Università degli Studi di Bergamo — Scuola di Ingegneria
Analisi Matematica I — Tema del 04/09/2020

Cognome e Nome ______________________ Matr. __________ Corso di studi __________

Qualunque affermazione non adeguatamente giustificata non sarà presa in considerazione.

1. (7 pt.) Sia data la funzione
$$f(x) = \log^2(2x).$$

   (a) Calcolare tramite la definizione $f'(1)$ senza utilizzare il teorema di de l'Hôpital;

   Abbiamo $f(1) = \log^2(2)$, per cui

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log^2(2+2h)-\log^2 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(\log(2+2h)-\log 2\big)\big(\log(2+2h)+\log 2\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)\log(4+4h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h}\log(4+4h) \\ &= 1\cdot\log 4 = \log 4 = 2\log 2. \end{aligned}$$

   (b) ritrovare il risultato ottenuto al punto precedente tramite le usuali regole di calcolo.

   Abbiamo
$$f'(x) = 2\frac{2}{2x}\log(2x) = 2\frac{\log(2x)}{x}$$
   per cui $f'(1) = 2\log 2$.

2. (7 pt.) Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Si richiedono, nello specifico, il dominio di esistenza,

La funzione arctan è definita su $\mathbb{R}$ per cui la funzione è definita su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Eventuali simmetrie,

Abbiamo
$$\begin{aligned} f(1) &= \arctan 2 \\ f(-1) &= 0 \neq \pm\arctan 2 \end{aligned}$$

per cui la funzione non è né pari né dispari.

Segno,

Sappiamo che $\arctan t$ ha il segno di t, quindi $f(x)$ ha il segno di $\frac{x+1}{x}$. La funzione è quindi positiva su $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, negativa su $(-1,0)$ e si annulla in -1.

Limiti al bordo del dominio,

Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Siccome $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1 > 0$,

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x+1}{x} = \pm\infty$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Eventuali asintoti,

La soluzione ha un asintoto orizzontale in $+\infty$ e $-\infty$ (lo stesso), di equazione $y = \frac{\pi}{4}$.

Crescere e decrescere,

Abbiamo $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ per cui la sua derivata è $-\frac{1}{x^2}$. Abbiamo quindi

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2+(x+1)^2} < 0.$$

La funzione è quindi decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$.

Estremanti locali,

Dallo studio della derivata prima risulta che non ci sono punti di estremo locale.

Convessità e concavità,

Abbiamo

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2+2x+1}$$

per cui

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}.$$

La funzione è quindi concava su $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e convessa su $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e su $(0, +\infty)$.

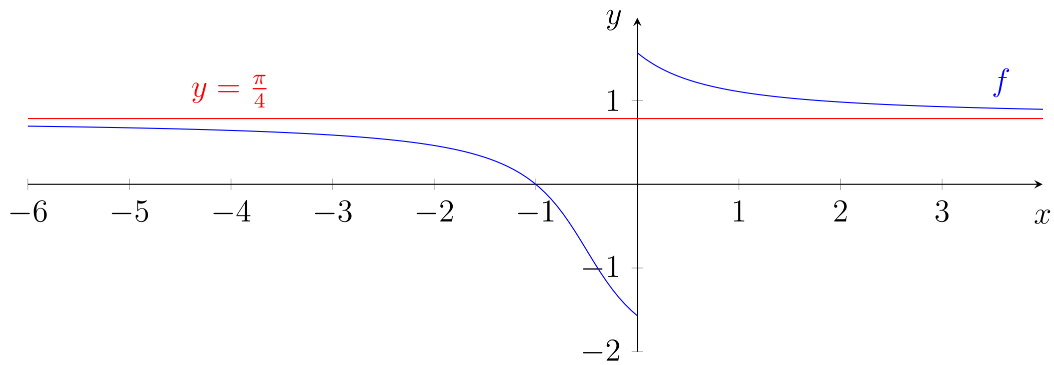
Punti di flesso.

Dallo studio della derivata seconda, segue che la derivata seconda cambia segno solo in $x = -\frac{1}{2}$ che è quindi l'unico punto di flesso.

Classificare in particolare gli eventuali punti di discontinuità.

In $x = 0$ c'è una discontinuità a salto.

Disegnare poi un grafico della funzione compatibile con tutte le informazioni trovate.



3. (7 pt.) Sia dato il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,\mathrm{d}x.$$

(a) verificare tramite un criterio che tale integrale converge;

La funzione $\frac{1}{x\sqrt{\log x}}$ è definita per $x > 0$ e $\log x > 0$ cioè per $x > 1$. In 1 la funzione tende all'infinito.

Per $x \to 1$, abbiamo $x \sim 1$ e $\log x \sim (x-1)$ per cui

$$\frac{1}{x\sqrt{\log x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad \text{per } x \to 1^+.$$

L'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

converge per cui l'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,\mathrm{d}x$$

converge per il criterio del confronto asintotico.

(b) calcolarlo poi tramite la definizione.

Sia $\varepsilon > 0$. Abbiamo

$$\int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\log x}\right]_{1+\varepsilon}^e = 2\sqrt{\log(e)} - 2\sqrt{\log(1+\varepsilon)} = 2 - 2\sqrt{\log(1+\varepsilon)}$$

per cui

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{\log(1+\varepsilon)} = 2.$$

4. (6 pt.) Si considerino le successioni

$$a_n = n\log n, \quad b_n = \sqrt{n}\log n, \quad c_n = e^{\frac{1}{n}}\log n, \quad d_n = n\log\left(1+e^{\frac{1}{n}}\right).$$

(a) Per ognuna di esse determinare (se possibile) la più semplice successione asintotica;

Non ci sono successioni più semplici di a_n e b_n asintotiche alle stesse.
Siccome $\lim e^{\frac{1}{n}} = 1$, $c_n \sim \log n$ e $d_n \sim n\log 2$.

(b) disporre poi le successioni a_n, b_n, c_n e d_n in ordine crescente di infinito giustificando opportunamente la propria disposizione.

Abbiamo

$$c_n \ll b_n \ll d_n \ll a_n.$$

Infatti, le successioni sono tutte degli infiniti per cui usando gli asintotici abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim \frac{b_n}{c_n} &= \lim \frac{\sqrt{n}\log n}{\log n} = \lim \sqrt{n} = +\infty,\\
\lim \frac{d_n}{b_n} &= \lim \frac{n\log 2}{\sqrt{n}\log n} = (\log 2)\lim \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty,\\
\lim \frac{a_n}{d_n} &= \lim \frac{n\log n}{n\log 2} = \lim \frac{\log n}{\log 2} = +\infty.
\end{aligned}$$

5. (6 pt.) Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2-n}}.$$

La serie è a termini positivi. Per $n \geqslant 1$, abbiamo $\frac{1}{n} \leqslant 1$ per cui $e^{\frac{1}{n}} \leqslant e$. Inoltre per $n \geqslant 2$, abbiamo $n^2 - n \geqslant n$ perché $n^2 - 2n \geqslant 0$ per $n \geqslant 2$. Quindi per $n \geqslant 2$,

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2-n}} \leqslant \frac{e}{e^n}.$$

La serie di termine generale $\frac{1}{e^n}$ converge perché è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{e} < 1$ quindi, per il criterio del confronto, la serie di termine generale $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2-n}}$ converge.

Si poteva anche usare il criterio della radice, infatti

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{n^2-n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n^2}}}{e^{n-1}}$$

di cui il limite, per $n \to \infty$, è 0.