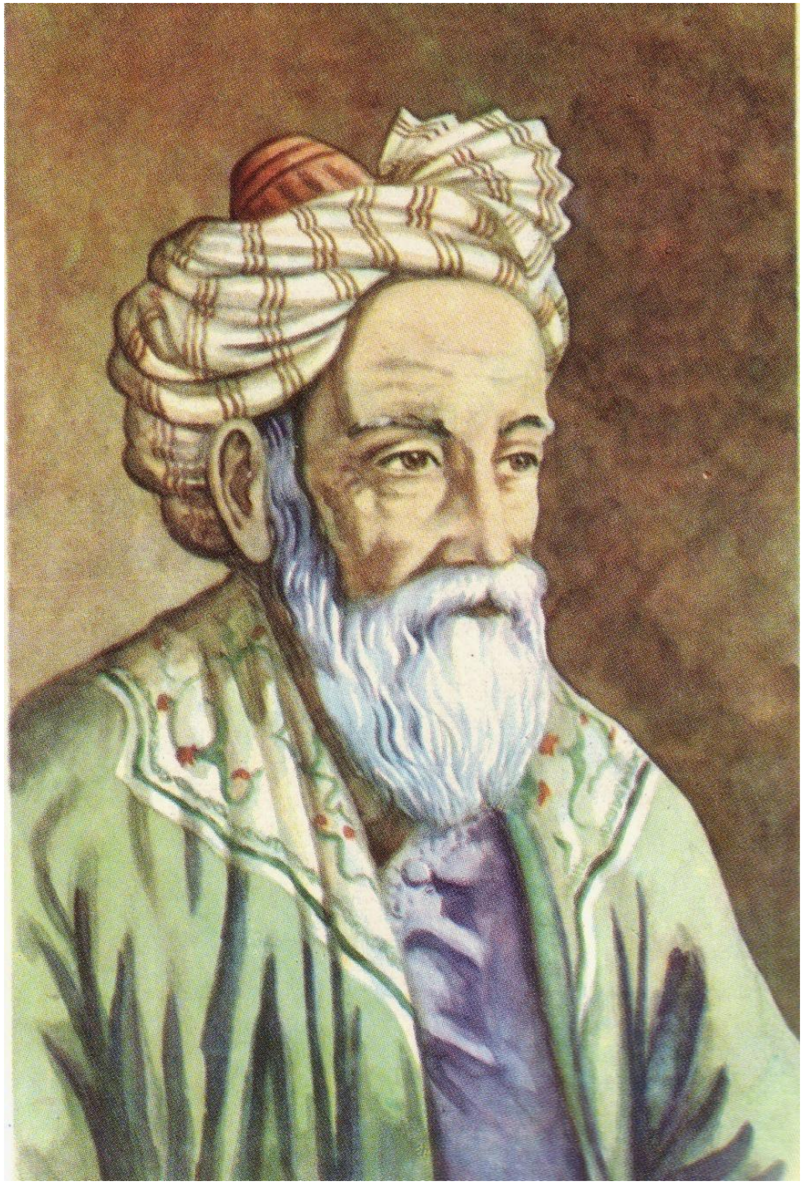
partiamo da zero, sembra niente (ma forse è tutto)

"per vedere nulla ci vuole una vista ottima".

Lewis Carroll

Poi che null’altro che vacuo vento ci resta d’ogni cosa ch’esiste,
Poi che difetto e sconfitta colgono al fine ogni cosa,
Considera bene: ogni cosa che è, è in realtà nulla;
Medita bene: ogni cosa ch’è nulla, è in realtà tutto.



Omar Khayyam (1048-1131) matematico, astronomo, poeta e filosofo persiano

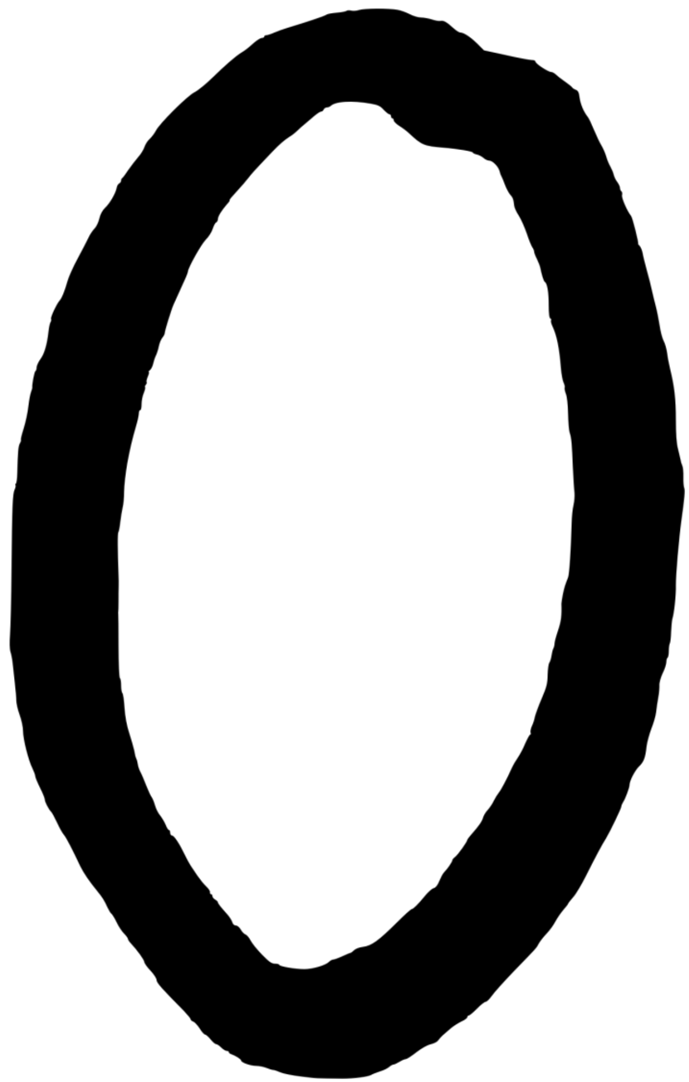
Per contare non serve lo zero

Il nocciolo della questione è che per le normali attività lo zero non ci serve affatto. Nessuno va al mercato a comprare zero pesci. Lo zero è in un certo senso il più civilizzato dei numeri il suo impiego ci viene imposto dalle esigenze legate all'esercizio di una raffinata razionalità.

Alfred North Whitehead

Contare 1,2,3…..

John Conway e Richard Guy raccontano come il matematico polacco W. Sierpinski, preoccupato di aver smarrito una valigia durante un viaggio, alla moglie che cercava di rassicurarlo facendogli notare che tutte e sei erano lì sotto i suoi occhi, rispondesse che non poteva essere vero, ne mancava una, lui le aveva contate più volte: “zero, uno due, tre, quattro e cinque”.



Dare nome .....

- I numeri si scrivono con dieci cifre: quello che ci sembra naturale è il risultato di un percorso lungo e tortuoso.
- Il problema di rappresentare i numeri è antichissimo: l'uomo primitivo per contare si è servito delle parti del proprio corpo e in particolare delle proprie mani e delle relative dita. Siccome le mani sono due, ci possono essere due modi di contare e di registrare i risultati: contare con le dita di una sola mano (sistema quinario), contare con tutte e due le mani (sistema decimale).


Se avessimo imparato a contare anche con le dita dei piedi avremmo avuto un sistema di numerazione in base 20. Dicono che i francesi contassero con i piedi..

