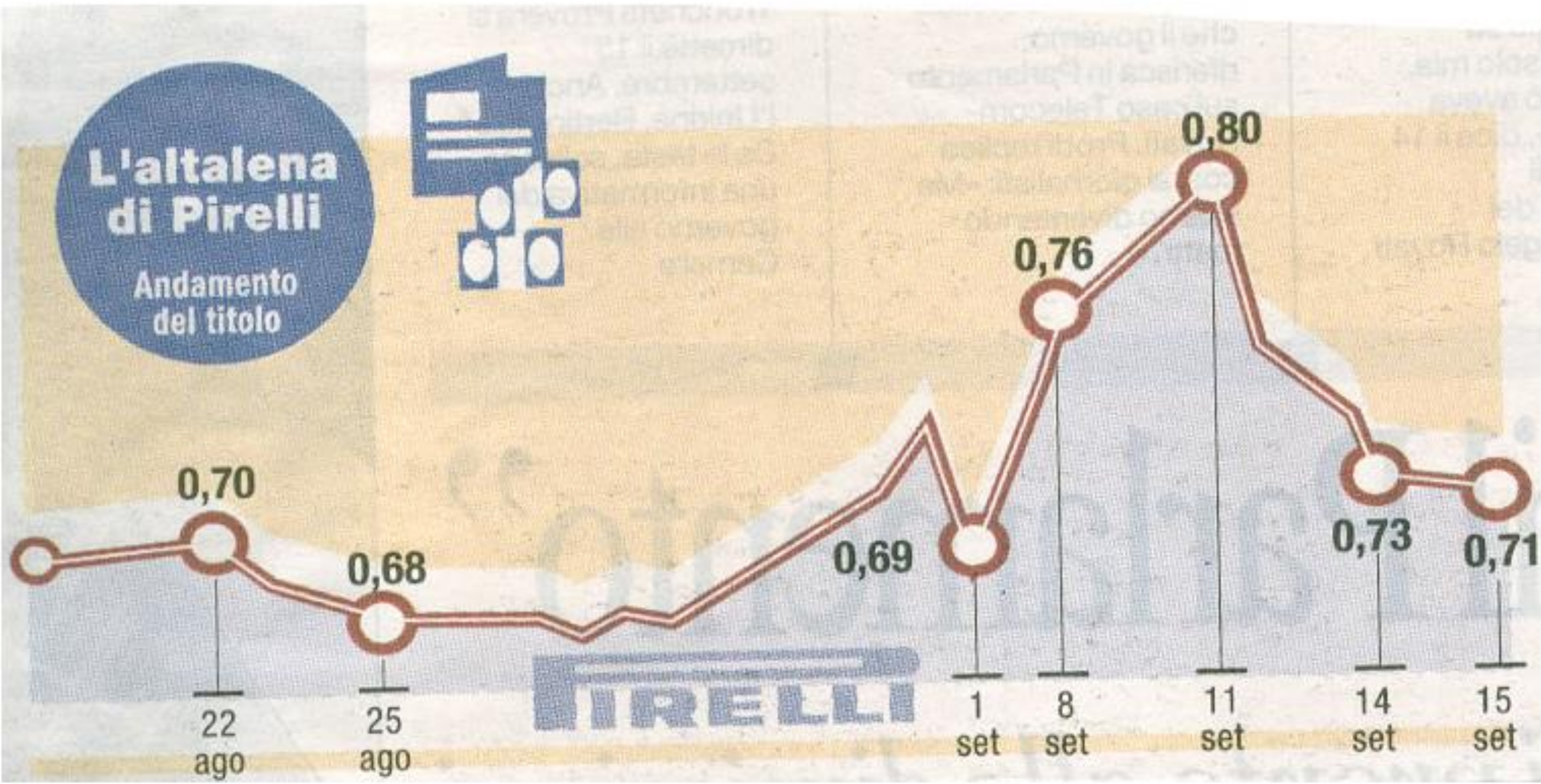
Avvio alla probabilità e alla statistica nella scuola secondaria di secondo grado

Riflessioni ed esperienze

Domingo Paola
Liceo «G. Bruno» - Albenga

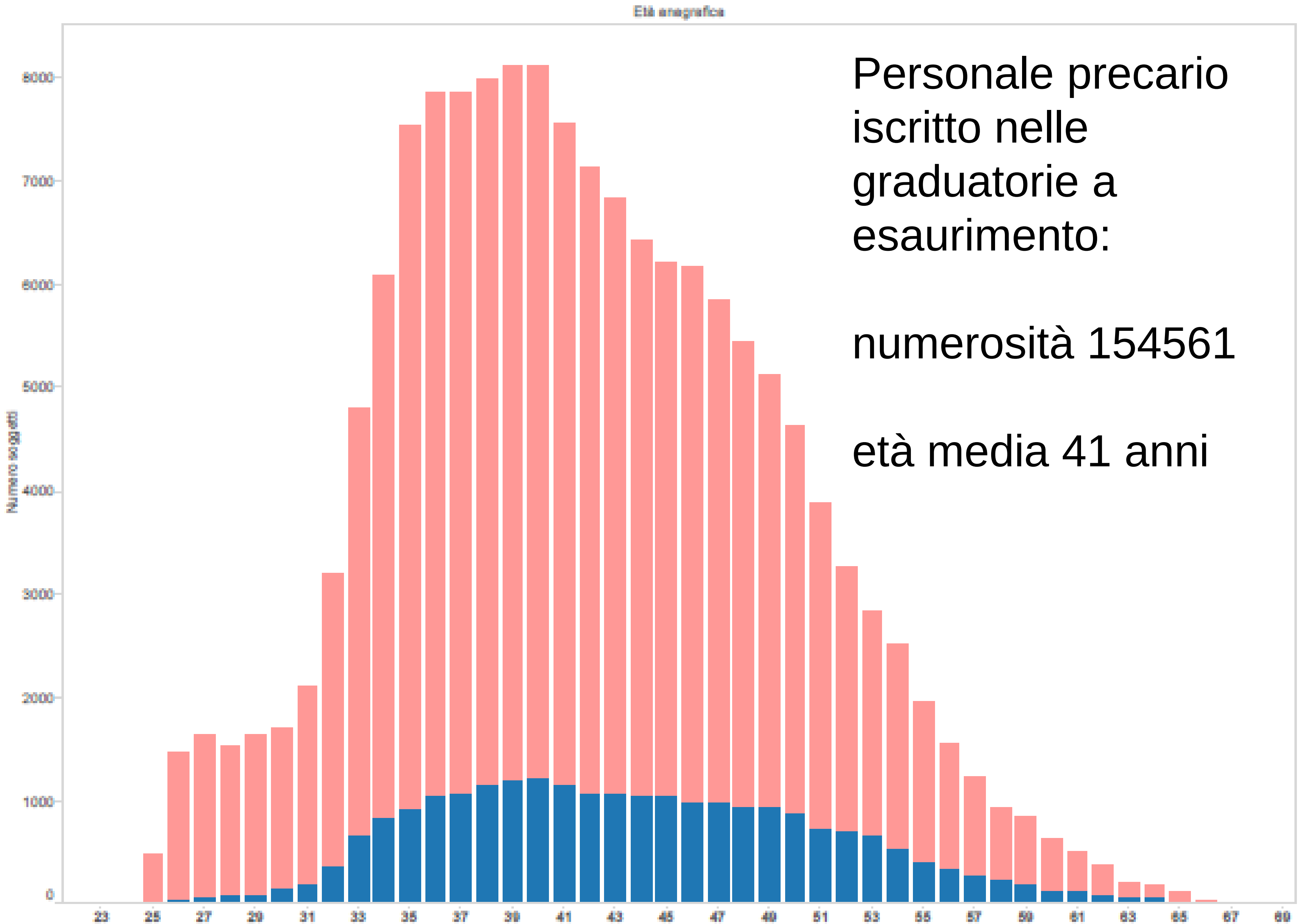
San Pellegrino Terme
7 settembre 2015

«Data literacy …»
tre esempi per incominciare



L'altalena di Pirelli
Andamento del titolo
0,70
0,68
0,69
0,76
0,80
0,73
0,71
22 ago
25 ago
1 set
8 set
11 set
14 set
15 set
PIRELLI

Numerosità dei soggetti iscritti nelle graduatorie ad esaurimento per età anagrafica e genere

