Il laboratorio di matematica: esempi e riflessioni

Maria Reggiani - Pavia

*L'aula "laboratorio didattico"
del nostro dipartimento
durante lo stage estivo
per studenti di scuola superiore*

San Pellegrino Terme, 8 settembre 2015

Laboratorio – attività laboratoriale:
termini sempre più presenti nei documenti che riguardano la scuola a tutti i livelli

Quale significato diamo a questo termine?
in generale e per la matematica in particolare?

Nei documenti UMI il laboratorio di matematica è descritto come

"una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici." (Matematica 2003, pag. 28)

http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

Quali possibili realizzazioni concrete e non episodiche?

dalle Indicazioni nazionali per il curricolo della **scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione (2012)**

“In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il ***laboratorio****, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.*
Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco….”

Dal decreto 22 agosto 2007: Il **nuovo obbligo di istruzione**

L'accesso ai saperi fondamentali è reso possibile e facilitato da atteggiamenti positivi verso l'apprendimento. La motivazione, la curiosità, l'attitudine alla collaborazione sono gli aspetti comportamentali che integrano le conoscenze, valorizzando gli stili cognitivi individuali per la piena realizzazione della persona, facilitano la possibilità di conoscere le proprie attitudini e potenzialità anche in funzione orientativa. A riguardo possono offrire contributi molto importanti – con riferimento a tutti gli assi culturali – metodologie didattiche capaci di valorizzare l'attività di laboratorio e l'apprendimento centrato sull'esperienza

Dalle **Indicazioni nazionali per la scuola secondaria di secondo grado (2010)**

Risultati di apprendimento del Liceo scientifico

"Il percorso del liceo scientifico è indirizzato allo studio del nesso tra cultura scientifica e tradizione umanistica. Favorisce l'acquisizione delle conoscenze e dei metodi propri della matematica, della fisica e delle scienze naturali. Guida lo studente ad approfondire e a sviluppare le conoscenze e le abilità e a maturare le competenze necessarie per seguire lo sviluppo della ricerca scientifica e tecnologica e per individuare le interazioni tra le diverse forme del sapere, assicurando la padronanza dei linguaggi, delle tecniche e delle metodologie relative, anche attraverso la pratica laboratoriale"

In altri punti si raccomanda:

"l'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche"

Da dove nasce il binomio laboratorio/apprendimento

- l’apprendistato nelle botteghe artigiane

- la pedagogia di Jan Amos Komenski (Comenius) (Didactica magna ~1640): esperienza – insegnamento ciclico (approfondimento, formazione) - ruolo dell’insegnante.

- la pedagogia di Pestalozzi (inizio dell’800): l’importanza dell’intuizione a partire dall’esperienza.

- la Scuola Laboratorio di John Dewey (Chicago 1896): l’esperienza alla base di ogni sviluppo di pensiero.

- la scuola attiva in Europa fra la fine dell’800 e i primi anni del ‘900 (Decroly, Montessori,…)

Il laboratorio (non solo di matematica) nella nostra tradizione didattica

Giovanni Vailati (1863-1909)

si occupò attivamente di problemi relativi all'insegnamento e alla istituzione scolastica (fece parte di una commissione per la riforma della scuola media)

e propose il modello di una scuola laboratorio da intendersi non nel senso riduttivo di laboratorio per esperienze scientifiche, ma luogo "dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa" (Vailati 1906)

Il laboratorio negli anni ’60-’70 del 900

esperienze di innovazione didattica:

le idee della scuola attiva incontrano le idee strutturaliste (la cosiddetta matematica moderna).

- manipolare strumenti per “costruire” la matematica (Dienes, E. Castelnuovo, L. Lombardo Radice,….)

- apprendere gli aspetti più teorici con atteggiamento di ricerca: lavorare su problemi, costruire o scoprire la matematica come proposto ad esempio da G. Prodi in Matematica come scoperta.