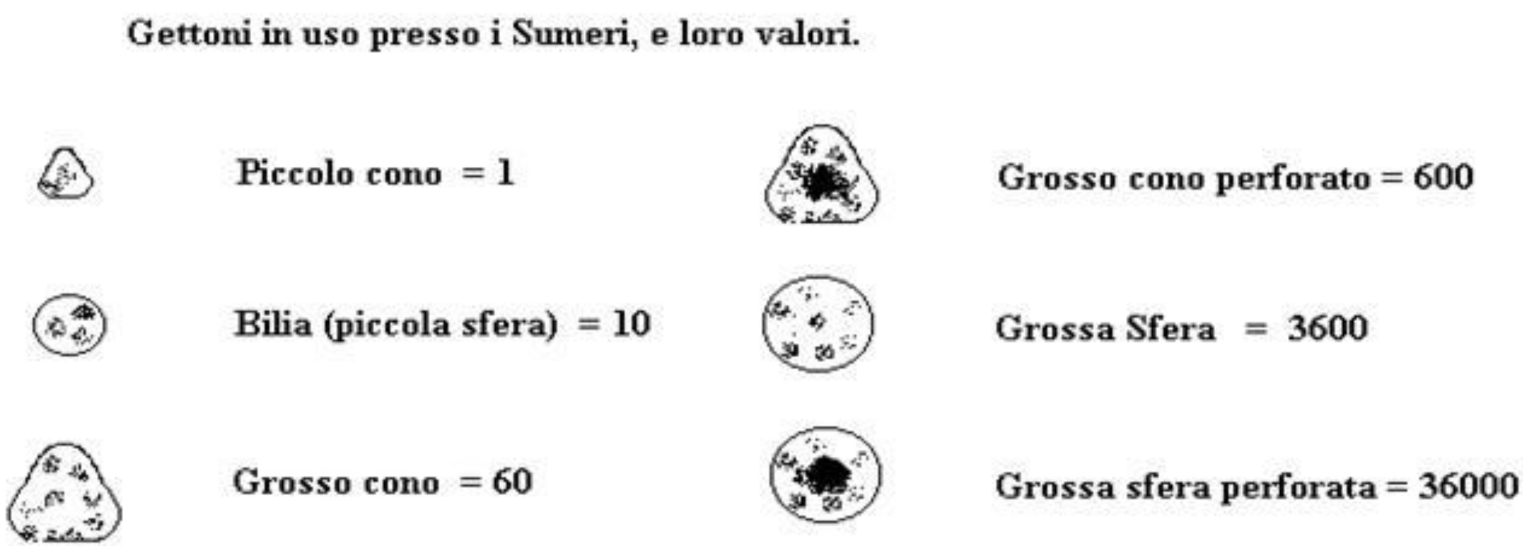
Lo zero non c’è

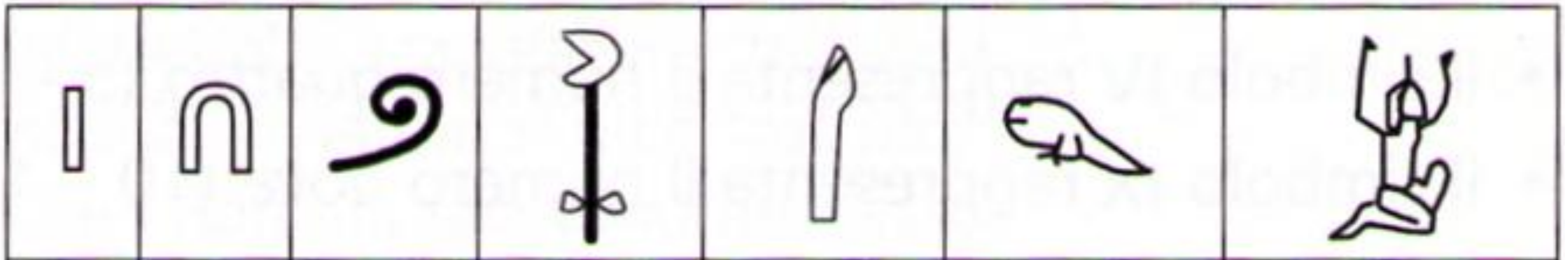
- Nessuno dei sistemi di numerazione che si sono succeduti nel corso dei secoli (quinario, decimale, vigesimale) disponeva di un nome per lo zero e di conseguenza il concetto non esisteva.

i fratelli Origone sono autori di altre belle *strip* e di altri materiali su spunti matematici
http://www.origone.net/Ita/

Sumeri

Appartengono alla civiltà dei Sumeri le tavolette di argilla che contengono i più antichi segni numerali usati dall'uomo e che risalgono al 3500 - 3000 *a.C.*
I simboli fondamentali usati nella numerazione sumera corrispondono ai numeri 1, 10, 60, 600, 3600, 36000:



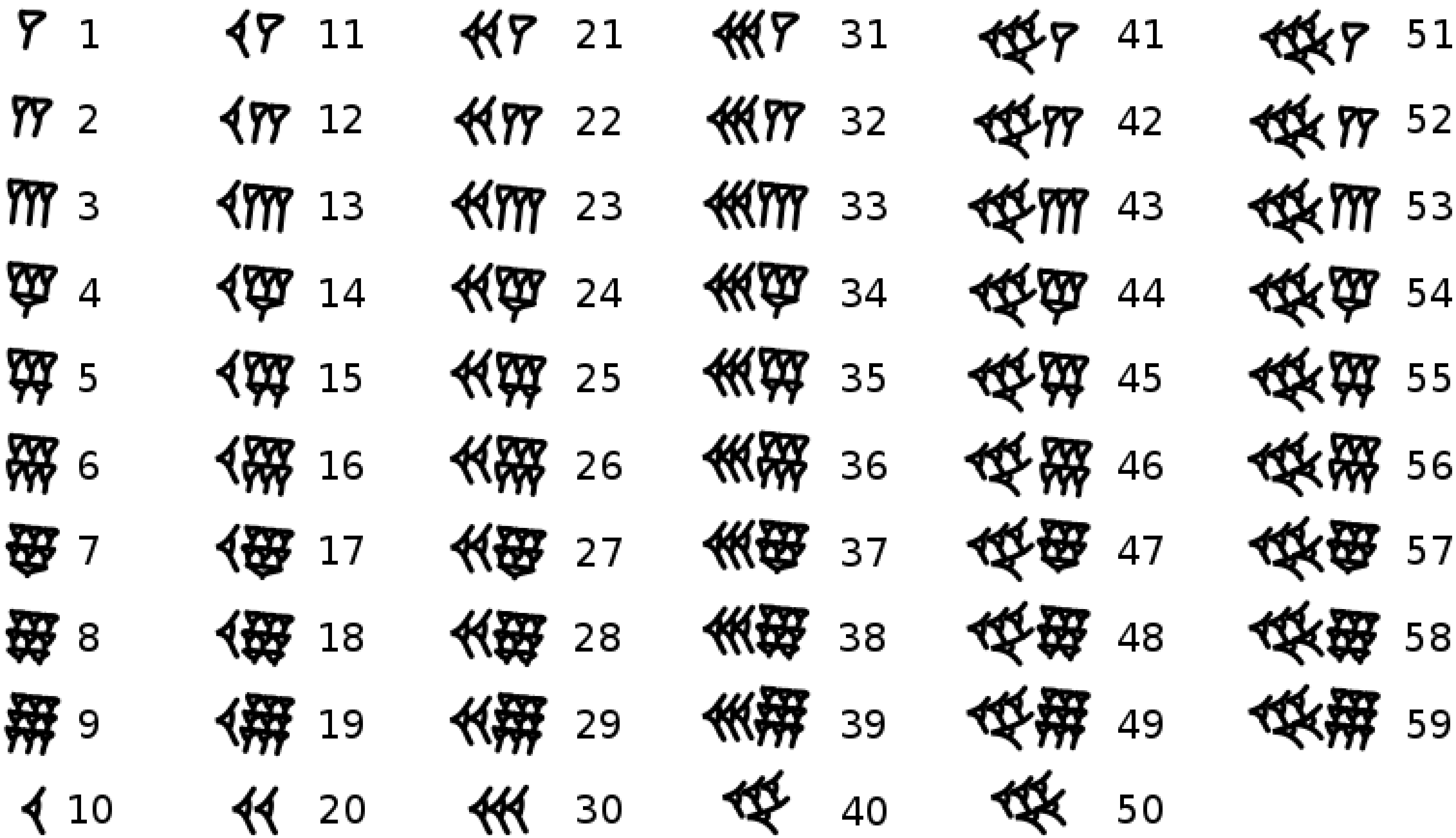


1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Il sistema di numerazione egizio è di tipo additivo con base decimale.

