 90° rispetto alla corrente

Metodo dei fasori: soluzione diretta del circuito RLC

Esempio: circuito RLC con ingresso sinusoidale



$$\begin{cases} e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ R\,i(t) + L\dfrac{d}{dt}i(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\,dt = e(t) \end{cases}$$

L'equazione differenziale non serve più

$$e(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \alpha) \;\Rightarrow\; \bar{E} = Ee^{j\alpha}$$

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \\ \bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} + \dfrac{1}{j\omega C}\bar{I} \;\Rightarrow\; \bar{E} = \left(R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}\right)\bar{I} \end{cases}$$

$$\bar{I} = Ie^{j\beta} \;\Rightarrow\; i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta)$$

04

Impedenze, ammettenze e metodi di analisi

Bipoli, impedenza e ammettenza, comportamento in frequenza, connessioni serie e parallelo, partitori

Impedenza

- La struttura delle equazioni costitutive in forma fasoriale è **comune** ai tre componenti:

$$\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}$$

- L'equazione è detta **legge di Ohm in forma fasoriale** e il numero complesso *Z* è detto **impedenza** del componente.
- La parte reale di *Z* è detta **resistenza**, la parte immaginaria **reattanza**.

***Z* è diverso per ciascun componente**

resistore	$\bar{Z} = R$
condensatore	$\bar{Z} = -\frac{j}{\omega C}$
induttore	$\bar{Z} = j\omega L$

Impedenza in forma esponenziale

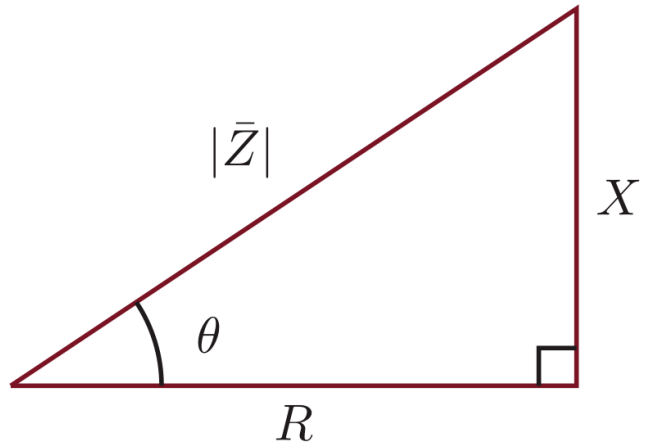
- In forma esponenziale:

$$\bar{Z} = Ze^{j\theta} \;\Rightarrow\; Ve^{j\varphi_V} = Ze^{j\theta}\, Ie^{j\varphi_I}$$
$$Z = \frac{V}{I} \qquad\qquad \theta = \varphi_V - \varphi_I$$

- Il modulo di *Z* è il rapporto tra *V* e *I*: si misura quindi in **ohm**.
- Argomento di *Z*:

$$\begin{array}{lll} \text{resistore} & \bar{Z} = R & \Rightarrow\ \theta = 0 \\ \text{condensatore} & \bar{Z} = -\frac{j}{\omega C} & \Rightarrow\ \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{induttore} & \bar{Z} = j\omega L & \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

- ϑ varia nell'intervallo $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$



Triangolo dell'impedenza

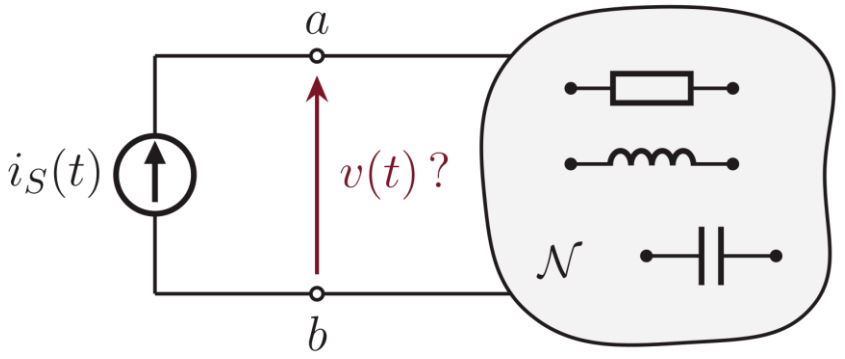
Definizione di impedenza e ammettenza di un bipolo

Equazioni costitutive di bipoli costituiti da R, L, C: **equivalenza alle porte esterne**.

Si consideri un bipolo N **privo di sorgenti**. Ipotesi:

- regime sinusoidale permanente;
- unica sorgente:

$$i_S(t) = \sqrt{2}\,|\bar{I}_S|\cos(\omega_0 t + \angle\bar{I}_S) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\bar{I}_S\,e^{j\omega_0 t}\right]$$



Qual è la tensione *v*(*t*) ai morsetti del bipolo?

Definizione di impedenza e ammettenza di un bipolo

- Per il **teorema fondamentale del regime sinusoidale**:

$$v(t) = \sqrt{2}\,|\bar{V}|\cos(\omega_0 t + \angle\bar{V})$$

$$t \leftrightarrow j\omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} i_S(t) &\leftrightarrow \bar{I}_S \\ v(t) &\leftrightarrow \bar{V} \end{aligned}$$

$$v(t) = \sqrt{2}\,\underbrace{|\bar{Z}(j\omega_0)| \cdot |\bar{I}_S|}_{|\bar{V}|}\cos\big(\omega_0 t + \underbrace{\angle\bar{Z}(j\omega_0) + \angle\bar{I}_S}_{\angle\bar{V}}\big)$$

Il modulo della tensione è il prodotto dei moduli, la fase è la **somma delle fasi** di $Z(j\omega_0)$ e di $\bar{I}_S$.

Impedenza e ammettenza di un bipolo

Impedenza del bipolo N:

$$\bar{Z}(j\omega_0) \triangleq \frac{\bar{V}}{\bar{I}_S}$$

Analogamente, l'**ammettenza** del bipolo N si definisce come:

$$\bar{Y}(j\omega_0) \triangleq \frac{\bar{I}}{\bar{V}_S}$$

Relazione tra Z e Y

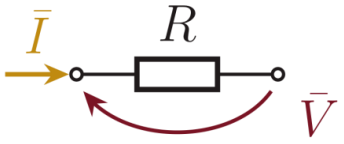
$$\bar{Y}(j\omega_0) = \frac{1}{\bar{Z}(j\omega_0)}$$

NB: impedenze e ammettenze sono **rapporti tra fasori**. Nel caso più generale sono numeri complessi, ma **non sono fasori**!

