

Cognome e Nome _____ Matr. _____ Corso di studi _____

Parte A

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1.

A) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n! + (n-1)!) \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{(n+1)! \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

B) Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ semplificando adeguatamente l'espressione ottenuta.

2. Sia data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x + 1}$.

Fornire uno studio completo della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, eventuali asintoti, monotonia, punti di massimo e di minimo sia locali che globali, punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare quindi un grafico approssimativo della funzione in base alle informazioni ottenute.

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(\log(n^\alpha + 1) - \log(n^\alpha))}{n^\alpha + 1}$$

è convergente.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$A = \int x^2 \log(x) dx, \quad B = \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1} dx.$$