- I babilonesi usavano due cunei obliqui per rappresentare uno spazio vuoto
- Lo zero era un “segnaposto”, una cifra senza valore.

babilonesi


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59

I greci

- I greci grandi geometrici avevano un sistema di numerazione (anzi due) molto macchinoso.
- Consideravano il calcolo una “praticaccia” e sdegnavano lo zero che non esiste nei loro scritti.
- Ne riconoscevano l’utilità soprattutto per i calcoli astronomici, ma era pericoloso.

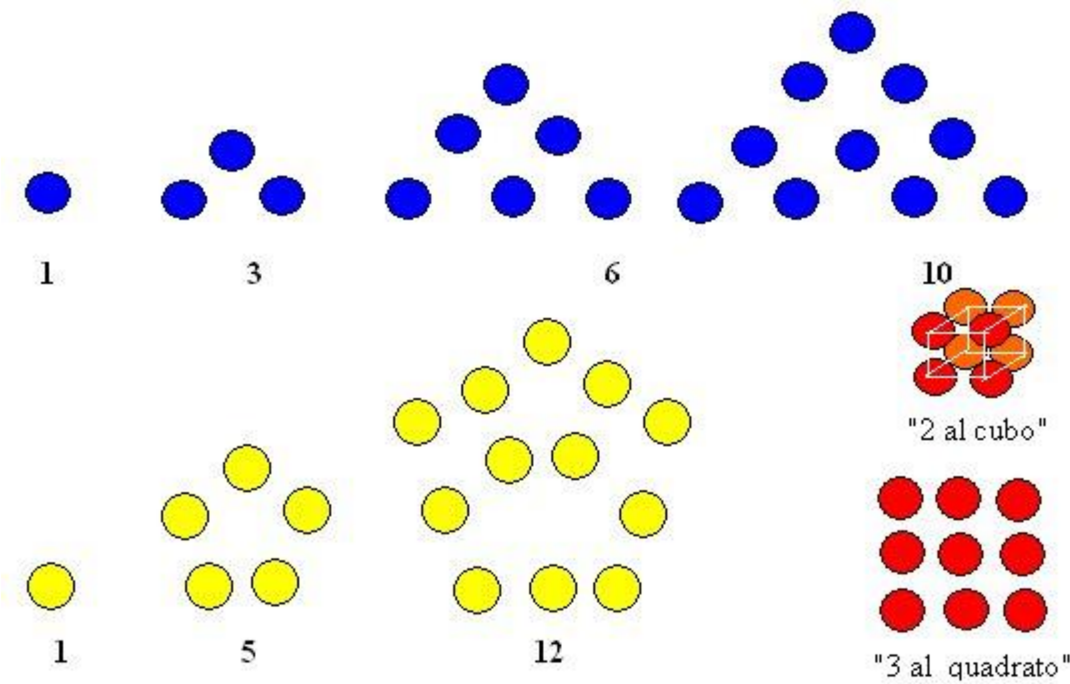
Nella **numerazione ionica** (o *alfabetica*) si faceva uso delle lettere dell'alfabeto greco; questa richiedeva ben ventisette simboli.

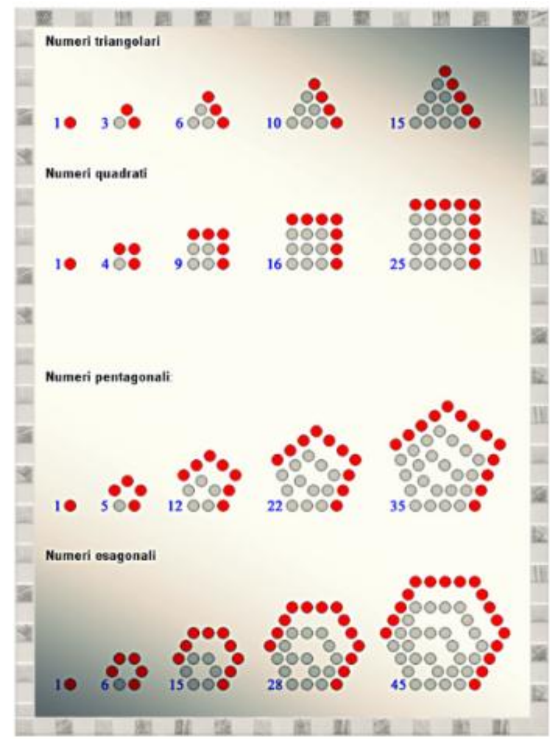
1 = Α	10 = Ι	100 = Ρ	1000 = ,Α
2 = Β	20 = Κ	200 = Σ	2000 = ,Β
3 = Γ	30 = Λ	300 = Τ	3000 = ,Γ
4 = Δ	40 = Μ	400 = Υ	4000 = ,Δ
5 = Ε	50 = Ν	500 = Φ	5000 = ,Ε
6 = ζ	60 = Ξ	600 = Χ	6000 = ,ζ
7 = Ζ	70 = Ο	700 = Ψ	7000 = ,Ζ
8 = Η	80 = Π	800 = Ω	8000 = ,Η
9 = Θ	90 = ϙ	900 = ϡ	9000 = ,Θ

- Lo zero si scontrava con uno dei principali assunti della filosofia occidentale: il vuoto non esiste.
- La visione greca della realtà fisica foggiata da Pitagora, da Aristotele e Tolomeo non poteva contemplare il "niente".
- Per questo l'occidente per quasi duemila anni non poté accettare il concetto di zero.
- Questo frenò lo sviluppo delle matematiche.

I pitagorici: **il numero è il principio di tutte le cose**

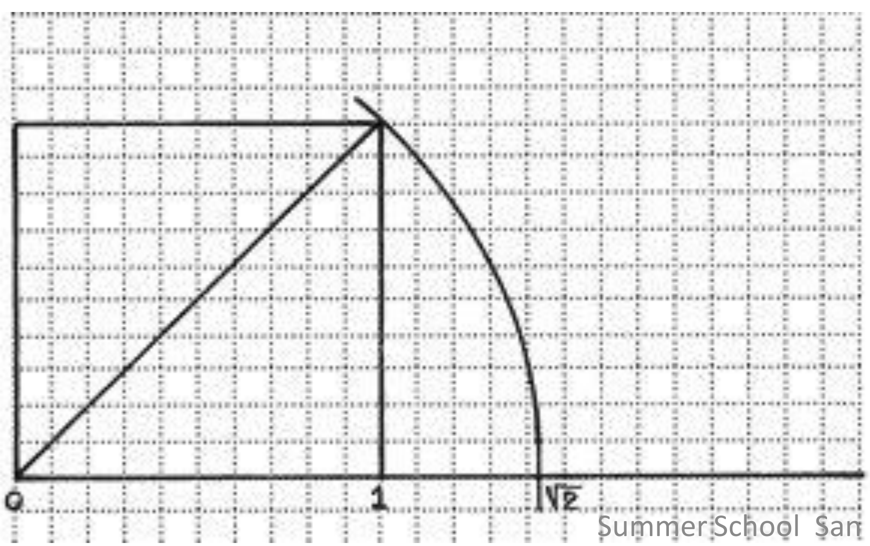
Il collegamento tra numero e forma era misterico