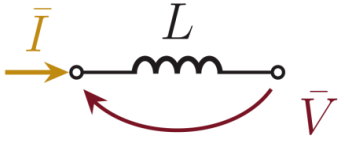
Impedenze e reattanze: legge di Ohm simbolica

Legge di Ohm simbolica (controllo in **corrente**):

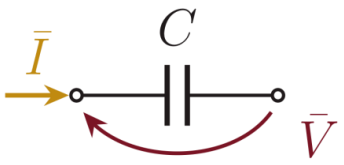
$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$



$$\bar{V} = R\,\bar{I} \qquad \bar{Z}_R = R$$

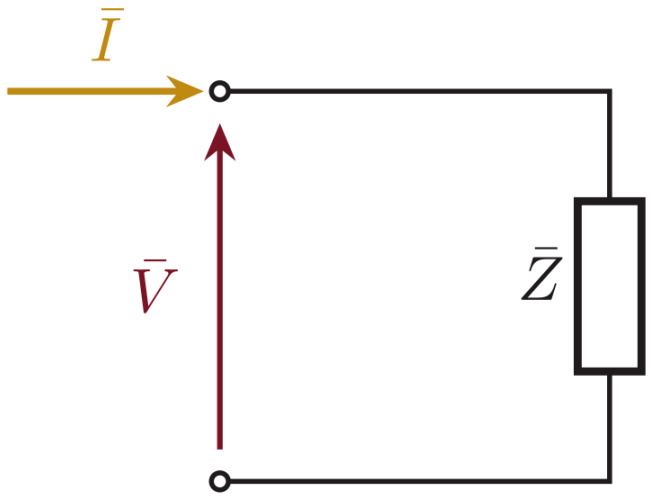


$$\bar{V} = j\omega L\,\bar{I} \qquad \bar{Z}_L = j\omega L$$



$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\,\bar{I} \qquad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Impedenze e reattanze



$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

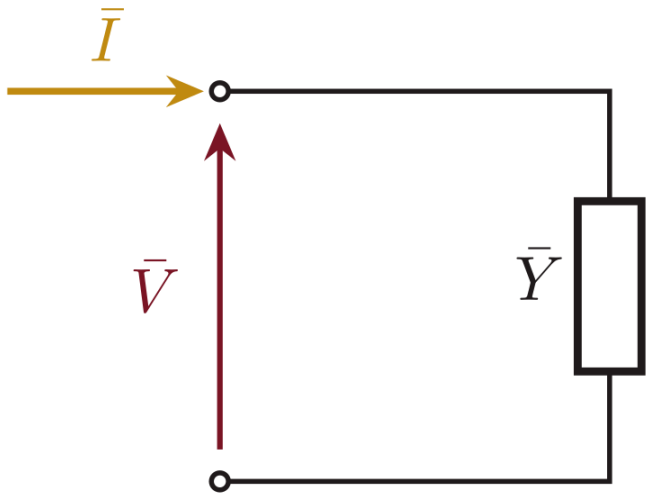
$$\bar{Z} = R + j\,X$$

Z **impedenza** [Ω]

R **resistenza** [Ω]

X **reattanza** [Ω]

Ammettenze e suscettanze



$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$$

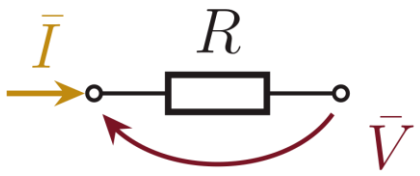
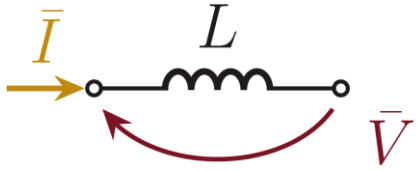
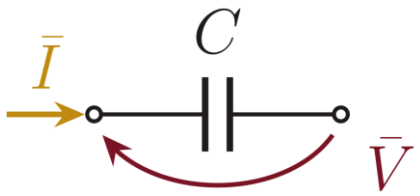
$$\bar{Y} = G + j\,B$$

$\bar{Y}$ **ammettenza** [Ω^{-1} = S]

G **conduttanza** [Ω^{-1} = S]

B **suscettanza** [Ω^{-1} = S]

Impedenze e ammettenze dei componenti

Componente	Impedenza	Ammettenza
	$\bar{Z}_R = R$ $X_R = 0$	$\bar{Y}_R = 1/R = G$ $B_R = 0$
	$\bar{Z}_L = j\omega L$ $X_L = \omega L, \quad R_L = 0$	$\bar{Y}_L = -j/(\omega L)$ $B_L = -1/(\omega L), \quad G_L = 0$
	$\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$ $X_C = -1/(\omega C), \quad R_C = 0$	$\bar{Y}_C = j\omega C$ $B_C = \omega C, \quad G_C = 0$

Osservazione importante

$$\bar{Z} = R + jX \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{Y} = G + jB$$

Procedimento corretto

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Errore (purtroppo) comune

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} \neq \cancel{\frac{1}{R}} + \cancel{\frac{1}{jX}}$$

La conduttanza **non** è il reciproco della resistenza, salvo il caso *X*=0.

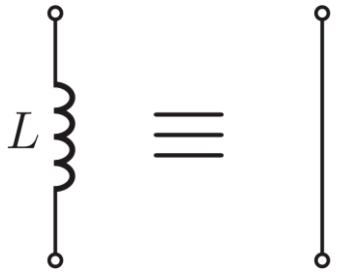
Comportamento per ω = 0

INDUTTORE

$$\bar{Z}_L = j\omega L$$

$$\lim_{\omega \to 0} \bar{Z}_L(j\omega) = 0$$

corto circuito

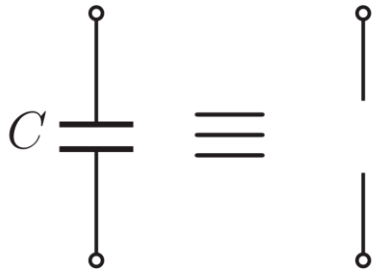


CONDENSATORE

$$\bar{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \bar{Z}_C(j\omega) = \infty$$

circuito aperto



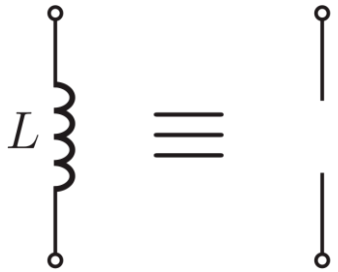
Comportamento per ω → ∞

INDUTTORE

$$\bar{Z}_L = j\omega L$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \bar{Z}_L(j\omega) = \infty$$

circuito aperto

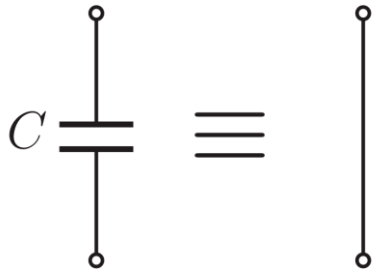


CONDENSATORE

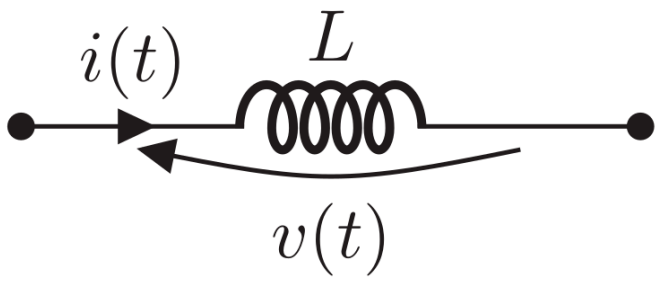
$$\bar{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \bar{Z}_C(j\omega) = 0$$