Entrambe gli approcci in “Sistema dei laboratori” di F. De Bartolomeis (1979) – specificità del laboratorio di matematica

Una particolare modalità di laboratorio: la “visita” alle **mostre** di materiale didattico (anni ‘70)

Emma Castelnuovo
Matematica nella realtà
(1974 – alunni scuola media tasso di Roma)

Vittorio Checcucci
L’impatto del mondo della scuola con il mondo moderno: mostra di materiale didattico per l’insegnamento della matematica

Gruppo di ricerca didattica di Pavia
Le isometrie piane: mostra di materiale didattico

La mostra del gruppo di Pavia sulle isometrie piane:

- Cartelloni: osservare - leggere - rispondere
- Disegni da interpretare e da eseguire
- Problemi
- Giochi

materiali da usare

- **Momenti di puntualizzazione**

La mostra di Checcucci

Il tema: I numeri naturali quando servono per ragionare

I contenuti:
Il contar per due – Il contar per quattro

Come la si visita:
"Non serve a nulla guardare la mostra; si partecipa alla mostra manipolando ed elaborandone le proposte sotto lo stimolo di ciò che si vede o si legge… La guida evita la spiegazione: quando lo fa è per superare un blocco."

I materiali: cartelloni , abaci, interruttori, la banca del cane,…, giochi.

Fra i principi pedagogici ispiratori:

- Promuovere attraverso la percezione, l’interiorizzazione, la conquista dei concetti, lo sviluppo delle capacità logiche.
- I concetti devono essere acquisiti attraverso tutte le attività proposte. Uno degli obiettivi della mostra è la “conquista del linguaggio” che si raggiunge solo attraverso un processo di apprendimento globale che parte dalla attività e che è alla base della “crescita dello sviluppo cognitivo” (Bruner).
- Gli aspetti sociali dell’apprendimento: la comunicazione fra insegnante e alunni, fra alunni, il gioco, il lavoro di gruppo….
- I laboratori didattici: la scoperta della ricerca

Una prima sintesi:

Che cosa caratterizza una attività di “laboratorio”?

- Uno o più problemi da affrontare
- La presenza di oggetti / strumenti che si possono utilizzare - manipolare
- La modalità di lavoro (relazioni – interazione – linguaggio/i)
- La presenza di un esperto - coordinatore
- ……………………………

La mostra come laboratorio oggi:

Macchine matematiche di Modena

Giardino di Archimede (Firenze)

Le mostre di MateMatita

Ragiocando (Rozzano)

Mostra itinerante di Geometria MatNet (Bergamo)

La costruzione di mostre come attività per gli alunni (come faceva la Castelnuovo):

le mostre del liceo Aselli di Cremona

http://www.liceoaselli.it/

Il laboratorio oggi

Due elementi fondamentali:

- lo sviluppo e la diffusione della tecnologia
- lo sviluppo della ricerca didattica e dei quadri teorici relativi ai processi di insegnamento apprendimento che forniscono strumenti di analisi.

Laboratorio e tecnologia

Una attività in laboratorio è un “laboratorio”?

Una attività che usa una strumento (informatico o no) è un “laboratorio?

Perché possa esserlo sono importanti:

Ho un problema e scelgo il software
oppure
ho il software e scelgo il problema ?

La scelta del problema

La scelta del software o dello strumento

L’ “utilità” del software (che cosa *mi può dare* questo software? perché scelgo di usarlo? Lo “faccio usare” o lo metto a disposizione?….)