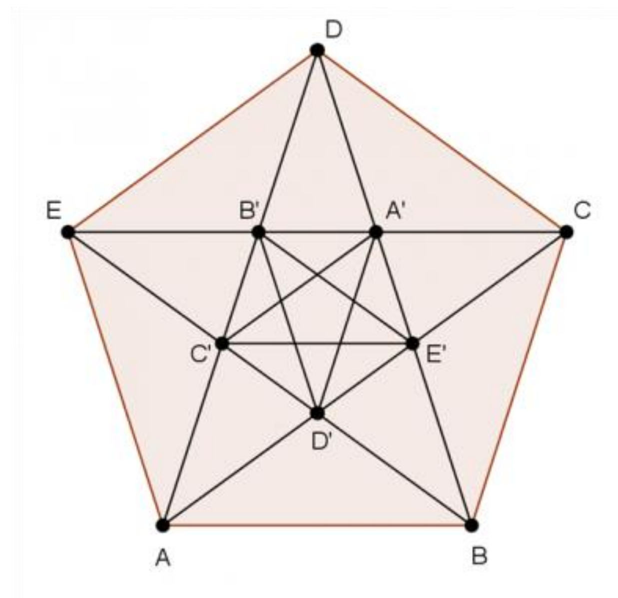




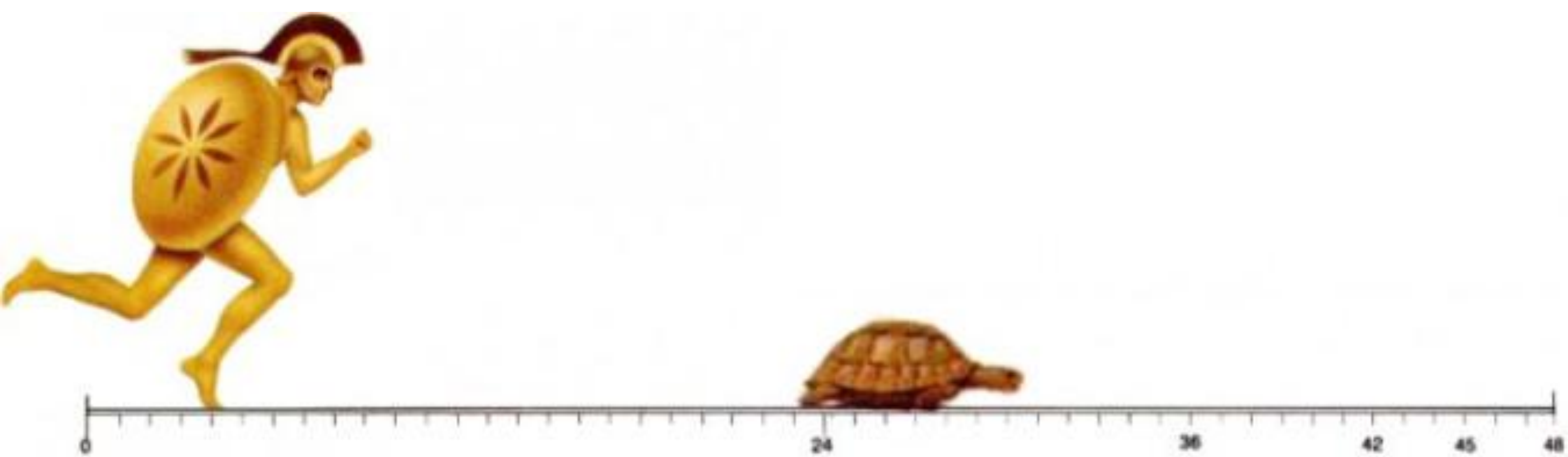
Ogni forma-numero possedeva un significato e le forme più armoniose erano sacre

- Nel contesto pitagorico non c’è posto per lo zero. L’equivalenza tra forma e numero impedisce di trattare lo zero come numero
- Lo zero avrebbe fatto vacillare l’ordinato mondo pitagorico.
- Un’altra idea scomoda nasce nella scuola: l’irrazionalità di radice di due





- Anche l'irrazionalità era pericolosa: il numero aureo eletto simbolo di bellezza è irrazionale
- Per impedire a questi numeri di minare le basi della filosofia pitagorica semplicemente si nascondono.
- Ma dello zero si poteva fare a meno degli irrazionali no.



Nulla nasce dal nulla

Lucrezio

La conoscenza dei numeri irrazionali si diffonde in tutto il mondo antico e la scuola pitagorica chiude, ma l'insegnamento di Pitagora resiste e diventa fondamento del pensiero aristotelico.

Lo zero entrava in conflitto con tale dottrina e doveva essere ignorato: la corrispondenza tra numeri e forme lo consentiva.

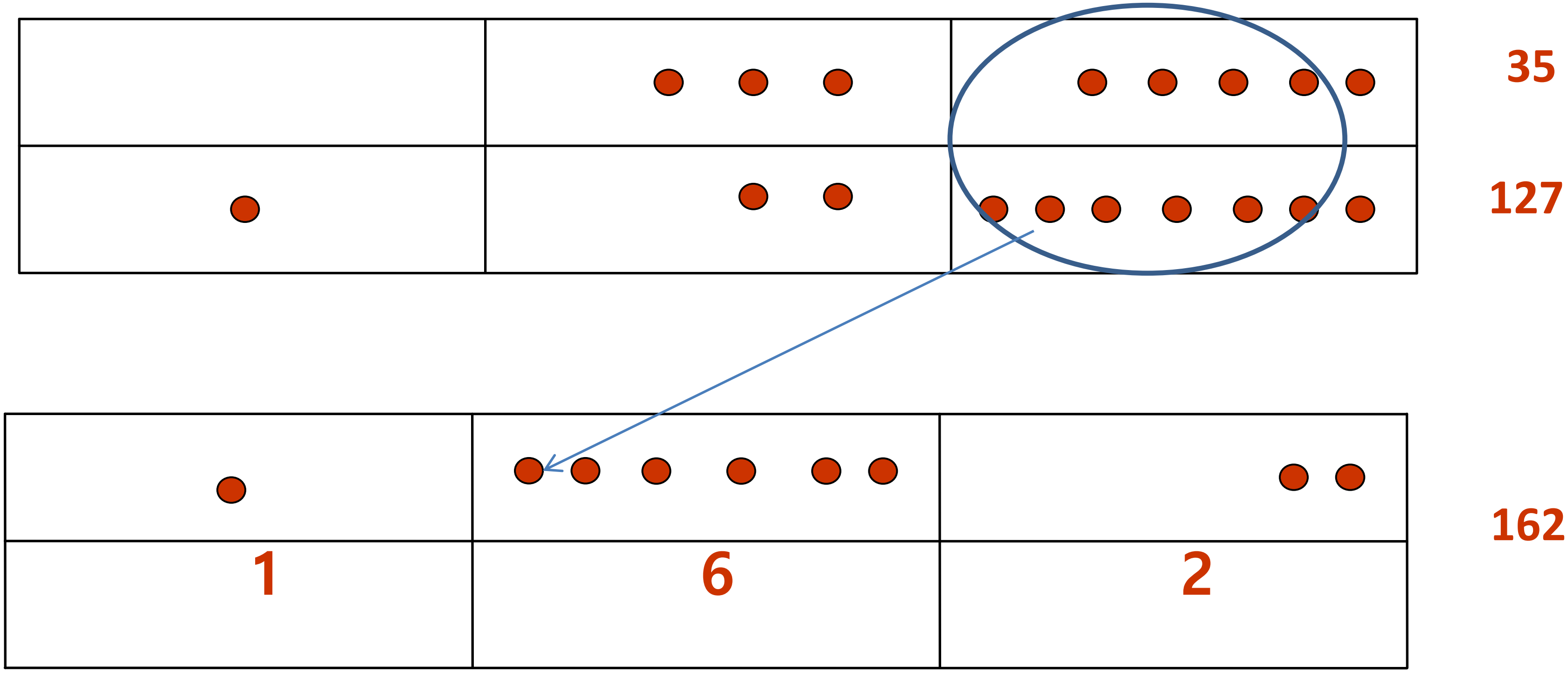
Lo zero non era un numero.