corto circuito



Esempio: induttore in regime sinusoidale



$$L = 0{,}5 \text{ H}$$
$$v(t) = 10\cos(5t + 15°) \text{ V}$$
$$i(t) = ?$$

Nel dominio del tempo

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau = \ \ldots$$

Nel dominio dei fasori

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}(j\omega_0)}$$

Esempio: soluzione nel dominio dei fasori

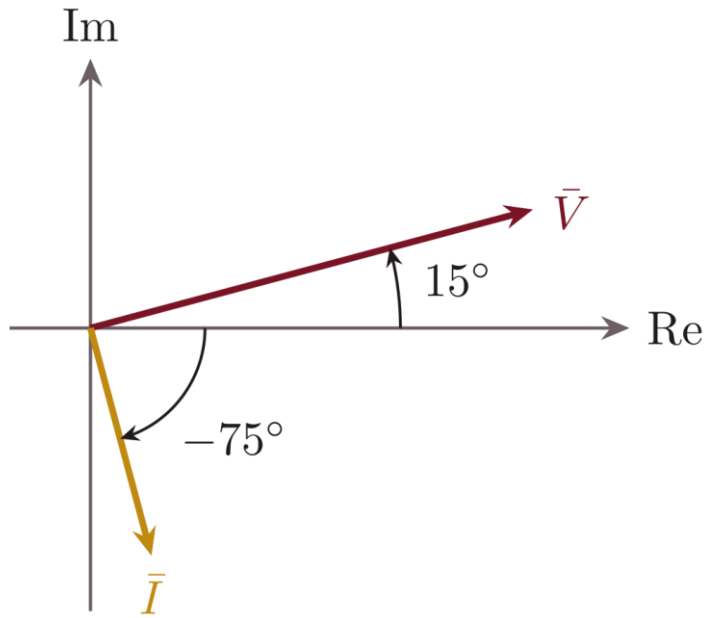
$$\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$$

$$\bar{Z}(j\omega_0) = j\omega_0 L = j2{,}5\ \Omega = 2{,}5\, e^{j90^\circ}\ \Omega$$

$$\bar{V} = \frac{10}{\sqrt{2}}\left[\cos(15^\circ) + j\sin(15^\circ)\right] = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j15^\circ}\ \text{V}$$

$$\Rightarrow\ \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}(j\omega_0)} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-j75^\circ}\ \text{A}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\cos(5t - 75^\circ) = 4\cos(5t - 75^\circ)\ \text{A}$$



La corrente è in ritardo di 90° sulla tensione

Metodi di analisi nel dominio dei fasori

Si estendono al dominio dei fasori le tecniche di analisi studiate per i **circuiti resistivi**, in particolare:

1. **Impedenze e ammettenze equivalenti**
   calcolo mediante le regole di composizione serie e parallelo

2. **Partitori**
   di tensione e di corrente

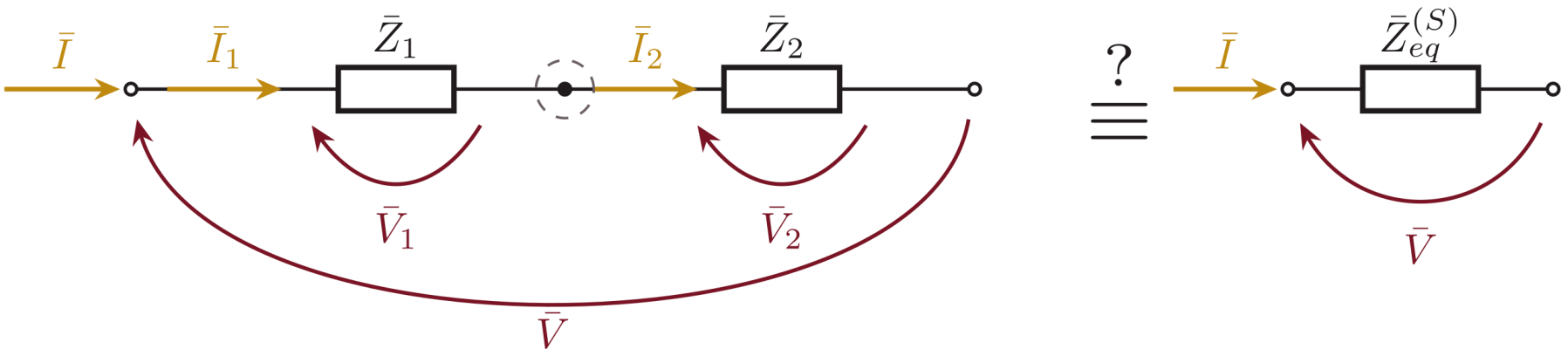
3. **Trasformazione di sorgenti non ideali**
   da generatore di tensione a generatore di corrente e viceversa

4. **Principio di sovrapposizione**
   con sorgenti isofrequenziali e non isofrequenziali

5. **Teoremi di Thevenin e Norton**
   bipoli equivalenti in regime sinusoidale

4. **LKC e LKV**
   con sorgenti isofrequenziali e non isofrequenziali

Connessione in serie



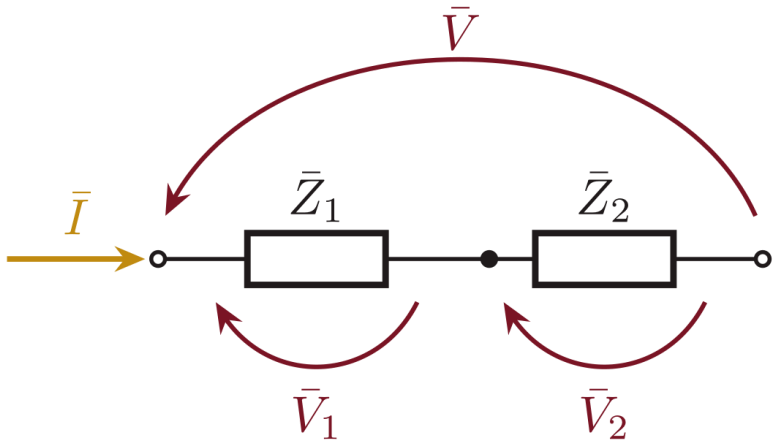
$$\bar{Z}_{eq}^{(S)} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

In termini di ammettenze

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} \qquad \bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} \qquad \bar{Y}_{eq}^{(S)} = \frac{1}{\bar{Z}_{eq}^{(S)}} = \frac{\bar{Y}_1 \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}$$

Connessione in serie: esempio ohmico-induttivo

- Data la struttura algebrica della legge di Ohm in forma fasoriale, valgono le **stesse connessioni canoniche** dei resistori.



$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{Z}_1\bar{I} + \bar{Z}_2\bar{I} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)\,\bar{I}$$

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

- Per una connessione serie **ohmico-induttiva**:

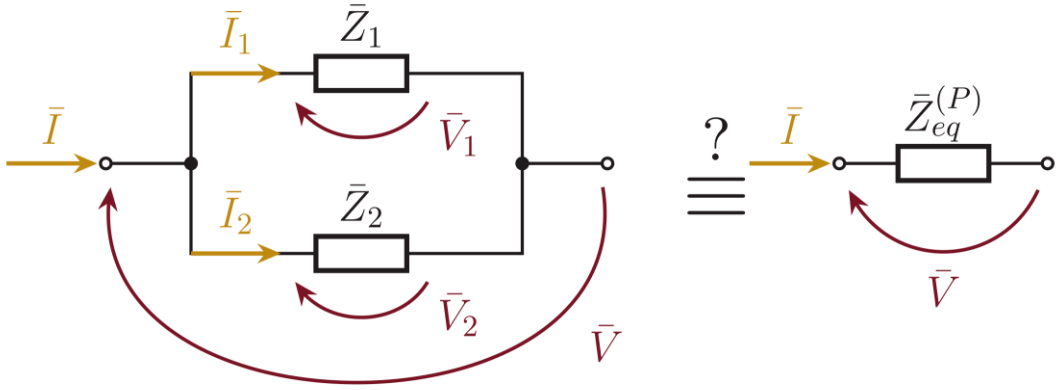


$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L$$

$$|\bar{Z}_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\angle\bar{Z}_{eq} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Connessione in parallelo