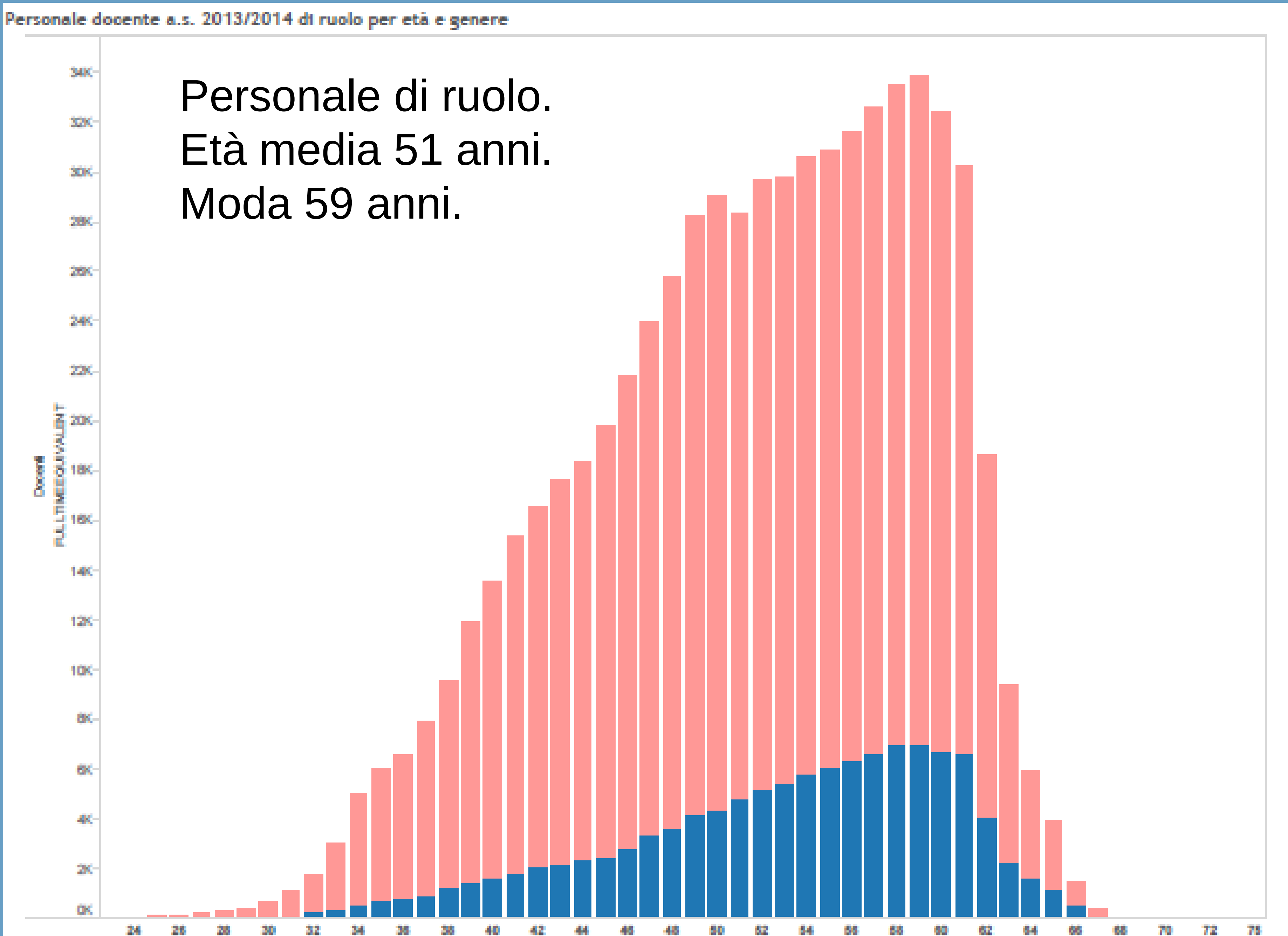


Personale precario iscritto nelle graduatorie a esaurimento:

numerosità 154561

età media 41 anni

Personale di ruolo.
Età media 51 anni.
Moda 59 anni.



Se confrontiamo la distribuzione per età degli iscritti nelle GAE con quella del personale di ruolo, diventa chiaro che la ***loro assunzione consentirà di ringiovanire sensibilmente il corpo docente, che oggi ha un'età media di 51 anni****, con un picco di presenza in servizio a 59 anni d'età.*

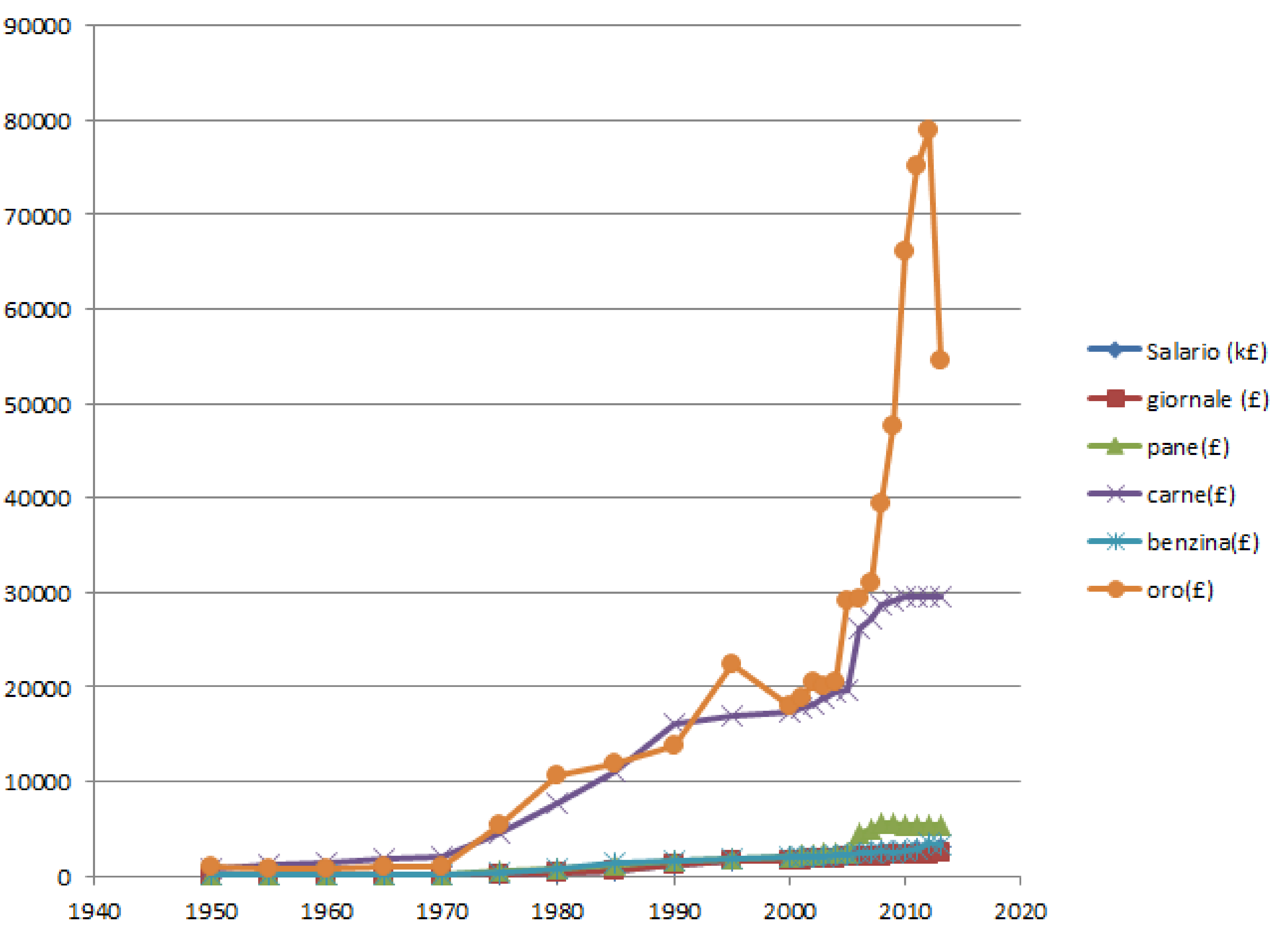
CAMERA DEI DEPUTATI
Assemblea
Seduta di mercoledì 10 marzo 2010
Interrogazione a risposta immediata n. 3-00957 dell'On. Delia Murer ed altri sulle iniziative relative ai ritardi verificatisi nelle procedure per il rilascio ed il rinnovo del permesso di soggiorno. Interviene il Ministro dell'interno On. Maroni

ROBERTO MARONI, ***Ministro dell'interno***
[…] Inoltre, i tempi medi assoluti di conclusione del procedimento si sono progressivamente ridotti, si è passati dai 303 giorni del 2007 (tempi medi per il rilascio del permesso) ai 271 del 2008, ai 101 del 2009, con una riduzione del 67 per cento rispetto al 2007 e del 63 per cento rispetto al 2008, quindi, di

oltre il 120 per cento in due anni.