La possibilità di soluzioni diverse

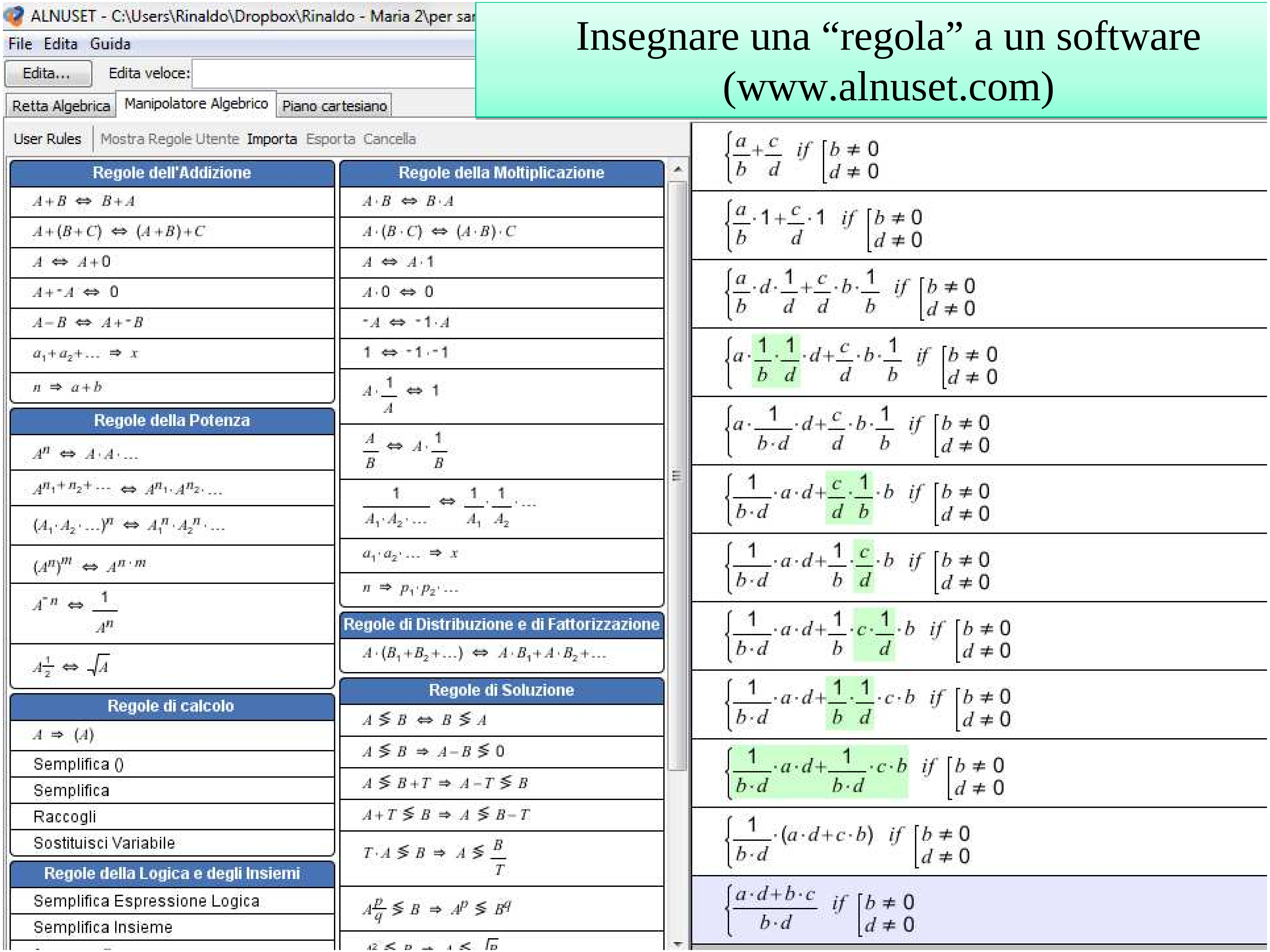
Esempi

Geogebra

Costruzioni stabili rispetto al trascinamento:
Ricerca di proprietà
Confronto di costruzioni
Definizioni
Formulazione o validazione di congetture con il software

Integrazione di aspetti algebrici e geometrici
Luoghi geometrici
Dare significato ai parametri
…………………

Insegnare una “regola” a un software (www.alnuset.com)



Un altro esempio

una attività sulle trasformazioni geometriche con differenti software

- Derive
  - Comando SUB (sostituisci)
  - Trasformazione di punti
  - Equazioni delle curve trasforma

Imitazione del procedimento con carta e penna

NO ?

- Derive
  - Matrici di trasformazione
  - Rappresentazione parametrica

SI ?

- Cabri Géomètre
  - Utilizzo di comandi predefiniti per le trasformazioni
  - Problemi di rappresentazione
  - Problemi di approssimazione

Analisi di due esempi di laboratorio

- Un gioco antico (la torre di Hanoi)
- Una attività di aritmetica – algebra tratta da **M@t.abel** (raccolta di proposte didattiche per la scuola primaria (poche) e per la secondaria di primo e secondo grado (circa 100))

  http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

Dove trovarne altri?