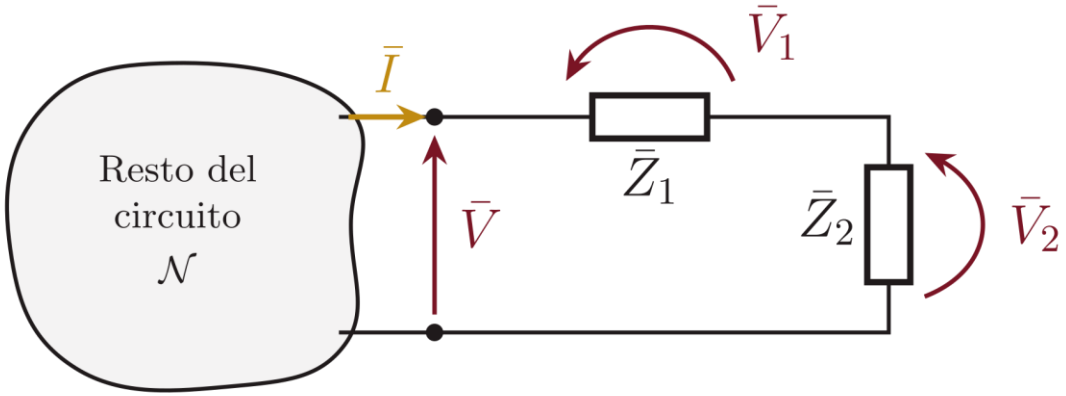


$$\bar{Y}_{eq}^{(P)} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$$

In termini di impedenze

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{\bar{Y}_1} \qquad \bar{Z}_2 = \frac{1}{\bar{Y}_2} \qquad \bar{Z}_{eq}^{(P)} = \frac{1}{\bar{Y}_{eq}^{(P)}} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

Partitore di tensione

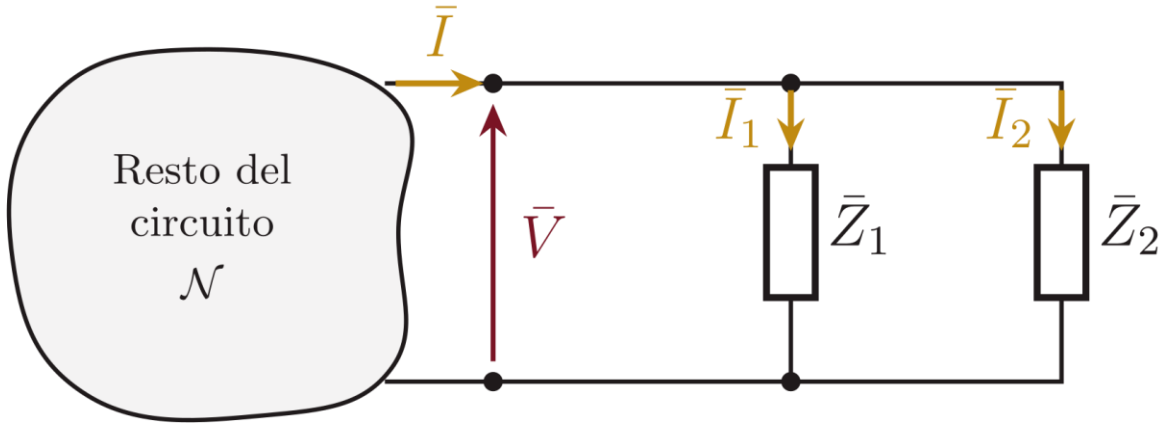


$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{V} \qquad \bar{V}_2 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{V}$$

In termini di ammettenze

$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}\,\bar{V} \qquad \bar{V}_2 = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}\,\bar{V}$$

Partitore di corrente



$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{I} \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{I}$$

In termini di ammettenze

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}\,\bar{I} \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}\,\bar{I}$$

Forma fasoriale delle leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive

- Si consideri una rete lineare alimentata da un ingresso sinusoidale, in un istante in cui la risposta naturale si è già estinta: **tutte le grandezze di rete sono funzioni sinusoidali**.
- Se le leggi di Kirchhoff e le equazioni costitutive possono essere scritte in termini di fasori, la soluzione del circuito per la risposta forzata si ottiene facilmente con tutti i metodi sviluppati per l'analisi in continua (leggi di Kirchhoff, teoremi delle reti, ecc.).
- Con il metodo dei fasori si ottiene **solo** la soluzione relativa alla risposta forzata.

Metodo dei fasori

Fornisce: la risposta forzata (regime sinusoidale permanente)

Non fornisce: la risposta naturale (transitorio)

Equazioni topologiche: LKC in forma fasoriale

Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

- Come esempio, si consideri un nodo con tre correnti, per cui:

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$
$$\sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \varphi_2) - \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \varphi_3) = 0$$
$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}I_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}] + \mathrm{Im}[\sqrt{2}I_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}] - \mathrm{Im}[\sqrt{2}I_3 e^{j\varphi_3} e^{j\omega t}] = 0$$

- Anche in questo caso l'equazione precedente può essere semplificata e si ottiene:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$

Equazioni topologiche: LKC e LKT in forma fasoriale

LKC

Le equazioni nel dominio del tempo e in termini di fasori (dominio ω) sono **equivalenti**:

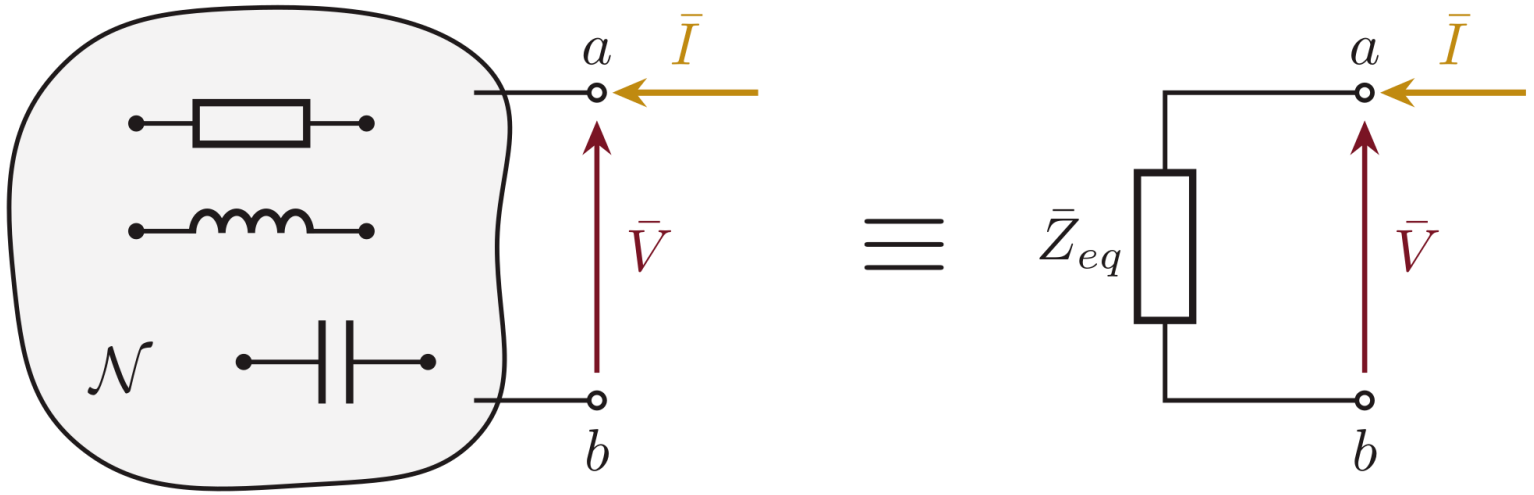
$$\sum_j i_j(t) = 0 \quad \overset{\text{funzioni sinusoidali}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_j \bar{I}_j = 0$$