Un’esperienza di avvio all’analisi dei dati e all’argomentazione

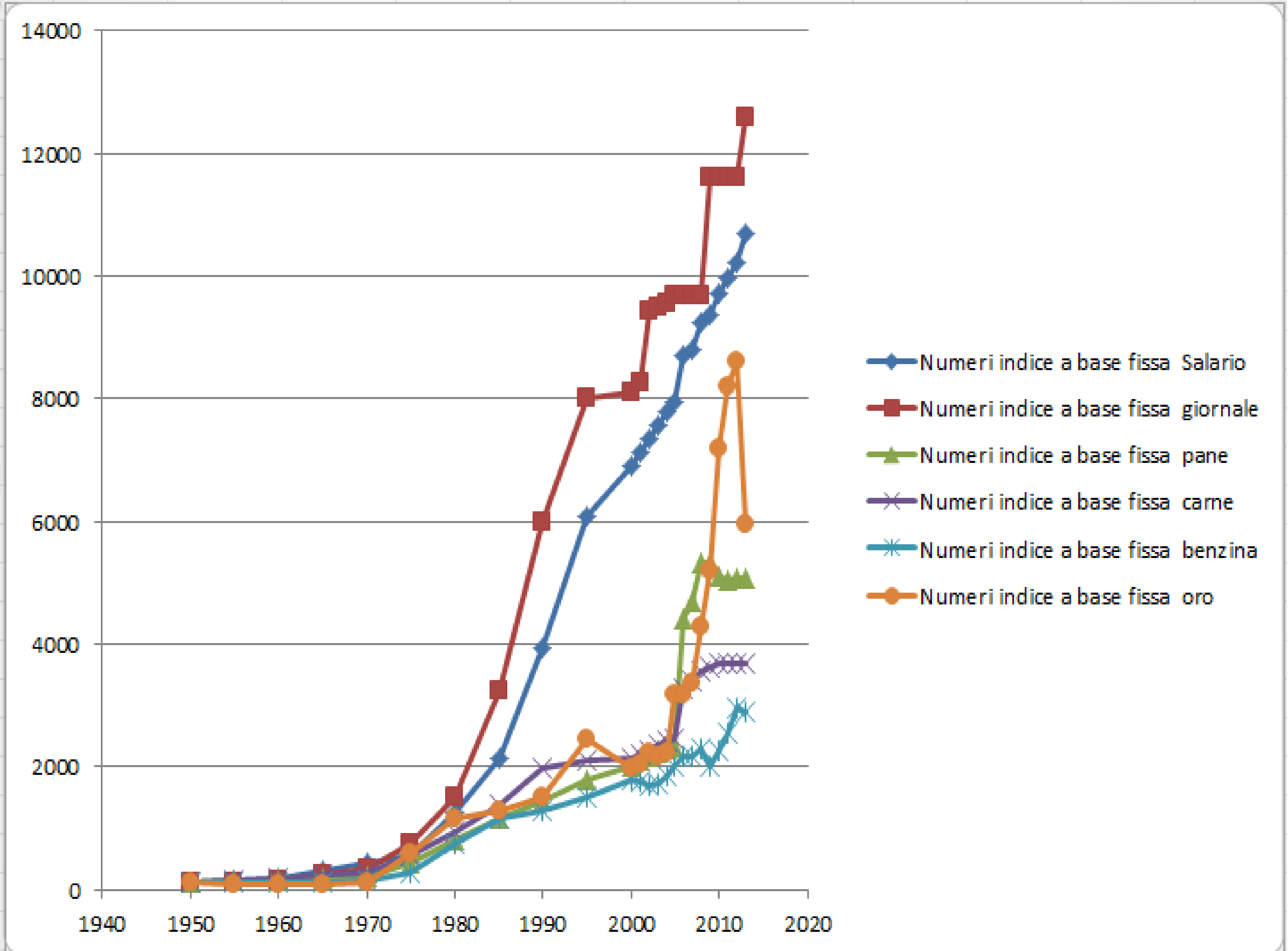
Anno	Salario (k£)	giornale (£)	pane(£)	carne(£)	benzina(£)	oro(£)
1950	28	20	105	805	116	918
1955	40	25	150	1200	138	721
1960	47	30	140	1400	120	835
1965	86	50	170	1900	120	870
1970	120	70	230	2100	160	1022
1975	154	150	450	4500	305	5440
1980	350	300	850	7600	850	10700
1985	600	650	1200	11000	1329	11800
1990	1100	1200	1500	16000	1500	13800
1995	1700	1600	1888	16940	1735	22450
2000	1936	1620	2120	17300	2069	18046
2001	1995	1650	2217	17800	2030	18859
2002	2055	1885	2281	18300	1975	20428
2003	2117	1900	2338	18900	2005	20002
2004	2181	1910	2420	19380	2131	20486
2005	2225	1936	2455	19700	2325	29044
2006	2438	1936	4627	26271	2500	29234
2007	2463	1936	4936	27316	2498	31019
2008	2585	1936	5595	28749	2671	39384
2009	2625	2323	5575	29136	2342	47632
2010	2722	2323	5343	29524	2632	66089
2011	2789	2323	5304	29524	2962	75185
2012	2859	2323	5324	29524	3446	79019
2013	2993	2517	5324	29524	3368	54622


90000
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
Salario (k£)
giornale (£)
pane(£)
carne(£)
benzina(£)
oro(£)

Anno	Salario (k£)	giornale (£)	pane(£)	carne(£)	benzina(£)	oro(£)
1950	2.8E+01	2.0E+01	1.1E+02	8.1E+02	1.2E+02	9.2E+02
1955	4.0E+01	2.5E+01	1.5E+02	1.2E+03	1.4E+02	7.2E+02
1960	4.7E+01	3.0E+01	1.4E+02	1.4E+03	1.2E+02	8.4E+02
1965	8.6E+01	5.0E+01	1.7E+02	1.9E+03	1.2E+02	8.7E+02
1970	1.2E+02	7.0E+01	2.3E+02	2.1E+03	1.6E+02	1.0E+03
1975	1.5E+02	1.5E+02	4.5E+02	4.5E+03	3.1E+02	5.4E+03
1980	3.5E+02	3.0E+02	8.5E+02	7.6E+03	8.5E+02	1.1E+04
1985	6.0E+02	6.5E+02	1.2E+03	1.1E+04	1.3E+03	1.2E+04
1990	1.1E+03	1.2E+03	1.5E+03	1.6E+04	1.5E+03	1.4E+04
1995	1.7E+03	1.6E+03	1.9E+03	1.7E+04	1.7E+03	2.2E+04
2000	1.9E+03	1.6E+03	2.1E+03	1.7E+04	2.1E+03	1.8E+04
2001	2.0E+03	1.7E+03	2.2E+03	1.8E+04	2.0E+03	1.9E+04
2002	2.1E+03	1.9E+03	2.3E+03	1.8E+04	2.0E+03	2.0E+04
2003	2.1E+03	1.9E+03	2.3E+03	1.9E+04	2.0E+03	2.0E+04
2004	2.2E+03	1.9E+03	2.4E+03	1.9E+04	2.1E+03	2.0E+04
2005	2.2E+03	1.9E+03	2.5E+03	2.0E+04	2.3E+03	2.9E+04
2006	2.4E+03	1.9E+03	4.6E+03	2.6E+04	2.5E+03	2.9E+04
2007	2.5E+03	1.9E+03	4.9E+03	2.7E+04	2.5E+03	3.1E+04
2008	2.6E+03	1.9E+03	5.6E+03	2.9E+04	2.7E+03	3.9E+04
2009	2.6E+03	2.3E+03	5.6E+03	2.9E+04	2.3E+03	4.8E+04
2010	2.7E+03	2.3E+03	5.3E+03	3.0E+04	2.6E+03	6.6E+04
2011	2.8E+03	2.3E+03	5.3E+03	3.0E+04	3.0E+03	7.5E+04
2012	2.9E+03	2.3E+03	5.3E+03	3.0E+04	3.4E+03	7.9E+04
2013	3.0E+03	2.5E+03	5.3E+03	3.0E+04	3.4E+03	5.5E+04