Il sistema di numerazione romano

- La numerazione dei romani, come quella di tutta l'antichità, non è adatta per fare i calcoli.
- Essi per calcolare si servivano degli **abachi,** tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano con lo stilo i numeri oppure si depositavano dei sassolini (calculi).
- Il termine latino abacus deriva dal greco άβαξ e questo probabilmente dall'ebraico abaq (polvere).
- Gli abachi sono strumenti di calcolo che funzionano come i pallottolieri.

L’abaco e i sistemi di numerazione posizionale

Schematizziamo un abaco costituito da tre scomparti e proviamo a calcolare la somma tra due numeri



- L'abaco venne usato per tutto il medioevo, un notevole progresso si fece coniando dei gettoni con su incisi dei segni, ognuno dei quali rappresentava un numero, questi gettoni facilitavo enormemente il compito.
- Questi gettoni introdotti da Gerberto d'Aurillac (Papa Silvestro II) permettevano di fare a meno dei sassolini, infatti il numero 236 si poteva scrivere così:

2	3	6

I gettoni però non permettono di fare a meno delle colonne dell'abaco. Con i gettoni 1 e 2 possiamo per es. scrivere:

1	2	
1		2
	1	2

centoventi, centodue o dodici ?

Per indicare un numero senza equivoci bisognava dire quale colonna d'abaco resta vuota.

Ancora oggi

- Trattiamo lo zero come segnaposto, come non-numero.
- Dove si trovi questo “segnaposto” non ha importanza, può stare ovunque nella successione dei numeri naturali

Basta osservare la tastiera del computer o quella del telefono

Lo zero evidentemente ci imbarazza. Tutti sappiamo che deve precedere l'1, ma è più sicuro tenerlo isolato. È il simbolo del nulla e il nulla ci fa paura

Se si esegue una divisione in colonna, per es. 126:3 il resto è zero, che ha tutta la dignità, in questo contesto, di essere un numero come tutti gli altri, ma no, la consuetudine è quella di scrivere due barre oblique oppure di dire “non c’è resto”.
Ma neanche nella moltiplicazione in colonna, per esempio di due cifre, lo zero ha destino migliore.

$$
\begin{array}{r}
24\times \\
32= \\
\hline
48 \\
72\ - \\
\hline
768
\end{array}
$$

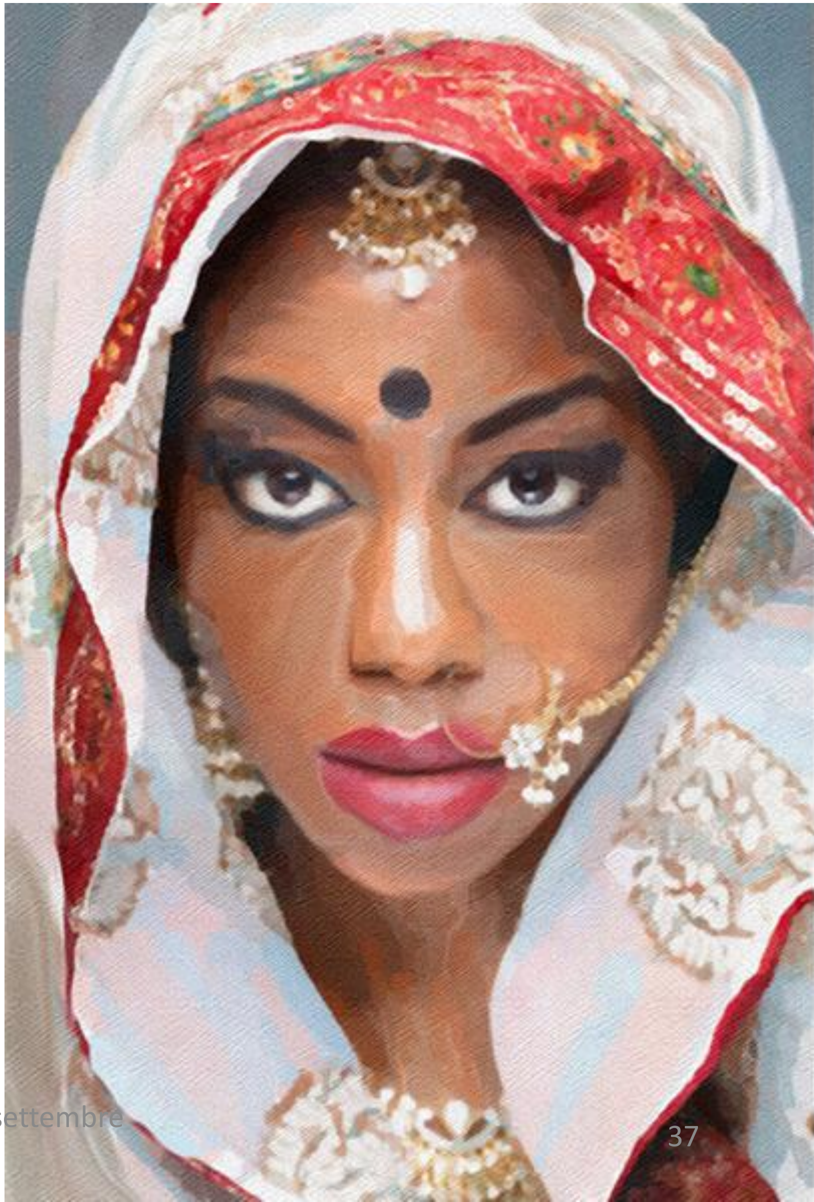
Cosa sarà mai questo *trattino*? Perché il *trattino*, le barre oblique? Perché non lo zero.

- Contrariamente all’Occidente che lo temeva l’Oriente riservò allo zero una buona accoglienza.
- I matematici indiani recepirono lo zero dandogli il ruolo di numero a tutti gli effetti.
- Così poterono cambiare la propria maniera di rappresentare i numeri da uno stile simile a quello greco alla notazione posizionale.
- Usando la notazione posizionale una persona era in grado di eseguire moltiplicazioni più rapidamente di uno che usava l’abaco.
- Il metodo algoritmista risultava vincente.

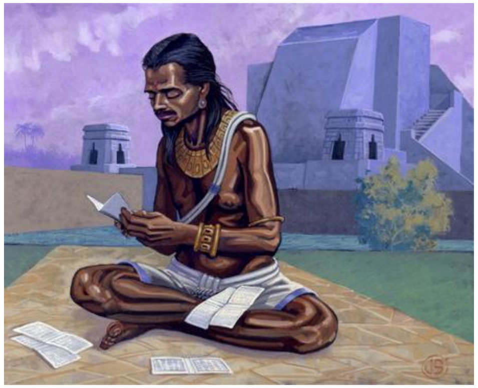
Il simbolo, il nome

Un grande poeta indiano, Biharilal, alludendo ad una donna molto bella, fece un paragone fra il punto e lo zero:

“Il punto sulla sua fronte, accresce la sua bellezza di dieci volte, proprio come un punto zero accresce un numero di dieci volte”.

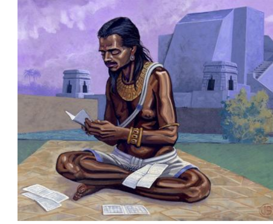


- Il sistema di numerazione indiano permette di eseguire calcoli slegati da possibili associazioni geometriche.
- Ciò permise la nascita della moderna algebra.
- Era quindi possibile fare $2-3$ e generare i numeri negativi.
- Anche per gli indiani zero era un numero particolare.