LKT

Le equazioni nel dominio del tempo e in termini di fasori (dominio ω) sono **equivalenti**:

$$\sum_j v_j(t) = 0 \quad \overset{\text{funzioni sinusoidali}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_j \bar{V}_j = 0$$

Impedenza/ammettenza equivalente di un bipolo



Bipolo controllato in corrente

$$\bar{V} = \bar{Z}_{eq}\,\bar{I}$$

Bipolo controllato in tensione

$$\bar{I} = \bar{Y}_{eq}\,\bar{V}$$

Ȳeq = 1 / Zeq

Impedenza equivalente di un bipolo

$$\bar{Z}_{eq} = R + j\,X$$

$\angle \bar{Z}_{eq} = 0, \quad X = 0$ — **Bipolo puramente resistivo**

$\angle \bar{Z}_{eq} = \pm 90°, \quad R = 0$ — **Bipolo puramente reattivo**

- $\angle \bar{Z}_{eq} = +90°, \; X > 0$ — puramente induttivo
- $\angle \bar{Z}_{eq} = -90°, \; X < 0$ — puramente capacitivo

$0 < \angle \bar{Z}_{eq} < 90°, \quad X > 0$ — **Bipolo ohmico-induttivo**

$-90° < \angle \bar{Z}_{eq} < 0, \quad X < 0$ — **Bipolo ohmico-capacitivo**

Ammettenza equivalente di un bipolo

$$\bar{Y}_{eq} = G + j\,B$$

$\angle \bar{Y}_{eq} = 0, \quad B = 0$ — **Bipolo puramente resistivo**

$\angle \bar{Y}_{eq} = \pm 90°, \quad G = 0$ — **Bipolo puramente reattivo**

- $\angle \bar{Y}_{eq} = +90°, \; B > 0$ — puramente capacitivo
- $\angle \bar{Y}_{eq} = -90°, \; B < 0$ — puramente induttivo

$0 < \angle \bar{Y}_{eq} < 90°, \quad B > 0$ — **Bipolo ohmico-capacitivo**

$-90° < \angle \bar{Y}_{eq} < 0, \quad B < 0$ — **Bipolo ohmico-induttivo**

05

Potenza in regime sinusoidale

Potenza istantanea, attiva, reattiva, complessa e apparente · Fattore di potenza · Massimo trasferimento di potenza · Teorema di Boucherot

Potenza in regime sinusoidale: introduzione

- In molte applicazioni il regime sinusoidale è utilizzato per **trasferire potenza** dalle sorgenti ai carichi.
- In condizioni sinusoidali l'espressione della potenza nei componenti assume una forma particolare, utile a mostrare come avviene il **processo fisico di trasmissione** della potenza.
- L'espressione finale della potenza si ottiene con alcune manipolazioni algebriche e trigonometriche della forma generale.

Grandezze che studieremo

1. Potenza istantanea p(t)
2. Potenza attiva P [W]
3. Potenza reattiva Q [VAr]
4. Potenza complessa e apparente [VA]

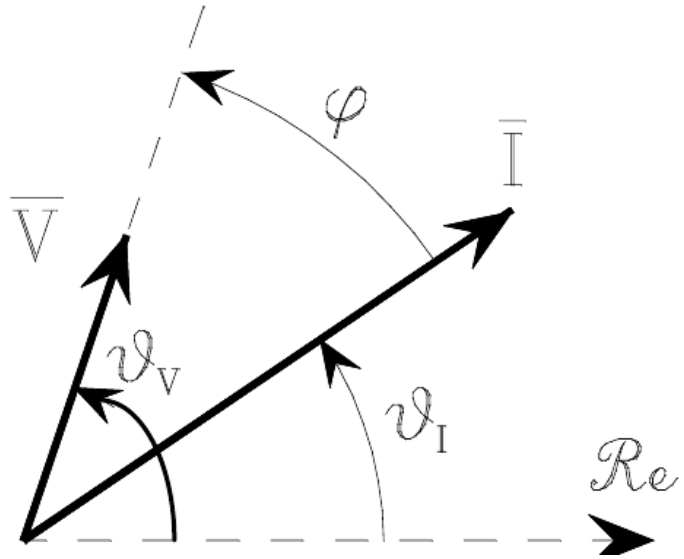
Potenza istantanea

- La potenza istantanea in un bipolo è:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

- In condizioni sinusoidali tensione e corrente sono:

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \vartheta_V) \\ i(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \vartheta_I) \end{cases}$$

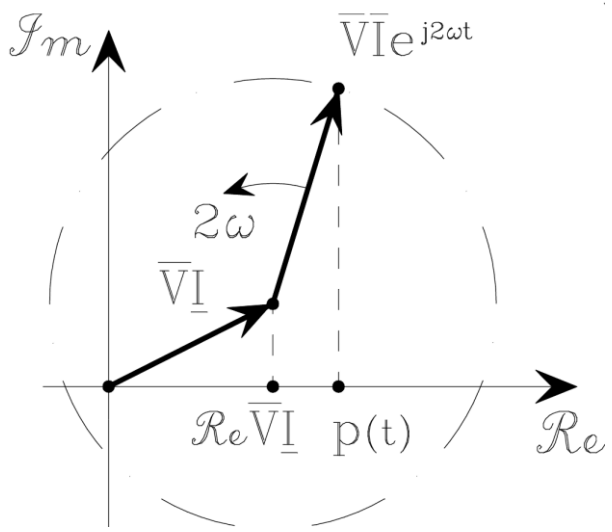


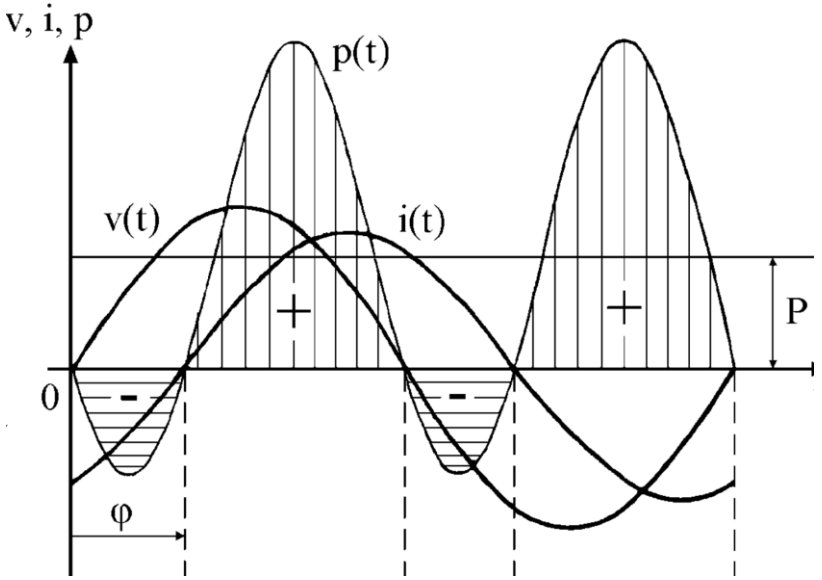
- Usando le proprietà delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} p(t) &= 2VI \sin(\omega t + \vartheta_V) \sin(\omega t + \vartheta_I) = VI\left[\cos(\vartheta_V - \vartheta_I) - \cos(2\omega t + \vartheta_V + \vartheta_I)\right] = \\ &= \underbrace{VI\cos\varphi}_{\text{termine costante}} - \underbrace{VI\cos(2\omega t + \vartheta_V + \vartheta_I)}_{\text{termine a frequenza doppia}} = \mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}\} + \mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}e^{j2\omega t}\} \end{aligned}$$