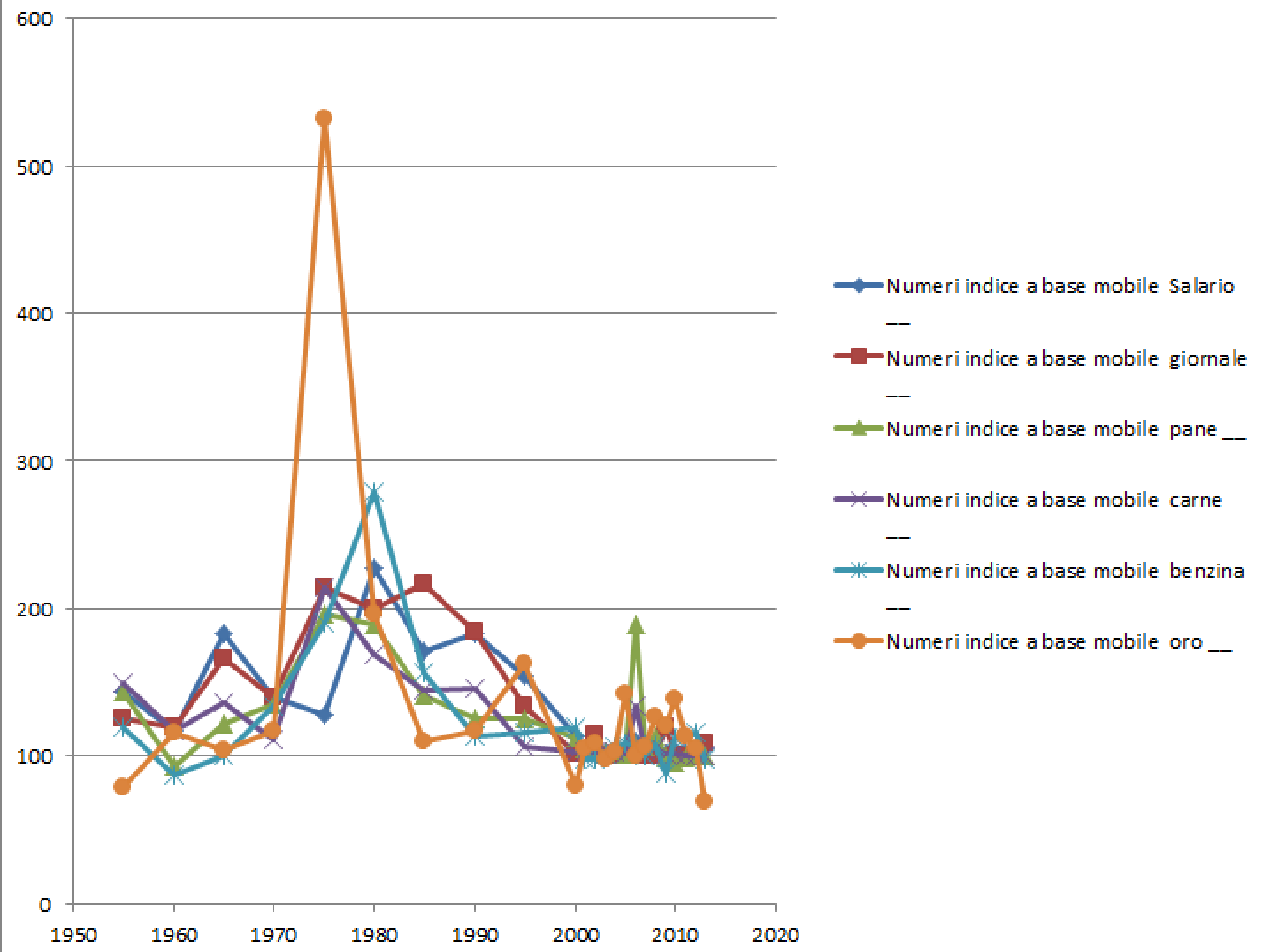
Numeri indice a base fissa

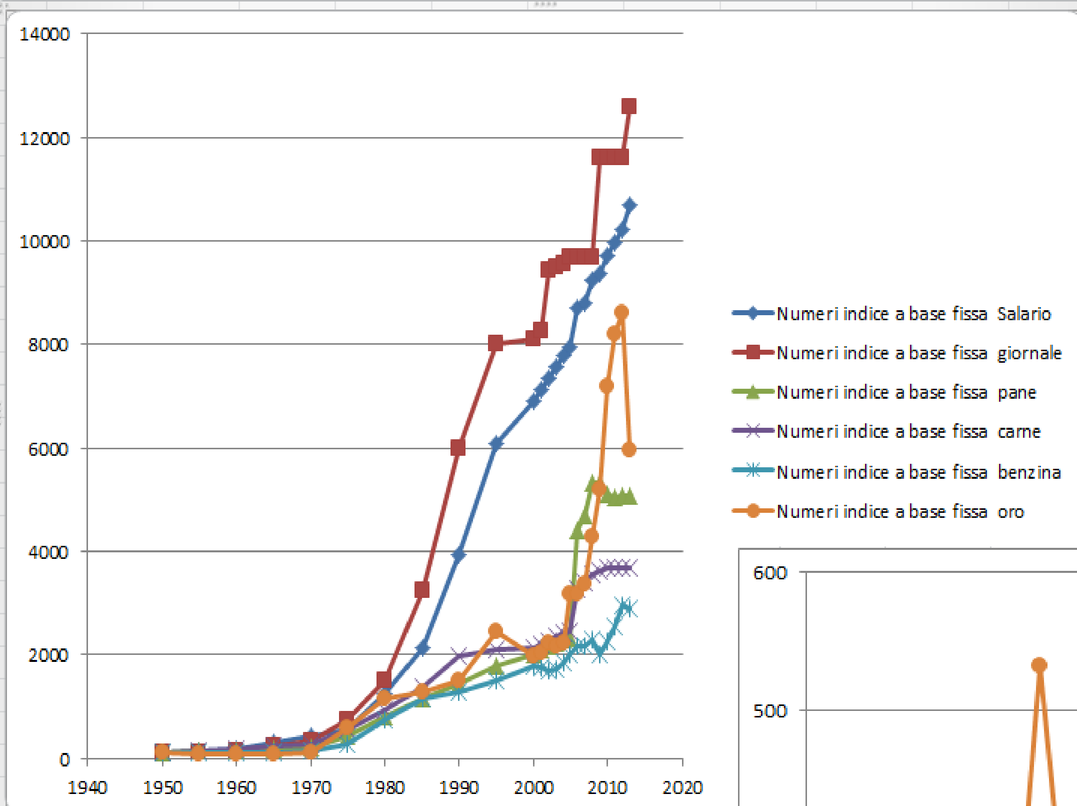
Anno	Salario	giornale	pane	carne	benzina	oro
1950	100	100	100	100	100	100
1955	143	125	143	149	119	79
1960	168	150	133	174	103	91
1965	307	250	162	236	103	95
1970	429	350	219	261	138	111
1975	550	750	429	559	263	593
1980	1250	1500	810	944	733	1166
1985	2143	3250	1143	1366	1146	1285
1990	3929	6000	1429	1988	1293	1503
1995	6071	8000	1798	2104	1496	2446
2000	6914	8100	2019	2149	1784	1966
2001	7125	8250	2111	2211	1750	2054
2002	7339	9425	2172	2273	1703	2225
2003	7561	9500	2227	2348	1728	2179
2004	7789	9550	2305	2407	1837	2232
2005	7946	9680	2338	2447	2005	3164
2006	8707	9680	4407	3263	2155	3185
2007	8796	9680	4701	3393	2153	3379
2008	9232	9680	5329	3571	2303	4290
2009	9375	11615	5310	3619	2019	5189
2010	9721	11615	5089	3668	2269	7199
2011	9961	11615	5051	3668	2553	8190
2012	10211	11615	5070	3668	2971	8608
2013	10689	12585	5070	3668	2903	5950

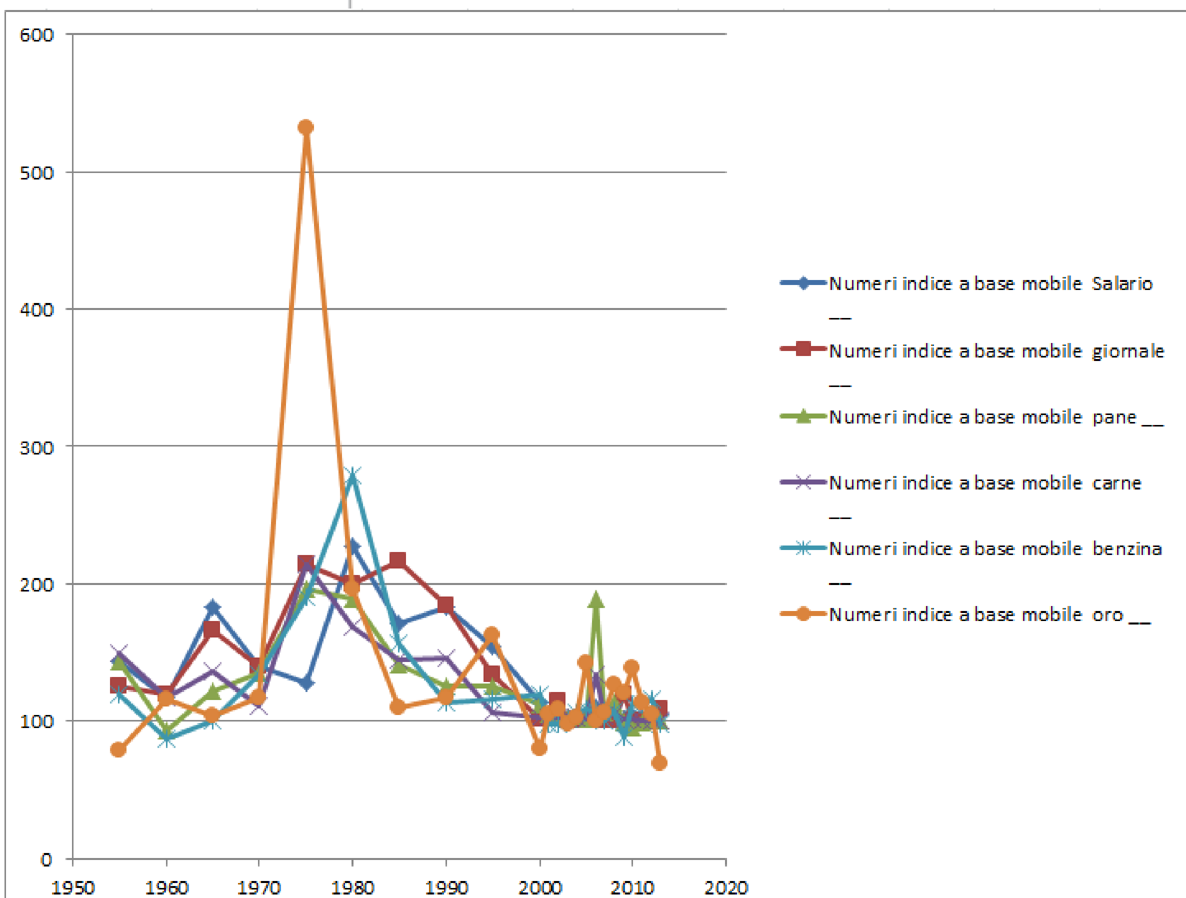

14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
Numeri indice a base fissa Salario
Numeri indice a base fissa giornale
Numeri indice a base fissa pane
Numeri indice a base fissa carne
Numeri indice a base fissa benzina
Numeri indice a base fissa oro

Numeri indice a base mobile

Anno	Salario	giornale	pane	carne	benzina	oro
1950	___	___	___	___	___	___
1955	143	125	143	149	119	79
1960	118	120	93	117	87	116
1965	183	167	121	136	100	104
1970	140	140	135	111	133	117
1975	128	214	196	214	191	532
1980	227	200	189	169	279	197
1985	171	217	141	145	156	110
1990	183	185	125	145	113	117
1995	155	133	126	106	116	163
2000	114	101	112	102	119	80
2001	103	102	105	103	98	105
2002	103	114	103	103	97	108
2003	103	101	102	103	102	98
2004	103	101	104	103	106	102
2005	102	101	101	102	109	142
2006	110	100	188	133	108	101
2007	101	100	107	104	100	106
2008	105	100	113	105	107	127
2009	102	120	100	101	88	121
2010	104	100	96	101	112	139
2011	102	100	99	100	113	114
2012	103	100	100	100	116	105
2013	105	108	100	100	98	69