Brahmagupta (Hindi ब्रह्मगुप्त) (598 d.C. – 668 d.C.)

dall’India al mondo arabo …

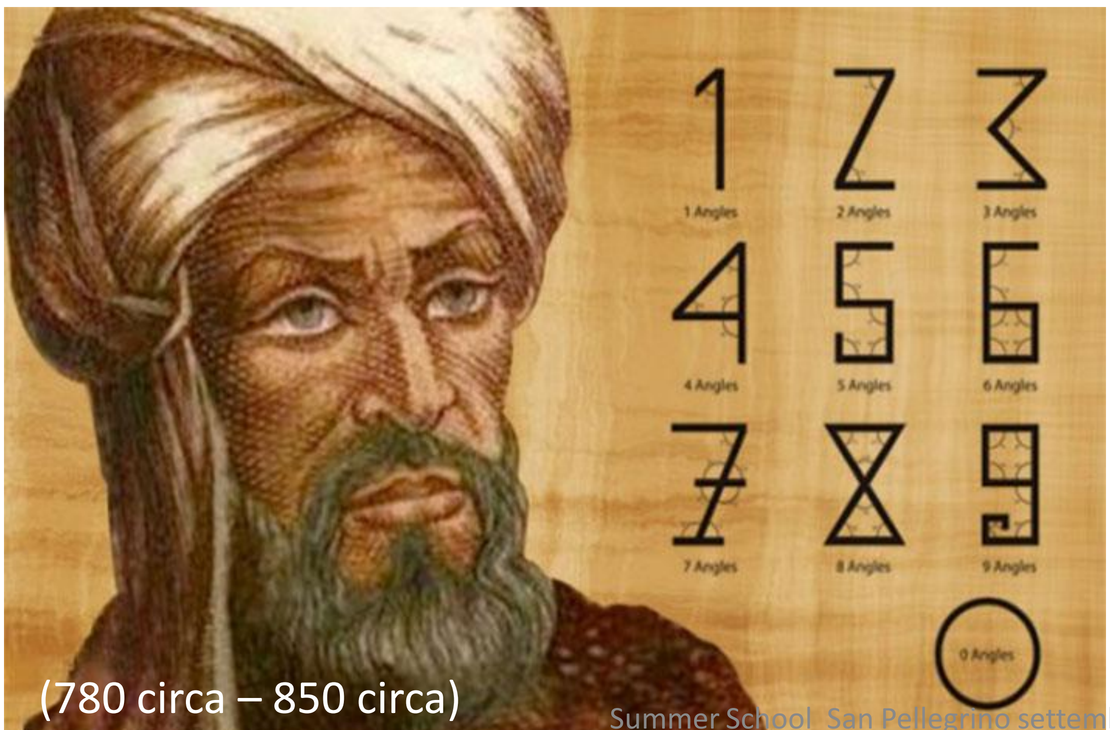


- Brahmagupta cercò di determinare cosa facesse 1/0 o 0/0 ma senza successo, infatti assegnò a 0/0 il risultato 0 che è sbagliato
- L’errore di Brahmagupta fu corretto e nel dodicesimo secolo i suoi colleghi si resero conto che 1/0 è una quantità infinita…
- Con la caduta dell’impero romano l’occidente era in piena crisi e l’oriente prosperava, la civiltà araba si imponeva
- Gli arabi conobbero lo zero dagli indiani e lo portano in occidente.

…. dove nasce l’algebra

- I mussulmani incorporavano molto facilmente i saperi dei popoli conquistati, gli eruditi traducevano i testi in arabo.
- Nel nono secolo il califfo di Bagdad fondò una grande biblioteca: la Casa della Saggezza che diventò il centro di ricerca e di studio per tutto il mondo orientale.

- Uno dei primi studiosi fu al-Khuwarizmi che scrisse un trattato sulle equazioni dal titolo al-giabr… da cui deriva la parola algebra.
- L’origine della parola Zero è indoarabica, infatti la denominazione indiana sunyia (vuoto) divenne presso gli arabi sifr che poi fu latinizzata in zephirum


(780 circa – 850 circa)

Gli occidentali fecero molta fatica ad accettare lo zero come numero, un ruolo fondamentale nella diffusione del metodo algoritmista l’ebbe Fibonacci.

Ecco come Fibonacci presenta le cifre indiane all'inizio del Liber Abaci.

Novem figure in dorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appel latur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

(Leonardo Fibonacci – Liber Abaci – Capitulum I)

"Le nove figure delle Indie sono 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con il segno 0, che gli arabi chiamano zephirum , è possibile scrivere qualunque numero, come dimostrerò tra poco"

Intemezzo

Una pagina Facebook gestita da buontemponi annuncia che un certo Tarim Bu Aziz ha chiesto di introdurre i numeri arabi nelle scuole italiane per favorire l’integrazione. Neanche il tempo di leggere la provocazione e i tastieristi della Rete già caricano a testa bassa. Scrivono al sedicente Tarim che i suoi numeri se li può infilare in quel posticino, basta buonismo, vaffa tu e i numeri arabi, in Italia usi i numeri nostri oppure te ne torni al tuo Paese. Il fatto è che i numeri nostri sono appunto i numeri arabi, importati nel tredicesimo secolo per sopperire all’eccessiva complessità di quelli romani.

Non è un'informazione riservata, né una cospirazione di matematici finanziati dalla setta degli Illuminati, ma una banalissima nozione scolastica che ha sfiorato le orecchie di chiunque abbia avuto dimestichezza con i banchi delle elementari. Uno può non avere più trovato il tempo di ripassarla, specie se ne trascorre troppo davanti al computer. Ma l'aspetto incredibile della vicenda è la reazione impulsiva di massa. Tra le tante persone ad avere letto la bufala, ben poche si saranno prese la briga di digitare «numeri arabi» su un motore di ricerca per controllare come stessero realmente le cose. Ci avrebbero impiegato non più di dieci secondi (10, in numeri arabi). Invece hanno preferito reagire d'impulso, che è cosa ben diversa dall'istinto. Come tanti pecoroni anarchici ai quali basta che una notizia confermi un pregiudizio per convincersi che sia vera.

Il caffè di Gramellini

Le proprietà dello zero sono inesplicabili, quel particolare numero è differente da tutti gli altri.

Lo zero si rifiuta di aumentare e del pari rifiuta di far aumentare ogni altro numero.

Lo zero mina alle fondamenta le più semplici operazioni matematiche quali moltiplicazione e divisione.

10=6? !

Teorema: dov'è l'errore?

Se esistono due numeri il cui rapporto è 3 a 5 allora 10=6

Dimostrazione

Siano x e y i due numeri, allora:

$x:y=3:5$ quindi $3y=5x$

moltiplicando ambo i membri per 4 avremo

$12y=20x$

che potremo scrivere nella forma

$30y-18y=50x-30x$

che è equivalente a

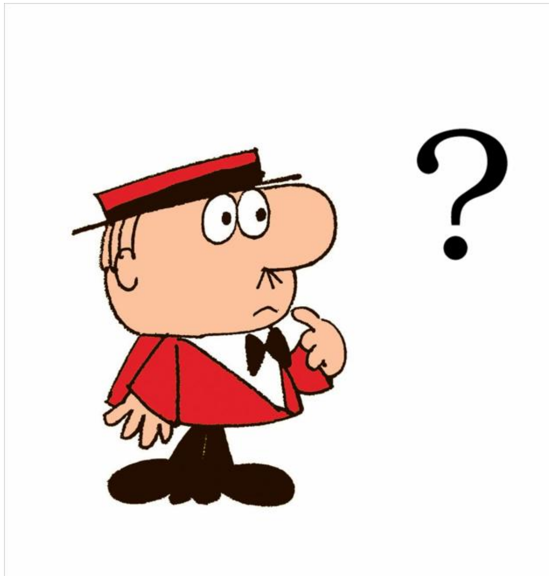
$30y-50x=18y-30x$

ovvero

$10(3y-5x)=6(3y-5x)$

quindi dividendo entrambi i membri per 3y-5x si ottiene che

$10=6$



ma se $3y=5x$ allora $3y-5x=0$ quindi non possiamo dividere per $3y-5x$ perché la divisione per zero è impossibile

Lo zero batte alle porte d'Europa.

Nel nostro continente in crisi, quello del niente era diventato un bel problema.