Potenza istantanea e suo valor medio

Interpretazione grafica





$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = V\,I\cos\varphi$$

POTENZA MEDIA [W]: dipende dai valori efficaci di $v(t)$ e $i(t)$ e dallo sfasamento φ tra di esse

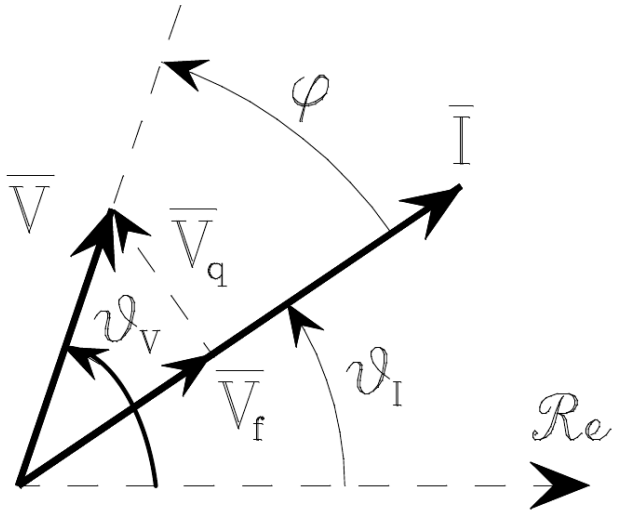
Potenza istantanea attiva e reattiva

- Data l'importanza dell'angolo φ, si manipola il secondo termine per esprimerlo in funzione di φ:

$$p(t) = VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + \vartheta_V + \vartheta_I + \vartheta_I - \vartheta_I)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\alpha = \varphi, \qquad \beta = 2(\omega t + \vartheta_I)$$

$$p(t) = I\,\underbrace{V\cos\varphi}_{V_f}\{1-\cos 2(\omega t+\vartheta_I)\} + I\,\underbrace{V\sin\varphi}_{V_q}\sin 2(\omega t+\vartheta_I)$$



V_f: componente della tensione **in fase** con la corrente; V_q: componente **in quadratura** (sfasata di 90°)

$$p = \underbrace{IV_f\{1-\cos 2(\omega t+\vartheta_I)\}}_{p_a(t)\,\geq\,0} + \underbrace{IV_q\sin 2(\omega t+\vartheta_I)}_{q(t)\,\gtrless\,0}$$

$p_a(t)$: componente **attiva**, sempre ≥ 0 · $q(t)$: componente **reattiva**, positiva o negativa

Potenza in regime sinusoidale nel resistore

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega t \;\Rightarrow\; v(t) = Ri(t) = \sqrt{2} RI \sin \omega t = \sqrt{2} V \sin \omega t$$

1) Potenza istantanea

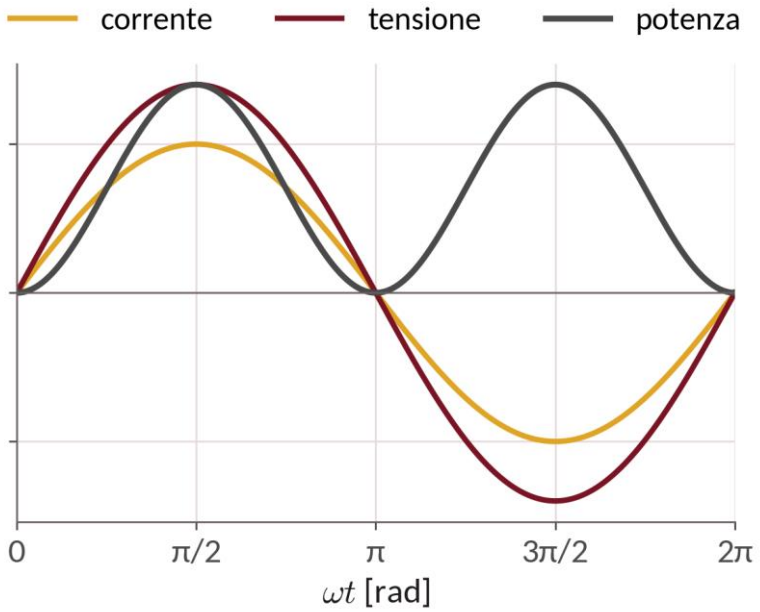
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 2RI^2 \sin^2 \omega t = VI(1 - \cos 2\omega t) \geq 0$$

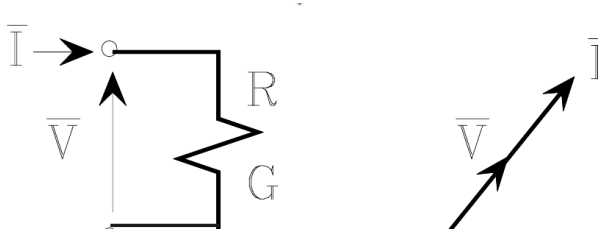
$$\max\{p(t)\} = 2VI \qquad p_a(t) = p(t) \qquad q(t) = 0$$

2) Potenza media

$$P = VI = RI^2 = V^2/R = GV^2$$

La potenza istantanea è **sempre positiva** (come richiesto da $p=Ri^2$): fluisce sempre dalle sorgenti verso il resistore. La potenza media vale VI, ma $p(t)$ oscilla due volte per periodo tra zero e $2VI$.





Potenza in regime sinusoidale nel condensatore

$$v(t) = \sqrt{2}V \sin \omega t \;\Rightarrow\; i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \sqrt{2}\,\omega CV \cos \omega t = \sqrt{2}I \cos \omega t$$

1) Potenza istantanea

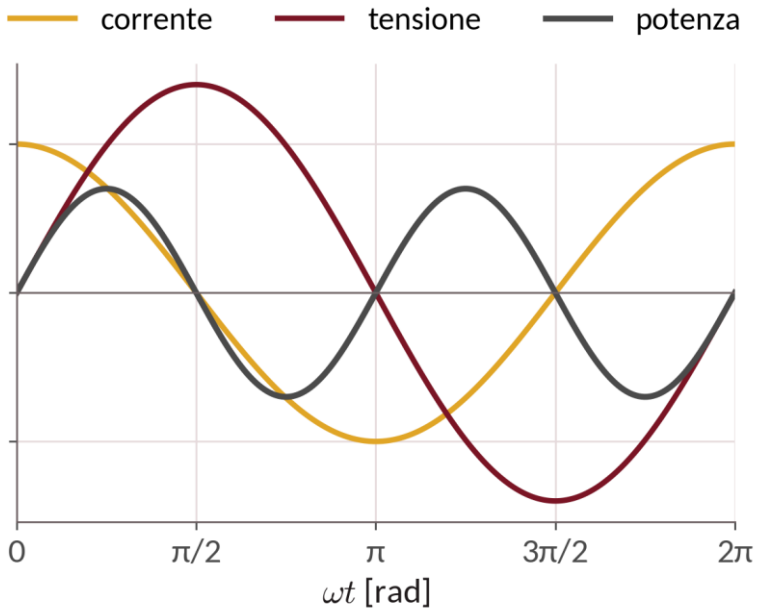
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 2\omega CV^2 \sin \omega t \cos \omega t = \omega CV^2 \sin 2\omega t \gtrless 0$$

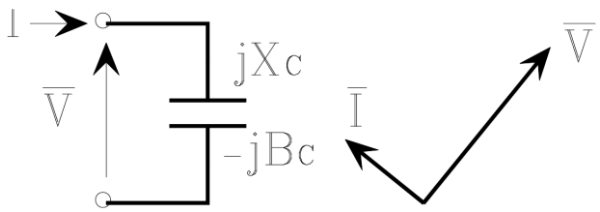
$$\max\{p(t)\} = \omega CV^2 \qquad p_a(t) = 0 \qquad q(t) = p(t)$$

2) Potenza media · 3) Energia

$$P = 0 \qquad w(t) = CV^2 \sin^2 \omega t \qquad \max\{w(t)\} = CV^2$$

La potenza media nel condensatore è **nulla**: la potenza ai morsetti viene alternativamente immagazzinata nel **campo elettrico** (carica) e restituita alla sorgente (scarica).