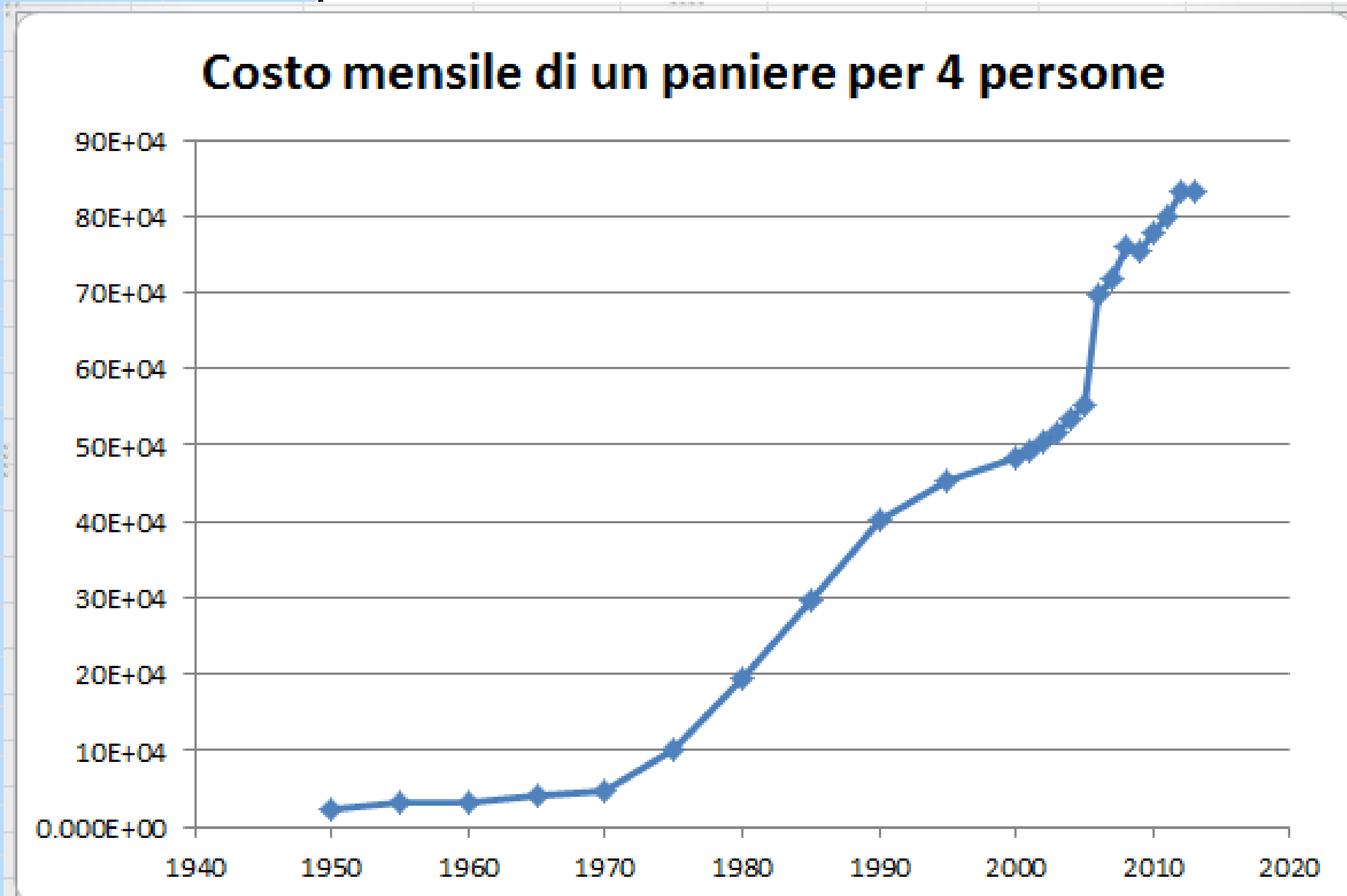

600
500
400
300
200
100
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
Numeri indice a base mobile Salario __
Numeri indice a base mobile giornale __
Numeri indice a base mobile pane __
Numeri indice a base mobile carne __
Numeri indice a base mobile benzina __
Numeri indice a base mobile oro __


14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
Numeri indice a base fissa Salario
Numeri indice a base fissa giornale
Numeri indice a base fissa pane
Numeri indice a base fissa carne
Numeri indice a base fissa benzina
Numeri indice a base fissa oro

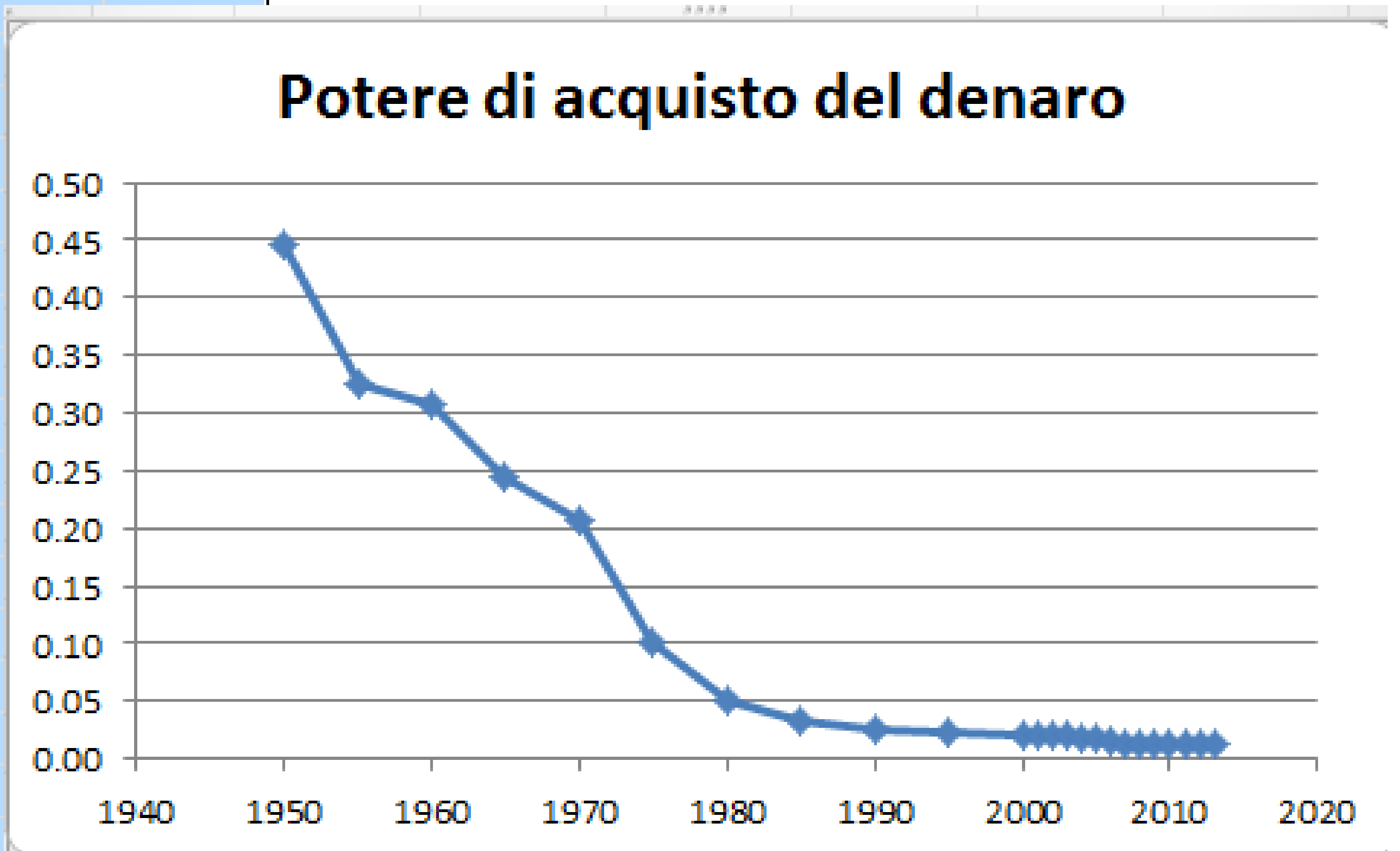

600
500
400
300
200
100
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
Numeri indice a base mobile Salario __
Numeri indice a base mobile giornale __
Numeri indice a base mobile pane __
Numeri indice a base mobile carne __
Numeri indice a base mobile benzina __
Numeri indice a base mobile oro __

Costo mensile di un paniere per 4 persone

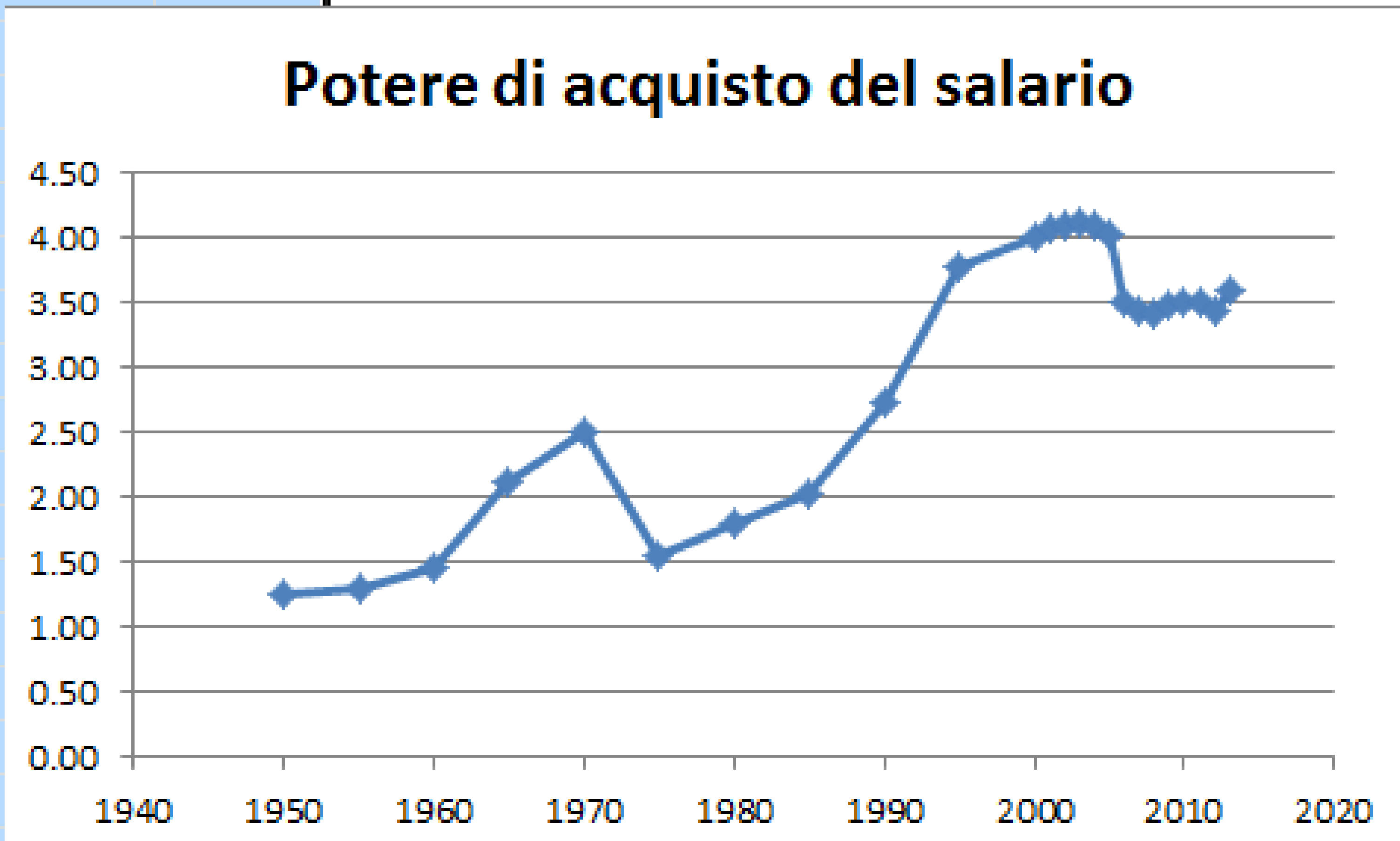
Anno	
1950	2.2E+04
1955	3.1E+04
1960	3.2E+04
1965	4.1E+04
1970	4.8E+04
1975	1.0E+05
1980	2.0E+05
1985	3.0E+05
1990	4.0E+05
1995	4.5E+05
2000	4.8E+05
2001	4.9E+05
2002	5.0E+05
2003	5.2E+05
2004	5.3E+05
2005	5.5E+05
2006	7.0E+05
2007	7.2E+05
2008	7.6E+05
2009	7.5E+05
2010	7.8E+05
2011	8.0E+05
2012	8.3E+05
2013	8.3E+05