Portato a Ovest dai taccuini dei mercanti arabi e dai libri dei pronti matematici islamici, verso il XII secolo il nulla ridotto in cifra (e già, perché da noi l'arabo *sifr* non significa più niente, ma diventa la base etimologica di cifra) o, se volete, la «cifra del niente» bussa finalmente alle porte della dormiente Europa. E la spaventa.

Da zero a infinito

- Nel continente dove i mercanti scarseggiano e gli intellettuali sono isolati nei monasteri, il niente fa davvero paura. Minaccia le fondamenta stesse della cristianità.
- La cristianità respinge lo zero, ma agli operatori mercantili italiani lo zero piace molto: ne riconoscono l’utilità.
- I governi lo mettono al bando, ma i mercanti continuano a usarlo.

La pericolosa idea s'infiltrò in Occidente attraverso le terre infedeli dell'Andalusia e della Sicilia. Portava con sé la «cifra del niente». La resistenza che gli Europei le opposero fu dura e prolungata, ma dopo qualche secolo dovettero arrendersi alla subdola quanto potente idea.

E da allora, dall'epoca del Rinascimento, la «cifra del niente», lo zero, conquisterà il vecchio continente e parteciperà da protagonista assoluto alla nascita della nuova scienza.

Scrive Laotse, nel **Tao Te King**, uno dei grandi libri dell’Antica Cina:

Lo guardi e non lo vedi
lo ascolti e non lo senti
ma se lo adoperi è inesauribile

Da zero a infinito e viceversa

- “*Sono due facce della stessa medaglia* – scrive sempre Seife in *Zero, la storia di un’idea pericolosa – moltiplicando zero per una qualunque quantità si ottiene zero, moltiplicando infinito per una qualunque quantità si ottiene infinito. La divisione per zero <u>porge</u> infinito, la divisione per infinito <u>porge</u> zero. Aggiungere zero a un numero lo lascia inalterato, aggiungere un numero a infinito lasci l’infinito tale e quale*”

Porge?

- Bhaskara (siamo nell'undicesimo secolo d. C.), per il quale 3/0 è uguale all'infinito.
- Contemporaneamente afferma però che

  (3/0) x 0 = 3, dimostrando ancora una grande confusione.
- Confusione che rimase nei secoli successivi, con i matematici sempre imbarazzati nel trattare lo zero e l'infinito, per le incongruenze che inevitabilmente ne nascevano.

Tra il XVI e il XVII secolo

René Descartes (1596-1650)

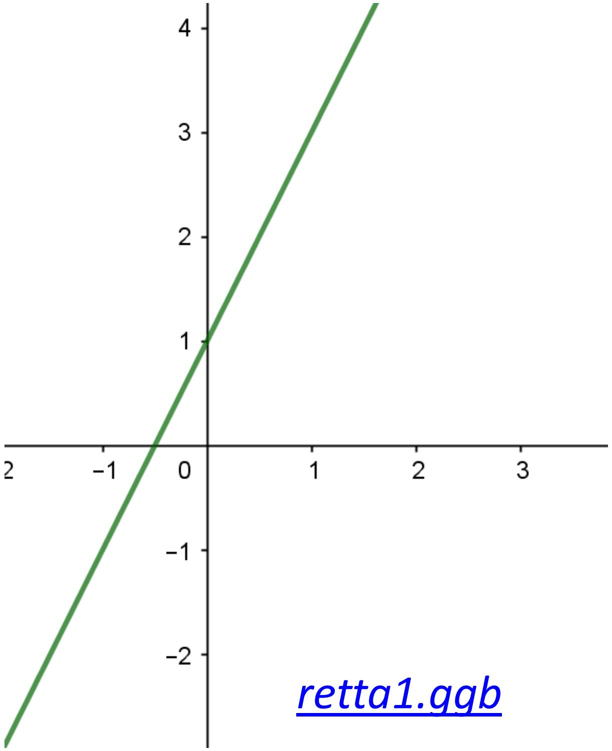
Le coordinate cartesiane

Pierre de Fermat (1601-1665)

il suo metodo per la individuazione dei massimi e dei minimi delle funzioni precorse gli sviluppi del calcolo differenziale.

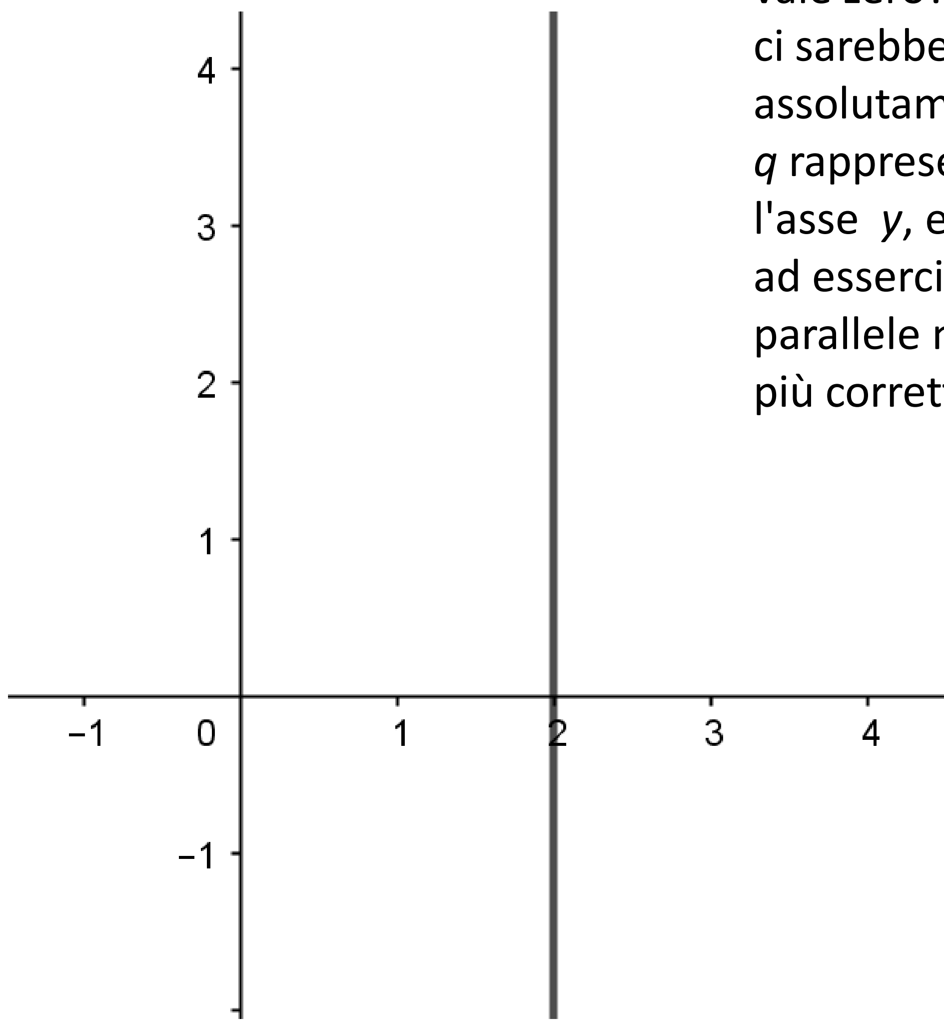
Da zero a infinito e viceversa

- l'equazione della retta in forma esplicita: *$y = mx + q$.*



[*retta1.ggb*]

Se *$m=0$* la retta è parallela all'asse *x*, ma che succede quando la retta è parallela all'asse *y* ?



quando la retta è parallela all'asse *y,* m allora vale zero? No, no, non c'è proprio, se valesse zero ci sarebbe... Ma allora c'è solo la *q* ? No, no, assolutamente: non c'è neanche la *q*: la *q* rappresenta l'ordinata dell'intersezione con l'asse *y*, e se la retta è parallela all'asse *y* come fa ad esserci questa intersezione? Ma le rette parallele non si incontrano all'*infinito*? Oppure è più corretto dire che *non si incontrano*!