Tante proposte del Piano lauree scientifiche, dei progetti già citati e di altri…..

Ma anche i quesiti

delle prove Invalsi

degli esami di stato

………………………….

La torre di Hanoi (o di Brahama)

La leggenda: *Nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovano tre colonne di diamanti e 64 dischi d'oro puro infilati su di esse. I monaci li spostano uno alla volta da una colonna all'altra, seguendo l'immutabile legge di Brahma: nessun disco può essere posato su un altro più piccolo. All'inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in una colonna e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da una colonna all'altra è tuttora in corso. Quando l'ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in una colonna diversa, allora arriverà la fine del mondo e tutto si trasformerà in polvere.*

Il gioco (e forse la leggenda?) fu inventato dal matematico francese Edouard Lucas nel 1883

Checcucci lo propone con questo modello in legno e con poche righe di regole del gioco

Alla ricerca di un algoritmo

"Sembra che tutto dipenda dal piccoletto, purchè riesca, senza mai sbagliarsi, a saltare da un piolo all'altro, muovendosi una volta sì e una no e girando sempre nello stesso verso."

Cerchiamo di capire:
dopo che ne ho spostati due , per spostarne tre ……

Quante mosse ci vogliono?

n=1	1			
n=2	3	$= 2^2-1$	(in base 2	11)
n=3	7	$=2^3-1$	(in base 2	111)

Congetturiamo per n dischi: 2^n-1

Per verificare osserviamo che per n+1 dischi le mosse necessarie saranno:

$(2^n-1)+1+(2^n-1)=2*2^n-1=2^{(n+1)}-1$ (in base 2 111..1 n+1 volte)

Formula ricorsiva $a_1 = 1; \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$

Abbiamo proposto il gioco (con 5 dischi) in IV liceo scientifico nell'ambito del "progetto lauree scientifiche" chiedendo poi di generalizzare

Un gruppo:

"Il numero necessario per spostare 5 dischi è 31. Per determinare la formula abbiamo visto quante mosse sono necessarie per spostare anche 2 e 3 dischi e abbiamo osservato che con 2 dischi servono $3=2^2 - 1$ *mosse, con 3 dischi ne occorrono* $7=2^3 - 1$*, con 4 dischi il numero necessario è* $15=2^4 - 1$*, mentre con 5 servono* $31=2^5 - 1$ *mosse.*

La formula che abbiamo allora ricavato, osservando i legami tra i numeri trovati, è $2^n - 1$*, dove n è il numero di dischi da spostare."*

Un altro gruppo:

"Per risolvere il problema con 5 dischi, abbiamo impiegato la prima volta 42 mosse, la seconda 45 e la terza 31 mosse, che è quindi il numero minimo. Abbiamo poi osservato che, con 4 dischi, l'ultimo, cioè quello più grande, viene spostato all'ottava mossa; con 5 dischi il più grande viene mosso al sedicesimo passaggio e con 3 dischi l'ultimo viene spostato alla quarta mossa. In ognuno di questi casi, una volta spostato l'ultimo disco, per muovere poi tutti gli altri bisogna impiegare il numero di mosse necessario per il numero precedente di dischi. Abbiamo allora costruito una successione che costituisce la formula richiesta:

$$a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

Nuovo problema:
le due formule trovate dai gruppi, quella ricorsiva e quella generale, sono entrambe corrette?

Nella nostra esperienza le risposte seguono in sostanza la strada della verifica e dello sviluppo parallelo delle due formule senza riuscire da arrivare alla generalità:

"$a_1=1=2^0$;
$a_2=2^0 + 2$;
$a_3=2^0 + 2 + 2^2$;
$a_4=2^0 + 2 + 2^2 + 2^3$
$a_5=2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$, *cioè* $2^5 - 1=2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,
che risulta quindi verificata."

Attraverso la discussione guidata si può far scoprire che:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{n-1})(2-1)=$$
$$= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n - 1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \ldots\ldots - 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Uno sviluppo:

Abbiamo visto che per spostare i 64 dischi occorrono

2^{64}-1 mosse

Se per spostare ogni disco ci vuole un minuto, quanti anni sono necessari per spostare tutti i dischi?
(cioè … quando finirà il mondo?)