Anno	Potere di acquisto del denaro
1950	0.45
1955	0.33
1960	0.31
1965	0.24
1970	0.21
1975	0.10
1980	0.05
1985	0.03
1990	0.02
1995	0.02
2000	0.02
2001	0.02
2002	0.02
2003	0.02
2004	0.02
2005	0.02
2006	0.01
2007	0.01
2008	0.01
2009	0.01
2010	0.01
2011	0.01
2012	0.01
2013	0.01



Anno	Potere di acquisto del salario
1950	1.3
1955	1.3
1960	1.5
1965	2.1
1970	2.5
1975	1.5
1980	1.8
1985	2.0
1990	2.7
1995	3.8
2000	4.0
2001	4.1
2002	4.1
2003	4.1
2004	4.1
2005	4.0
2006	3.5
2007	3.4
2008	3.4
2009	3.5
2010	3.5
2011	3.5
2012	3.4
2013	3.6



Il «dibattito»
Per un avvio all’argomentazione

Organizzazione della classe

GIORNALISTI

TESI

ANTITESI

SINTESI

PUBBLICO

Tesi: l’Italia ha conosciuto negli anni Sessanta un livello di benessere mai più raggiunto in seguito. Si può anzi sostenere che, dopo quegli anni, il tenore di vita sia mediamente diminuito fino a conoscere, nei nostri anni, una delle crisi più profonde che hanno interessato la vita degli italiani.

Antitesi: Nonostante la grave crisi economica che ha investito l’Italia negli ultimi anni, si può sostenere che il tenore di vita degli italiani sia mediamente e consistentemente aumentato dalla metà del secolo scorso a oggi.

Modalità di valutazione

Esplicitazione chiara e consapevole della tesi da sostenere

Correttezza, pertinenza e ricchezza delle conoscenze utilizzate

Chiarezza, ed efficacia del linguaggio utilizzato

Una possibile estensione dell'attività

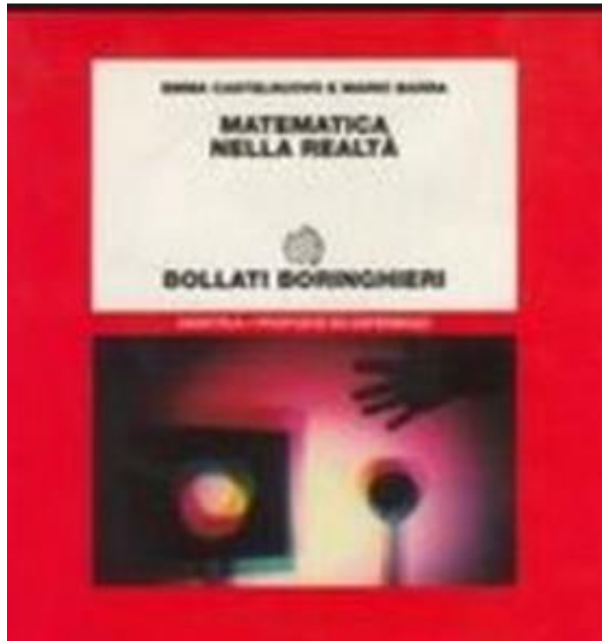
Confronti dei PIL e dei PIL pro-capite di diversi Paesi

Riflessione sull'adeguatezza del PIL pro-capite come indice di benessere di un Paese

Acquisizione di ulteriori dati per valutare il «benessere» di un Paese

Per un avvio al pensiero probabilistico

dal *problema delle parti* alla distribuzione binomiale: analisi di un percorso didattico per la sistemazione dei primi elementi di probabilità.



"Nel mondo che ci circonda troviamo una quantità innumerevole di situazioni probabilistiche. Bisogna guardare la probabilità non come un ramo della matematica, ma come un modo di vedere il mondo reale. Bisogna insegnare la probabilità non come un gioco senza significato, inutile e sciocco, e non soltanto in funzione delle sue applicazioni, ma per abituare il pensiero all'uso di questo nuovo strumento fondamentale".

Il problema delle parti per un'introduzione al pensiero probabilistico

A e B decidono di giocare a testa o croce con una moneta non truccata. Ogni mano, corrispondente a ogni lancio di moneta, è vinta da A se esce testa e da B se esce croce. Vince la partita il giocatore che per primo arrivi a vincere un numero convenuto n di mani. All'inizio del gioco, ognuno dei due giocatori metterà la sua parte della posta in gioco, p. Il vincitore si prenderà l'intera posta 2p. Prima che la partita sia terminata, però, i giocatori interrompono il gioco; in quel momento A ha vinto a mani, mentre B ne ha vinte b. *Come va divisa la posta in gioco?*

Da Pacioli a Pascal e Fermat

«la lettera ci offre uno sguardo illuminante su come due delle più grandi menti matematiche del mondo s’arrovellarono su un problema, inciampando e facendo *banali* errori per poi essere ricompensate da lampi di brillanti intuizioni […] I modi in cui noi esseri umani oggi pensiamo al futuro e conduciamo le nostre esistenze sono possibili grazie alle idee matematiche espresse in quelle poche pagine»

Fino alla metà del secolo XIX, sia i cultori di probabilità che gli storici della matematica si limitavano a indicare l'inizio del calcolo delle probabilità in quel 1654, sottolineando la parte del Cavaliere de Méré, accanito giocatore e uomo di mondo, che propose a Pascal i primi problemi di probabilità. Fu nella seconda metà del 1800 che gli storici della matematica pervennero a segnalare, talora di passaggio e comunque in modo ancor vago e frammentario, alcuni precursori, se non dei **concetti**, almeno di una certa **problematica** di tipo probabilistico.

Antonio Carlo Garibaldi. (1982).Sulla preistoria del calcolo delle probabilità, in *Atti del Convegno La Storia delle Matematiche in Italia*, Cagliari, p.377-384

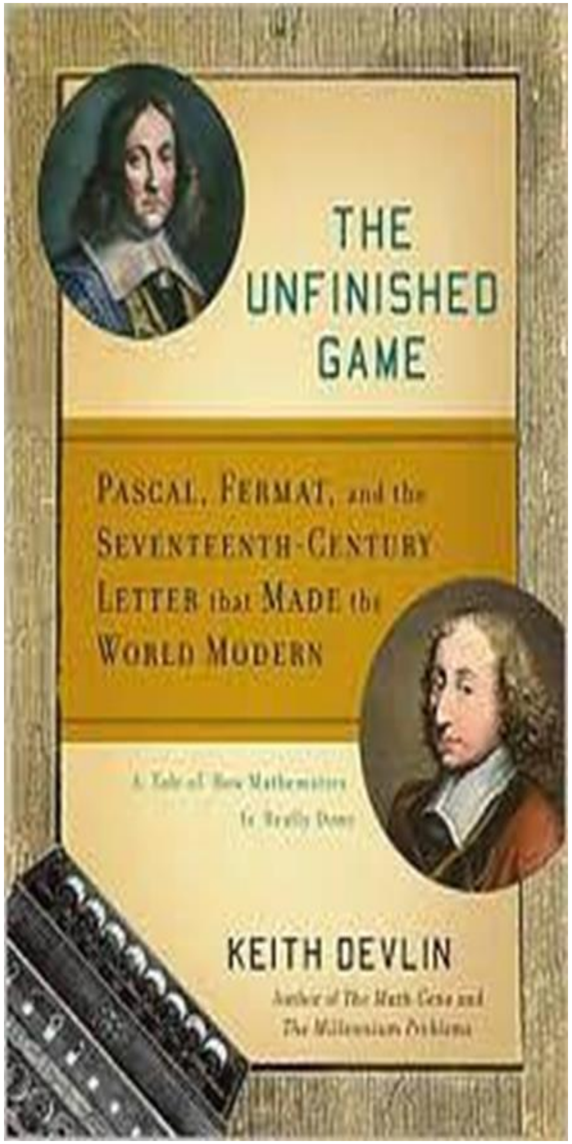
Prima di Pascal e Fermat …

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Nicolo Fontana
detto il Tartaglia
(1499 – 1557)

Alcune criticità legate al ragionamento probabilistico

- la difficoltà a legare le problematiche sul caso a ragionamenti e strumenti matematici conosciuti;
- la difficoltà a pensare in termini di ciò che può ancora accadere e a trovare adeguate rappresentazioni per lo spettro degli eventi possibili
- la difficoltà a contare, in situazioni complesse, i casi favorevoli all’accadere di un determinato evento e quelli possibili;
- la definizione di equità in un gioco come guadagno atteso nullo;
- la rinuncia a individuare, nella casualità con cui si succedono singoli eventi, leggi deterministiche di tipo causa – effetto o volontà di carattere divino;
- la ricerca di regolarità in media che consentano di approfondire le peculiarità della nozione di casualità.