Potenza in regime sinusoidale nell'induttore

$$i(t) = -\sqrt{2} I \cos \omega t \;\Rightarrow\; v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}\,\omega L I \sin \omega t = \sqrt{2} V \sin \omega t$$

1) Potenza istantanea

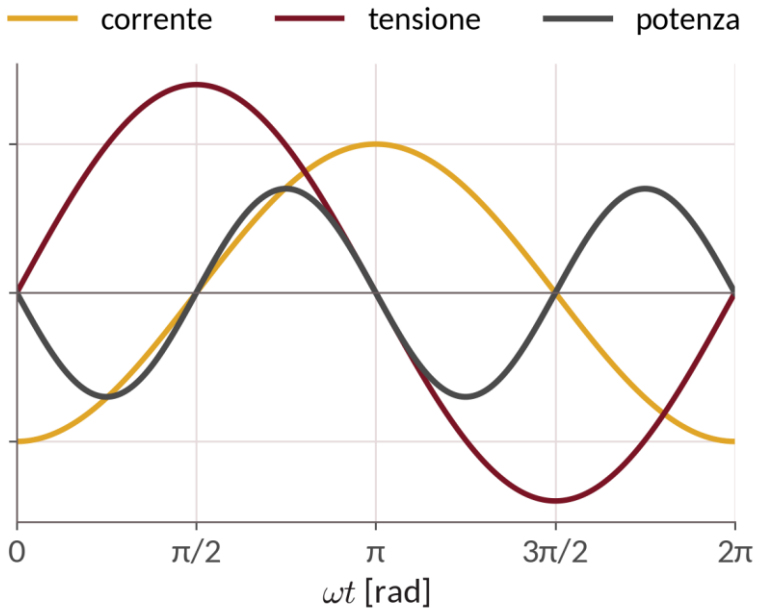
$$p(t) = v(t)\, i(t) = -2\omega L I^2 \sin \omega t \cos \omega t = -\omega L I^2 \sin 2\omega t \gtrless 0$$

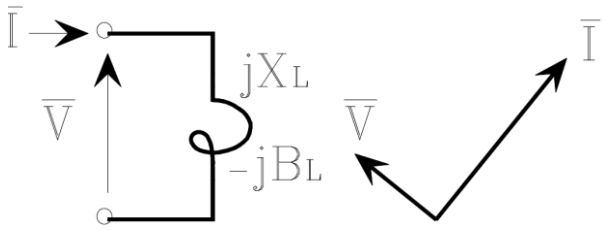
$$\max\{p(t)\} = \omega L I^2 \qquad p_a(t) = 0 \qquad q(t) = p(t)$$

2) Potenza media · 3) Energia

$$P = 0 \qquad w(t) = L I^2 \cos^2 \omega t \qquad \max\{w(t)\} = L I^2$$

La potenza media nell'induttore è **nulla**: la potenza ai morsetti viene alternativamente immagazzinata nel **campo magnetico** e restituita alla sorgente.





Potenza attiva: valor medio di $p_a(t)$

- Il valore dell'energia scambiata è ben approssimato dall'integrale nel tempo del suo valor medio $VI\cos\varphi$.
- Ciò è concettualmente importante perché i valori medi non dipendono da t: questa grandezza può essere valutata con i **valori efficaci** e il **fattore di potenza** $\cos\varphi$.
- Questa nuova grandezza costante è detta **potenza attiva**; la sua unità di misura è il **watt** [W].

Potenza attiva

$$P = V I \cos\varphi \quad [\mathrm{W}]$$

Potenza reattiva

- Nei componenti dinamici C e L l'unica componente della potenza istantanea è $q(t)$.
- Questo contributo ha **valor medio nullo**, a causa della natura conservativa di C e L, che alternativamente immagazzinano e restituiscono energia.
- Anche se in media è nullo, tecnicamente **non può essere trascurato**.
- A tal fine si definisce un indicatore energetico fittizio, la **potenza reattiva** Q.
- Non avendo un significato fisico diretto, Q non si misura in watt ma in **volt-ampere reattivi** [VAr].

Potenza reattiva

$$Q = V I \sin\varphi \quad [\mathrm{VAr}]$$

Potenza istantanea, potenza attiva e reattiva

$$p(t) = p_a(t) + q(t) = P\{1 - \cos 2(\omega t + \vartheta_I)\} + Q \sin 2(\omega t + \vartheta_I)$$

Potenza attiva [W]

$$P = IV_f = VI \cos\varphi$$

Valor medio della potenza istantanea attiva: è **direttamente legata al lavoro**.

Potenza reattiva [VAr]

$$Q = IV_q = VI \sin\varphi$$

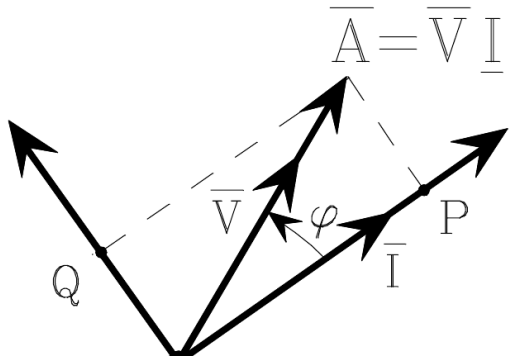
Valore massimo della potenza istantanea reattiva: misura la potenza **immagazzinata temporaneamente**; il segno indica la natura dell'accumulo.

P e *Q* rappresentano completamente il **bilancio energetico** in regime sinusoidale: il termine legato al lavoro e quello legato allo scambio di energia con i campi elettrico e magnetico. *P* e *Q* sono **indipendenti dal riferimento** delle fasi.

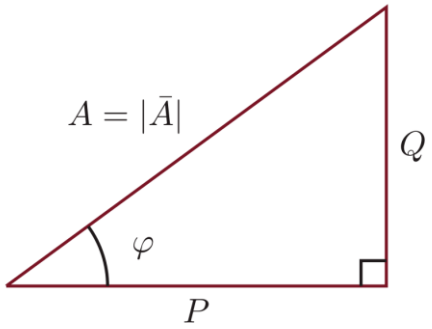
Potenza complessa e potenza apparente

- La **potenza complessa** contiene le informazioni sulla potenza attiva e reattiva: tutto ciò che serve per l'analisi delle potenze in una rete in AC. I fasori ne rendono semplice il calcolo:

$$\bar{S} = \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = Ve^{j\vartheta_V}\, Ie^{-j\vartheta_I} = VIe^{j(\vartheta_V - \vartheta_I)} = Ae^{j\varphi} = P + jQ \quad [\text{VA}]$$



$$\begin{cases} P = \text{Re}\{\bar{V}\underline{I}\} = A\cos\varphi \\ Q = \text{Im}\{\bar{V}\underline{I}\} = A\sin\varphi \\ S = A = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \cos\varphi = P/A = P/S \end{cases}$$



$\underline{I}$ indica il **coniugato** di $\bar{I}$. La potenza complessa è indipendente dai riferimenti dei fasori e dei tempi.

