ESERCIZIO 1a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(2-x^2)}{x-1}$$

CAMBIO VARIABILE:

$$x-1=t \Rightarrow x=t+1$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(2-(t+1)^2)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(2-t^2-1-2t)}{t} =$$

$t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1-t^2-2t)}{t} =$$

$\to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{-t^2-2t}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} -t-2 = -2$$

ESERCIZIO 1b

$$f(x) = \frac{e^{2x+3}}{x^2-x}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x+3}(x^2-x) - e^{2x+3}(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x+3}(2x^2-4x+1)}{(x^2-x)^2}$$

ESERCIZIO 2

$$f(x) = x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

DOMINIO: $e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

IL DOMINIO È $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

SEGNO: $f(x) > 0$

$$\frac{x^2}{e^x} > 0 \quad \forall x$$

LA FUNZIONE È SEMPRE POSITIVA.

LA FUNZIONE SI ANNULLA PER $x = 0$.

SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{x^2}{e^{-x}}$

LA FUNZIONE NON È NÉ PARI NÉ DISPARI

LIMITI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$ PER LA GERARCHIA DEGLI INFINITI

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

ASINTOTI

LA FUNZIONE HA UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to +\infty$ DI EQUAZIONE $y=0$.

LA FUNZIONE POTREBBE AVERE UN ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = +\infty$$

NON C'È ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to -\infty$. LA FUNZIONE HA UN ANDAMENTO SOPRALINEARE

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

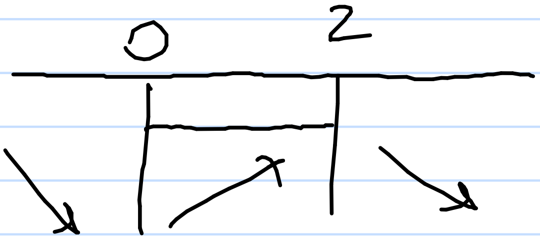
MONOTONIA: $f'(x) \geq 0$:

$$\frac{2x - x^2}{e^x} \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow$$

$$x(x-2) \leq 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq x \leq 2$$



LA FUNZIONE È DECRESCENTE IN $(-\infty,0)$ E IN $(2,+\infty)$.

LA FUNZIONE È CRESCENTE IN $(0,2)$.

INOLTRE I PUNTI $x=0$ E $x=2$ SONO RISPETTIVAMENTE PUNTI DI MINIMO LOCALE E DI MASSIMO LOCALE.

DAL MOMENTO CHE $f(0)=0$ E

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, IL PUNTO $x=0$

È ANCHE PUNTO DI MINIMO GLOBALE.

DAL MOMENTO CHE $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, IL PUNTO $x=2$ NON È PUNTO DI MASSIMO GLOBALE.

<u>DERIVATA SECONDA</u>

$$f''(x)=\frac{(2-2x)e^x-(2x-x^2)e^x}{(e^x)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+2}{e^x}$$

CONVESSITÀ $\cup$: $f''(x)>0$

$$\frac{x^2-4x+2}{e^x}>0 \Rightarrow x^2-4x+2>0$$

$$\Delta = 16-8=8$$

$$x=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2} \quad x_1 = 2-\sqrt{2}, \quad x_2 = 2+\sqrt{2}$$

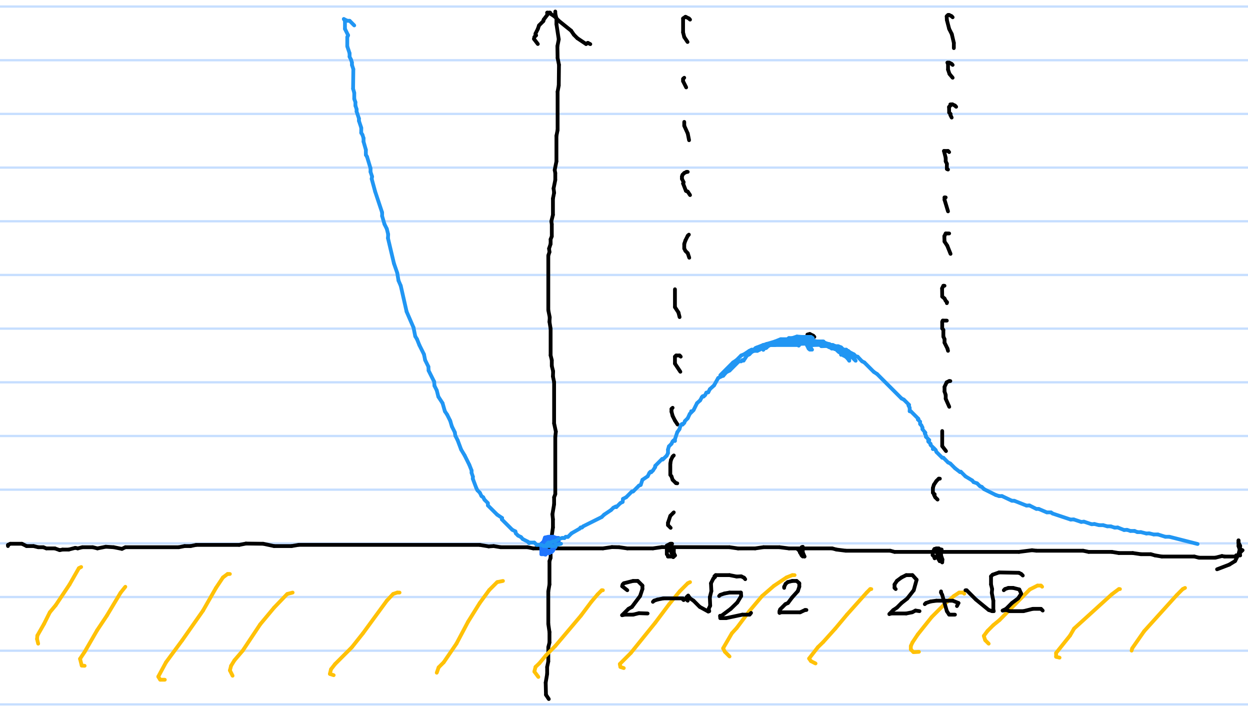
$$x<2-\sqrt{2} \vee x>2+\sqrt{2}$$

	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
$\cup$		$\cap$		$\cup$

LA FUNZIONE È CONVESSA SU $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ E SU $(2+\sqrt{2}, +\infty)$.

LA FUNZIONE È CONCAVA SU $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

I PUNTI $x=2-\sqrt{2}$ E $x=2+\sqrt{2}$ SONO PUNTI DI FLESSO.



ESERCIZIO 3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2}$$

LA SERIE È A TERMINI A SEGNO NON COSTANTE.

USO IL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:

$$|a_n| = \left| \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2}$$

$\downarrow$

TEO CONFRONTO

ABBIAMO CHE PER $n \to +\infty$

$$\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

E PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO SI HA CHE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{E} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

HANNO LO STESSO CARATTERE.

DATO CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ È UNA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CONVERGENTE, ANCHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ CONVERGE.

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, DATO CHE

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2},$$

ANCHE $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin(n^2)}{1+n^2} \right|$ CONVERGE.

QUINDI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{1+n^2}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE E, DI CONSEGUENZA, ANCHE SEMPLICEMENTE.

ESERCIZIO 4

- $$A = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + C$$

• $B = \int_0^1 x e^x \, dx$

CONSIDERO $\int x e^x \, dx$ E INTEGRO PER PARTI:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx =$$
$$= x e^x - e^x + C$$

QUINDI

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \left[x e^x - e^x \right]_0^1 =$$
$$= e - e - 0 + 1 = 1.$$