C'è un misterioso legame tra lo zero e il niente, ma anche tra il niente e l'impossibile...
E tra l'impossibile e l'infinito!
In definitiva, anche tra lo zero e l'infinito, che sono uno inverso dell'altro.

$$\frac{0}{1} = 0 \qquad \frac{1}{0} = \infty$$

Però uno dei due è un numero, l'altro no, e questa è una scelta davvero convenzionale . Certo, accettando l'infinito come numero succederebbero altre cose strane:

$$\infty + 1 = \infty \qquad \infty - 10000 = \infty \qquad \infty + \infty = \infty$$

Dalle rette alle curve

- Nel XVII secolo con l’introduzione del concetto di funzione lo studio delle equazioni cambia.
- Dall’essenza delle cose alla loro trasformazione.
- Problemi di moto (traiettorie curve)
- Somme di infiniti zeri
- Pendenza di una curva

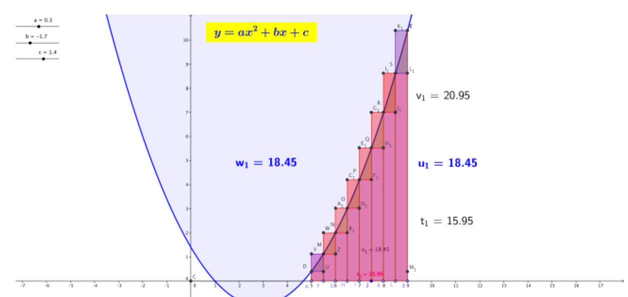
Bonaventura Cavalieri

- Sezionare figure per calcolarne l'area

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore,
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

Sommare infiniti segmenti di area nulla non ha senso logico



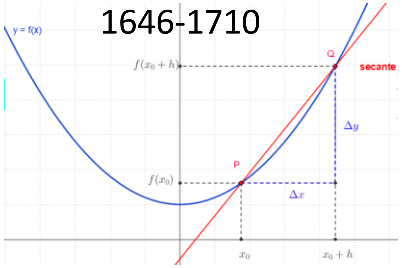
Trovare la pendenza di una curva

Studio dei fenomeni naturali: determinare la tangente in un punto per studiare il moto di un corpo.

Scende in campo Leibniz:

- Ogni volta che i matematici provavano a trattare con lo zero o con l'infinito incontravano ostacoli di ordine logico

1646-1710



Il problema del moto dei corpi

Newton più attento alle questioni di dinamica ed in genere del moto, differentemente da Leibnitz, introdusse il metodo delle ***flussioni.***

Il calcolo infinitesimale, perciò, nacque in Newton, per dare risposte a importanti problemi di tipo fisico-matematico

(posti precedentemente da Fermat,

Cartesio, Torricelli, Roberval e Barrow).

1642-1727

Il metodo delle flussioni

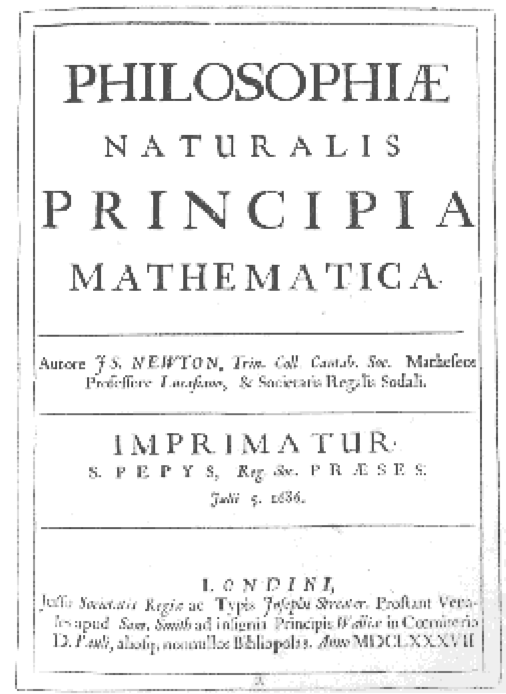
$$y = x^2 + x + 1$$

$$(y + o\dot{y}) = \left(x + o\dot{x} \right)^2 + \left(x + o\dot{x} \right) + 1$$

$$y + o\dot{y} = x^2 + 2xo\dot{x} + \left(o\dot{x} \right)^2 + x + (o\dot{x}) + 1$$

$$y + o\dot{y} = (x^2 + x + 1) + \left(o\dot{x} \right)^2 + 2xo\dot{x} + o\dot{x}$$

$$o\dot{y} = \left(o\dot{x} \right)^2 + 2xo\dot{x} + o\dot{x}$$


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Coemiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

essendo $(o\dot{x})$ molto piccolo $\left(o\dot{x} \right)^2$ lo è ancora di più lo possiamo trascurare

- Anche il metodo delle flussioni si fonda su un’operazione non lecita (la divisione per zero), ma presentava notevoli vantaggi: funzionava.
- Risolveva non solo il problema della tangente, ma anche quello dell’area.
- Nasce l’analisi infinitesimale con due potenti strumenti: il calcolo differenziale e il calcolo integrale.

Il problema del moto dei corpi

" Il libro della natura è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola".

Galileo Galilei (Pisa, 15 febbraio 1564 - Arcetri, 8 gennaio 1642)

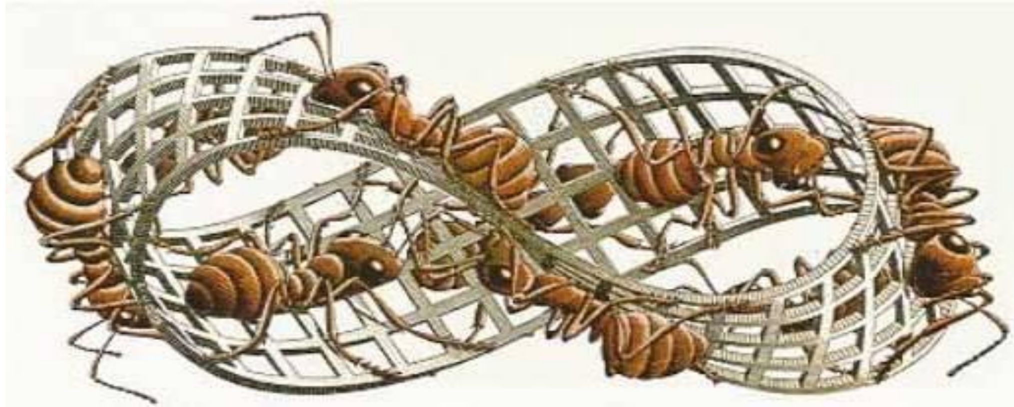
Leibniz e Newton

- Il calcolo infinitesimale richiedeva un atto di fede, ma in pratica funzionava e questo contava più di tutto. Aveva ragione il vescovo Berkeley, ostinato oppositore di Newton a scrivere: “*Se alziamo il velo e vi guardiamo sotto, scopriamo vuotaggine, oscurità e confusione alquante, per non dire, se non mi sbaglio, di certe impossibilità e contraddizioni addirittura*”.

“Lo sviluppo di questo calcolo differenziale spiega anche l’enorme successo del metodo in diverse applicazioni nonostante dipendesse da metodi di ragionamento non del tutto comprensibili. La gente sapeva cosa fare, anche se non sapeva perché funzionava. Molti studenti nei corsi di analisi hanno tutt’oggi un’esperienza simile”.

Keith Devlin in *Il linguaggio della matematica*

- Ci pensarono i matematici, negli anni successivi, a chiarire e definire il calcolo infinitesimale. Sarebbero comunque passati quasi duecento anni prima che Cauchy e Weierstrass riuscissero a costruire una teoria matematica rigorosa sulla quale fondare l'analisi matematica, attraverso la definizione del concetto di "limite".



- Un ministro della repubblica per disprezzare un sindaco lo appella definendolo uno zero assoluto.
- Uno scrittore gli risponde citando Kaplan: guarda lo zero e vedrai il nulla, guarda attraverso lo zero e vedrai l'infinito.