- La **potenza apparente** è il prodotto di tensione e corrente senza riferimento all'angolo di fase: si misura in **volt-ampere** [VA] e si indica con *A* o *S*.

Fattore di potenza

- Il rapporto tra potenza attiva e potenza apparente è detto **fattore di potenza**.
- È una misura pratica dell'efficienza di un sistema di distribuzione: a parità di potenza attiva trasmessa, il sistema con fattore di potenza più basso presenta **correnti circolanti più elevate**, dovute all'energia che torna alla sorgente dagli accumuli del carico. Correnti maggiori producono **perdite maggiori** e riducono il rendimento della trasmissione.
- A parità di potenza attiva, un basso fattore di potenza comporta una potenza apparente più elevata e perdite maggiori.
- Un fattore di potenza elevato permette, a parità di *V* e *I*, di massimizzare la potenza attiva.

$$\cos\varphi = \frac{P}{A} = \frac{P}{S}$$

Con cos ϕ = 1: massima P

$$VI\cos\varphi \xrightarrow{\varphi=0} VI$$

Potenza in un’impedenza

Potenza in funzione di I

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{A} = \bar{V}\underline{I} = \bar{Z} \cdot I^2 = (R + jX) \cdot I^2 = P + jQ$$

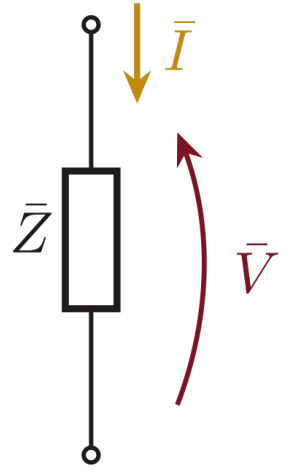
$$P = R \cdot I^2 \qquad\qquad Q = X \cdot I^2$$

Potenza in funzione di V

$$\bar{I} = \bar{V}/\bar{Z}$$

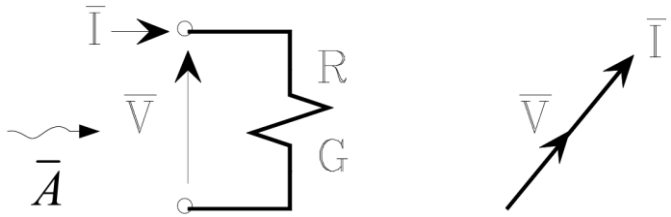
$$\bar{A} = \bar{V}\underline{I} = \bar{V} \cdot \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{V^2}{\underline{Z} \cdot \bar{Z}}\bar{Z} = \frac{V^2}{Z^2}\bar{Z} = \frac{V^2}{Z^2}(R + jX) = P + jQ$$

$$P = \frac{V^2}{Z^2}R \qquad\qquad Q = \frac{V^2}{Z^2}X$$



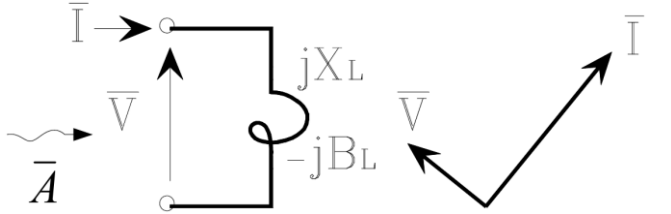
P, Q e A per gli elementi passivi

Resistore



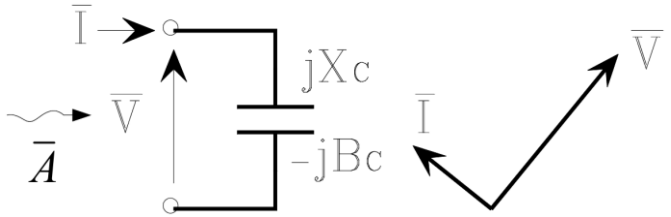
$\varphi = 0 \qquad \bar{V} = R\bar{I} \qquad \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = RI^2 = V^2/R = P$

Induttore



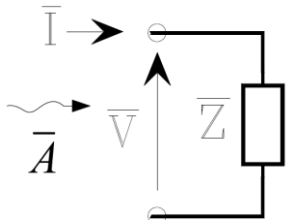
$\varphi = \pi/2 \qquad \bar{V} = jX_L\bar{I} \qquad \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = jX_LI^2 = jV^2/X_L = jQ_L$

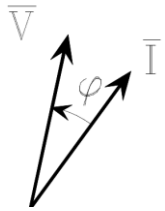
Condensatore



$\varphi = -\pi/2 \qquad \bar{V} = -jX_C\bar{I} \qquad \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = -jX_CI^2 = -jV^2/X_C = -jQ_C$

Impedenza

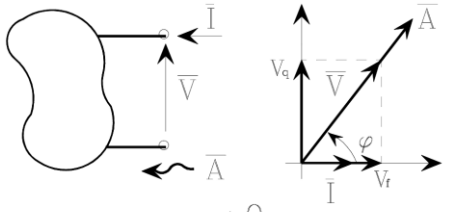


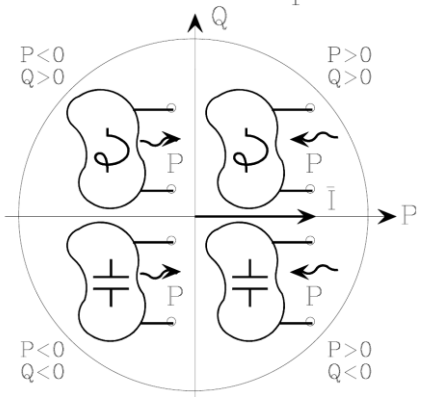


$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \qquad \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = \bar{Z} \cdot I^2 = V^2/\underline{Z} = P + jQ$

Convenzioni di segno

Convenzione degli utilizzatori

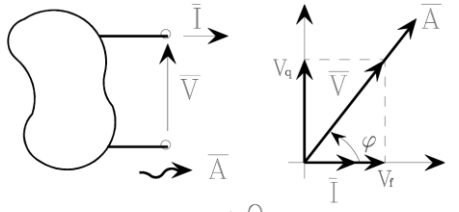


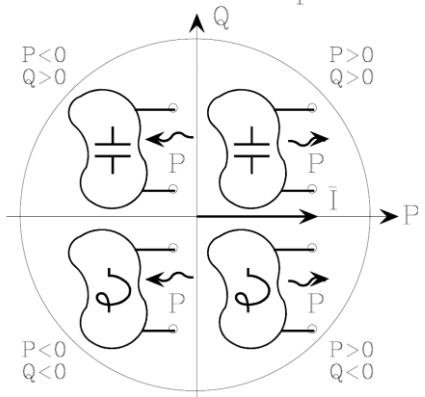


Q>0 per un **induttore**: l'induttore "assorbe" potenza reattiva.

Q<0 per un **condensatore**: il condensatore "genera" potenza reattiva.

Convenzione dei generatori





Q>0 per un **condensatore**: il condensatore "assorbe" potenza reattiva.

Q<0 per un **induttore**: l'induttore "genera" potenza reattiva.