A e B decidono di giocare a testa o croce con una moneta non truccata. Ogni mano, corrispondente a ogni lancio di moneta, è vinta da A se esce testa e da B se esce croce. Vince la partita il giocatore che per primo arrivi a vincere un numero convenuto n di mani. All'inizio del gioco, ognuno dei due giocatori metterà la sua parte della posta in gioco, p. Il vincitore si prenderà l'intera posta 2p. Prima che la partita sia terminata, però, i giocatori interrompono il gioco; in quel momento A ha vinto a mani, mentre B ne ha vinte b. *Come va divisa la posta in gioco?*

[*n*; *a*, *b*] oppure **[- *a*, - *b*]**

Pacioli affronta il problema (60; 20,50) e propone di dividere la posta proporzionalmente alle mani vinte prima dell'interruzione:

70 = 20 + 50 mani giocate prima dell'interruzione da A e da B.

$V(A)$ = vincita di A; $V(B)$ = vincita di B.

Impostando la proporzione $V(A) : V(B) = 20 : 50$ si ottiene:

$$\frac{V(A)}{2p}=\frac{20}{70} \qquad \frac{V(B)}{2p}=\frac{50}{70}$$

Generalizzando le proporzioni si ottiene

$V(A) : (2p) = a : (a+b)$ e $V(B) : (2p) = b : (a+b)$

Quindi, per il generico problema (n; a, b) abbiamo:

$$\frac{V(A)}{2p}=\frac{a}{a+b} \qquad \frac{V(B)}{2p}=\frac{b}{a+b}$$

Cardano propone di dividere la posta considerando il numero di mani che i due giocatori devono ancora vincere per potersi aggiudicare l'intera partita. Nel caso dell'esempio precedente, (60; 20,50), abbiamo che ad A mancano 40 mani per vincere e a B ne mancano 10. Impostiamo quindi la proporzione $V(A) : V(B) = 10 : 40$. Applicando la proprietà del comporre si ha $V(A) : (2p) = 10 : 50$ e $V(B) : (2p) = 40 : 50$, da cui

$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{10}{50}; \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{40}{50} .$$

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Generalizzando abbiamo:

$V(A) : (2p) = (n - b) : (2n - a - b)$;

$V(B) : (2p) = (n - a) : (2n - a - b)$;

Infatti ad A mancano $(n - a)$ mani per vincere e a B ne mancano $(n - b)$

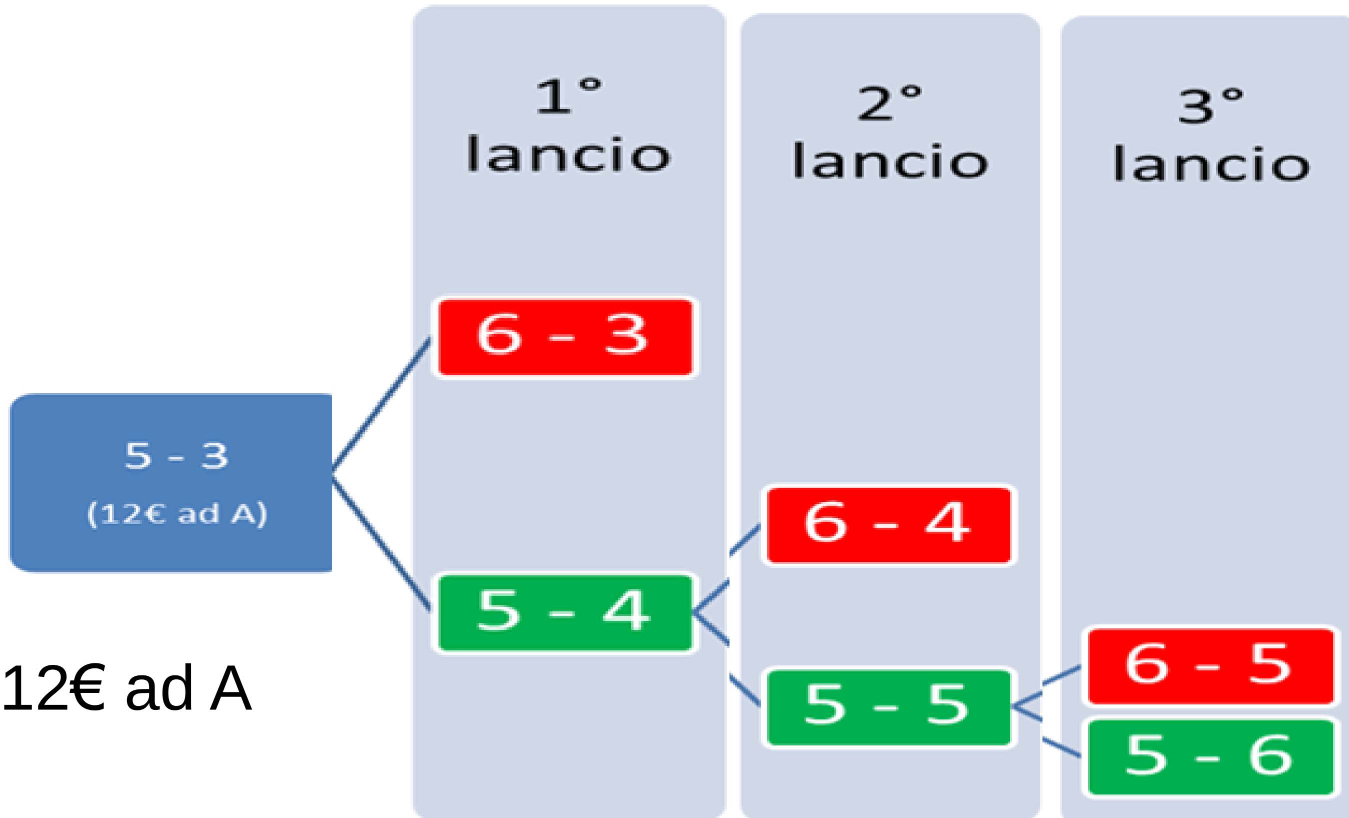
$$\frac{V(A)}{2p} = \frac{n-b}{2n-(a+b)} \quad \text{e} \quad \frac{V(B)}{2p} = \frac{n-a}{2n-(a+b)}$$

Cataneo affronta il problema (*n*; *a*,*b*) ragionando sul numero massimo di mani che possono essere giocate affinché il gioco si concluda con la vittoria di uno solo dei due giocatori, che è 2*n* – 1. Per esempio, nel caso considerato da Cataneo, cioè (8; 5,3), il numero massimo di mani che possono essere giocate in totale è 15. Cataneo suddivide una porzione della posta in base al punteggio che hanno i due giocatori al momento dell’interruzione e la porzione rimanente la suddivide in parti uguali. Così, nella situazione (8; 5,3), A prende i 5/15 della posta e B ne prende i 3/15 . Gli altri 7/15 della posta vanno divisi in parti uguali. Generalizzando si ha:

$$\frac{V(A)}{2p}=\frac{a}{2n-1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a+b}{2n-1}\right)=\frac{2n-1+a-b}{2(2n-1)}$$

$$\frac{V(B)}{2p}=\frac{b}{2n-1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a+b}{2n-1}\right)=\frac{2n-1+b-a}{2(2n-1)}$$

Postulato di Pascal: «se a uno dei due giocatori manca una partita per vincere, allora gli spetta metà della posta in gioco»