Proviamo a rispondere:

2^{64}-1 è circa $18*10^{18}$

I minuti di un anno sono 60*24*365 cioè circa $5.2*10^{5}$

Dunque il tempo necessario è circa $3.5*10^{13}$ anni

Età del mondo circa $4.5*10^{9}$

Il tempo che resta è dell'ordine di 10^{13} anni!

Qualche riflessione:

Situazione problematica aperta - ricca
Può essere sviluppata a vari livelli di complessità, con alunni di diverse età

Richiede/promuove:

- Congetture e loro validazione
- Messa in formula
- Confronto di strategie
- Confronto/trasformazione di formule

Dal punto di vista dei contenuti

- calcolo approssimato
- ordine di grandezza
- successioni
- numerazione in base diversa da 10

Oggi si trovano varie versioni interattive in rete:

quali differenze?

Esempio 2

(*da M@t.abel - attività "L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica")*

Marco si vanta di saper "indovinare" il quadrato di un numero che finisce con 5.
Giacomo lo mette alla prova e a raffica spara:

il quadrato di 45.

Marco risponde senza esitare: 2025.

il quadrato di 85.

E Marco: 7225.

Sempre più difficile: il quadrato di 115.

Marco ci pensa un po' di più, ma dopo poco risponde 13225

Giacomo pensa di mettere in difficoltà Marco chiedendo il quadrato di 1005,
ma Marco sembra essere addirittura più veloce di prima, rispondendo 1010025.

Prova a scoprire il "trucco" di Marco

Laboratorio per gli insegnanti:

Dopo aver risposto discutere l'attività:

- Obiettivi
- Competenze richieste
- Differenti strategie
- Difficoltà degli alunni
- Collegamenti - sviluppi

Possibili giustificazioni

1) $$45^2 = (4\cdot 10+5)^2 = 4^2\cdot 100 + 4\cdot 5\cdot 2\cdot 10 + 25 = (4^2+4)\cdot 100 + 25 = 4\cdot 5\cdot 100 + 25$$

Il risultato è un numero in cui le prime due cifre sono il prodotto di 4 per 5 (il successivo di 4); le ultime due cifre sono 25.

Proviamo a generalizzare:

$$(a\cdot 10+5)^2 = a^2\cdot 100 + a\cdot 5\cdot 2\cdot 10 + 25 = \left(a^2+a\right)\cdot 100 + 25 = a(a+1)\cdot 100 + 25$$

2)

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b), \text{ da cui } a^2 = (a + b)\,(a - b) + b^2.$$

Ad esempio, vogliamo trovare il quadrato del numero a = 45; come valore di b prendiamo sempre 5.

Allora $a + b = 45 + 5 = 50$ e $a - b = 45 - 5 = 40$;

risulta $45^2 = (a + b)\,(a - b) + b^2 = 50 \cdot 40 + 25$

e quindi

$$45^2 = 50 \cdot 40 + 25 = 2000 + 25 = 2025.$$

Le prime due cifre sono il prodotto di 4 per 5 (il successivo di 4); le ultime due cifre sono 25.

Quali sviluppi /generalizzazioni?

43*47=2021

42*48=2016

54*56=3024

Come si generalizza?

Quali altri “trucchi”?

21*19=(20+1)(20-1)=399

48*52=(50-2)*(50+2)=2500-4=2496

Più in generale:

i prodotti notevoli e il calcolo mentale.

L’importante è che siano i ragazzi a trovare i trucchi!

Qualche osservazione metodologica

- Problema, “interessante” – coinvolgente, fantastico, reale, interno alla matematica…..

- Modalità di soluzione non precostituita

- Contenuto matematico *adeguato*

- Lavoro – interazione – *discussione fra pari*

- Riflessione su quanto fatto e sui “perché”

Alcuni degli aspetti trattati sono sviluppati in

Reggiani M., 2008

Il laboratorio come "ambiente" per l'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol.31 A-B, 645-664

e relativa bibliografia