12€ ad A

+6 € ad A   +3 € ad A

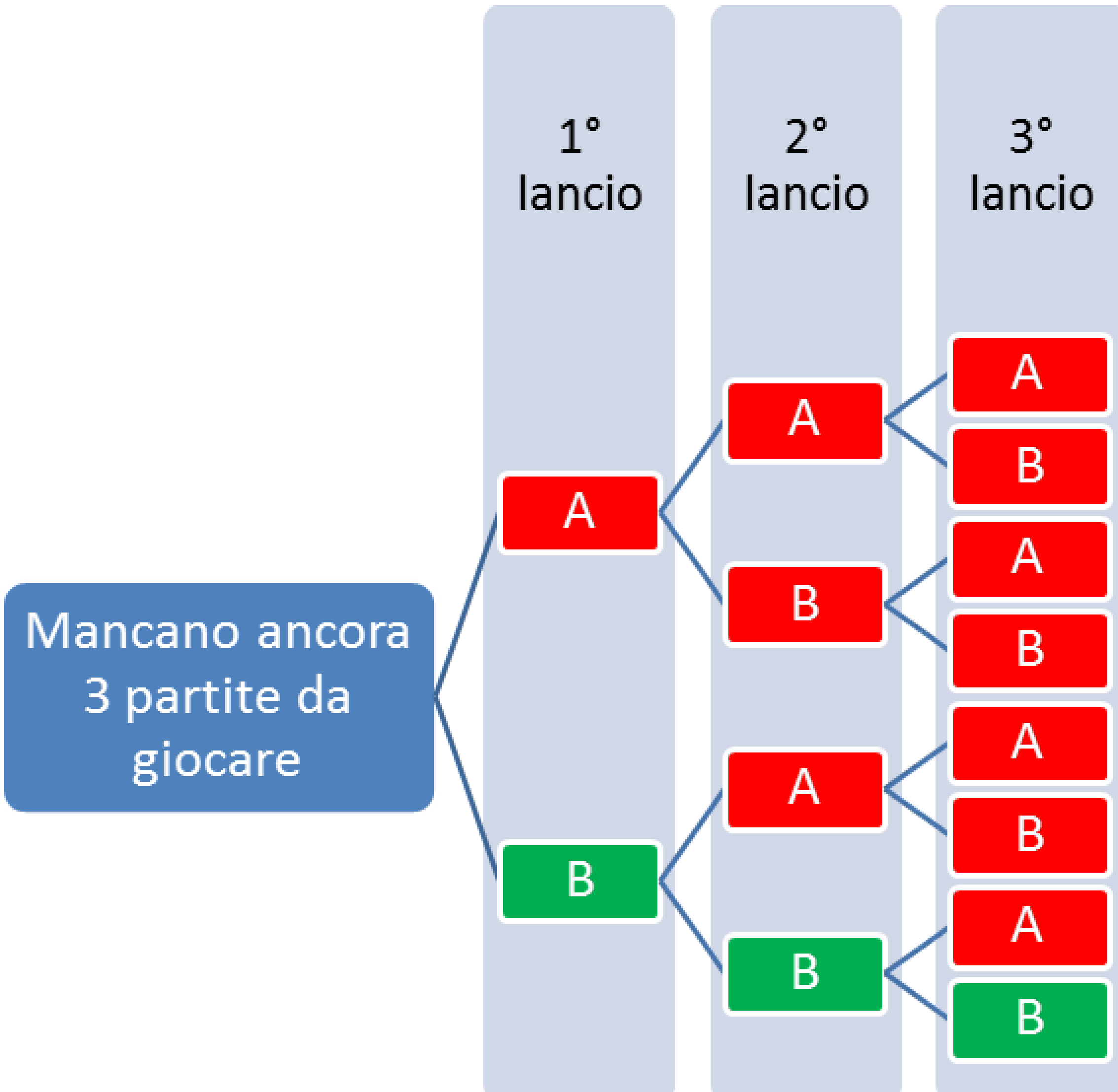
21 € ad A e 3 a B

FERMAT

Situazione: [6: 5,3]:

- Si possono giocare nel complesso al massimo 11 partite ($2n-1$);
- Sono già state giocate 8 partite ($a+b$)
- Mancano ancora 3 partite da giocare ($2n-1-a-b$)

Vediamo qual è la possibile distribuzione delle partite che ancora possono essere giocate:



Il problema proposto in classe, [6; 1, 0], e le tipologie di risoluzione proposte dagli studenti

Considerazione di casi diversi dall'1 a 0 per

→ generalizzare la soluzione trovata

→ opportunità di una verifica di correttezza della soluzione trovata.

→ difficoltà, da parte di molti studenti, ad attivare strategie risolutive completamente rivolte al futuro

→ proposta di soluzioni miste, à la Cataneo,

→ anche soluzioni nello spirito della soluzione proposta da Cardano.

Per esempio, Simone, ha proposto la seguente strategia risolutiva:
«*si moltiplica per 2.4* [una sorta di premio per ogni partita vinta] *per il numero di partite vinte da ciascun giocatore e poi si addiziona al risultato ottenuto la metà della posta rimasta*…se la partita non è terminata è *giusto* dividere la posta *ancora in gioco* in parti uguali fra i due giocatori»

Alessandro «secondo questa soluzione i due giocatori avrebbero diritto ad avere la stessa posta sia nel caso (6; 1,0), sia nel caso (6; 5,4). In entrambi i casi, infatti, al giocatore che sta vincendo spetterebbero 13.2 euro e 10.8 euro a chi sta perdendo. Eppure, *il 5 a 4 è un punteggio più favorevole dell'1 a 0, perché chi vince 5 a 4 è più vicino alla vittoria*».

Alessandro “*una soluzione è equa se è proporzionale a quanto manca alla vittoria*”.

Alessia prevede che la somma s che spetta al giocatore che sta vincendo sia una funzione che varia linearmente con la differenza d di punteggio. In particolare $s = 2\,d + 12$.
Per esempio, nel caso (6; 1,0) il giocatore che vince ha diritto a una posta $s = 14$ euro; nel caso (6; 5,2) il giocatore vincente ha diritto a una posta $s = 18$ euro.

Matteo suggerisce di confrontare il caso (1000;999,969) con il caso (1000;30,0).

Tali casi portano alla stessa suddivisione della posta in gioco con il metodo proposto da Alessia, ma “*per vincere, chi è a 969 deve fare 30 vittorie di seguito per pareggiare, mentre a chi è a 999 basta un solo tiro per vincere*”.

Maria Laura, dopo l’intervento di Matteo
“*è giusto lavorare sulla differenza, inutile pensare a quello che potrebbe accadere, perché intanto non accadrà*”.

→ Diversi cambiamenti di opinione

→ In particolare è emersa l’opportunità di avere strumenti di rappresentazione e valutazione dell’incerto.

Si tratta di una condizione assai importante per preparare il terreno al calcolo delle probabilità, argomento delicato e causa di diversi equivoci argomentativi, come la storia mostra.

Le modalità con cui il problema è stato affrontato ricalcano quello della “*logic of inquiry*”,
modello dinamico e dialettico di confronto fra due agenti, il primo intenzionato a convalidare e il secondo a confutare un’affermazione.

Nella discussione in classe i due agenti sono stati impersonati dagli studenti che sostenevano la bontà di una strategia risolutiva e dagli studenti che cercavano di confutarla.

→ Gli studenti non si confrontano con una teoria probabilistica già data.

→ non sapevano che cosa fosse un gioco equo

→ la risoluzione del problema (suddividere la posta in parti direttamente proporzionali alla probabilità di vincere) non era conseguibile, per gli studenti, con le leggi del calcolo delle probabilità, perché da loro non conosciute

Gli studenti si trovavano quindi realmente in quel processo non finito di ricerca di ipotesi che caratterizza la risoluzione di problemi in un ambiente aperto. L’efficacia delle strategie che hanno messo in opera, difficilmente poteva avere un riscontro sperimentale o teorico; l’unico strumento di controllo erano il confronto e il dialogo con altri risolutori. La bontà di una soluzione era una proprietà che andava continuamente condivisa, concordata, discussa, in base a criteri che via via cambiavano.

Obiettivo didattico: introduzione motivata e significativa al calcolo delle probabilità e ai suoi concetti fondamentali.

Successiva attività: proposta agli studenti delle soluzioni di Pacioli, Cataneo, Cardano, Pascal e Fermat.

La maggior parte degli studenti, inizialmente, ha affermato di preferire le soluzioni di Pacioli e Cataneo, perché si basano sui punteggi raggiunti e quindi sono *più realistiche* rispetto a quelle che considerano le partite che potrebbero ancora accadere e che, pertanto, sono *incerte*.

Altri fattori ritenuti da molti studenti veri e propri punti di forza di una soluzione:

→ la sua semplicità,

→ la facilità di applicazione e di generalizzazione con una formula risolutiva chiusa.

Le soluzioni di Pascal e Fermat, sicuramente più complesse di quelle di Pacioli, Cataneo e Cardano, sono state considerate inizialmente meno convincenti dalla maggior parte degli studenti e solo alla fine apprezzate.

Aspetti più formativi dell’attività:

1. l’occasione che gli studenti hanno avuto di confrontarsi, in tempi e spazi adeguati, con alcuni prodotti culturali preesistenti nella storia della matematica, cioè le soluzioni al problema delle parti proposte da importanti matematici e, più in generale, la stessa teoria della probabilità.

2. Lavorare in un ambiente di insegnamento – apprendimento che favorisce la nascita e lo sviluppo dell’argomentazione. Essere in grado di produrre argomentazioni coerenti, pertinenti ed efficaci è una competenza fondamentale per la formazione della persona.

Risoluzione, nel caso generale [– *h*, – *k*], del problema delle parti a due giocatori seguendo l'idea di Fermat,

Consideriamo il numero massimo di partite ancora giocabili prima che vinca uno dei due giocatori ($h + k - 1$) e determiniamo la probabilità che il giocatore a cui mancano h partite ne vinca almeno h su $h + k - 1$.
Si tratta quindi di introdurre la distribuzione binomiale con i concetti di:

- eventi incompatibili e calcolo della probabilità dell'unione di eventi incompatibili;
- eventi indipendenti e calcolo della probabilità dell'intersezione di eventi indipendenti.

Inoltre conviene introdurre i coefficienti binomiali, cioè il concetto di combinazioni senza ripetizioni elementi di un insieme.
A questo punto si dispone della distribuzione binomiale e, con essa, si ottiene la soluzione generale del problema delle parti. Infatti la probabilità che ha di vincere il giocatore A, a cui mancano h partite su $h + k - 1$, è data da:

$$\sum_{i=h}^{h+k-1} \binom{h+k-1}{i} p^i \, (1-p)^{h+k-1-i}$$

Da «una certa problematica di tipo probabilistico» …
… a …

- eventi incompatibili e calcolo della probabilità dell'unione di eventi incompatibili;
- eventi indipendenti e calcolo della probabilità dell'intersezione di eventi indipendenti
- distribuzione binomiale
- legge empirica del caso
- formazione del concetto di insieme degli eventi e di spazio di probabilità

… ingredienti per
le variabili casuali come nodo critico per l'insegnamento – apprendimento della probabilità …

C'è chi educa
guidando gli altri come cavalli
passo per passo;
forse c'è chi si sente soddisfatto
quando è così guidato.
C'è chi educa senza
nascondere l'assurdo ch'è nel mondo,
aperto a ogni sviluppo ma
tentando di essere franco
all'altro come a sé,
sognando gli altri come ora non sono:
ciascuno cresce solo se sognato.

Danilo Dolci

Posso credere una cosa senza capirla: è tutta questione di addestramento! Questa frase… mi torna sempre in mente, come una sensazione paurosa di sconforto, perché mi sembra esprima integralmente la fondamentale e chissà quanto eliminabile stortura che sta effettivamente, anche se non dichiaratamente, alla base di tutta l'imperversante concezione della didattica tradizionale: abituare a imparare e credere senza capire

Bruno de Finetti