Università degli Studi di Bergamo — Scuola di Ingegneria
Analisi Matematica I — Tema del 17/01/2020 - Versione 5

Cognome e Nome ______________________ Matr. __________ Corso di studi __________

Intendo sostenere la prova di teoria nell'appello di GENNAIO ☐

1. (9 pt.) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x}(3 - \sin x)$$

a) Studiare la funzione f (insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, derivata prima, crescere e decrescere, punti di massimo e di minimo, eventuali punti di non derivabilità, **non è richiesto lo studio della derivata seconda**) e disegnarne un grafico approssimativo in base alle informazioni ottenute.

La funzione non ha problemi di definizione quindi il dominio $D_f = \mathbb{R}$.

Siccome l'esponenziale è positiva e $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $f(x)$ è positiva su $\mathbb{R}$.

La funzione è continua e derivabile due volte su $\mathbb{R}$.

Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

perché $4 \geqslant 3 - \sin x \geqslant 2 > 0$. Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. Inoltre la funzione ha andamento sopralineare a $-\infty$ poiché

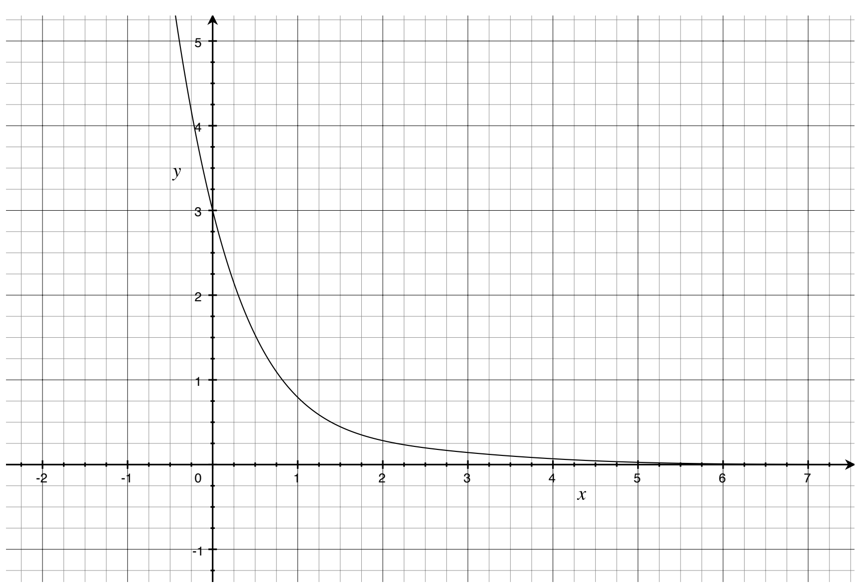
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi non esiste asintoto obliquo a $-\infty$.

La derivata di f è

$$f'(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x - 3) = -e^{-x}(\cos x - \sin x + 3).$$

Siccome $\cos x \geqslant -1$ e $\sin x \leqslant 1$, abbiamo $\cos x - \sin x + 3 \geqslant 1 > 0$ e quindi $f'(x) < 0$. La funzione è quindi sempre decrescente.



b) Calcolare tramite la definizione l'integrale generalizzato

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ per cui l'integrale è generalizzato solo in $+\infty$.

Sia $M \geqslant \pi$,

$$\int_{\pi}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{M} e^{-x}(3-\sin x)\,\mathrm{d}x = 3\int_{\pi}^{M} e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Il primo integrale è immediato

$$\int_{\pi}^{M} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_{\pi}^{M} = e^{-\pi} - e^{-M}.$$

Per il secondo, integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\cos x\right]_{\pi}^{M} - \int_{\pi}^{M} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = -e^{-\pi} - e^{-M}\cos M - \int_{\pi}^{M} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[e^{-x}\sin x\right]_{\pi}^{M} - \int_{\pi}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x - e^{-\pi} - e^{-M}\cos M \\ &= -\int_{\pi}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x - e^{-\pi} - (\cos M + \sin M)e^{-M}\end{aligned}$$

quindi

$$\int_{\pi}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-\pi} - \frac{\cos M + \sin M}{2}e^{-M}.$$

In definitiva

$$\int_{\pi}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}e^{-\pi} + \frac{\sin M + \cos M - 6}{2}e^{-M}.$$

Facendo tendere M all'infinito, perché la frazione è limitata, viene

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. &= \lim_{M\to+\infty}\int_{\pi}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to+\infty}\frac{7}{2}e^{-\pi} + \frac{\sin M + \cos M - 6}{2}e^{-M} \\ &= \frac{7}{2}e^{-\pi}.\end{aligned}$$

2. (6 pt.) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n} - 1\right).$$

Il termine generale della serie è

$$\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}-1=\frac{2\cdot 2^n}{3^n-2^n}=2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

per cui è positivo e

$$\sim 2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Siccome $\frac{2}{3}<1$ la serie di termine generale $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge per cui, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge.

3. (6 pt.) **Giustificando le proprie affermazioni,** determinare la più semplice successione asintotica alla seguente

$$a_n=(n+2)^3\left(\log(n^2+1)-2\log(n)\right)\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^n.$$

Abbiamo

$$(n+2)^3\sim n^3$$
$$\log(n^2+1)-2\log n=\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}$$
$$\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^{(2n+1)^2}\right]^{\frac{n}{(2n+1)^2}}$$

e

$$\frac{n}{(2n+1)^2}\to 0$$

per cui

$$\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^n\to e^0=1$$

che produce

$$a_n\sim n.$$

4. (6 pt.)

a) Determinare per quali valori dei parametri $a\in\mathbb{R}$ e $b>0$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax-b+1 & \text{per } x\le 0\\ \log(1+bx) & \text{per } x>0\end{cases}$$

è continua nel punto $x_0=0$.

La funzione $x^2+ax-b+1$ è un polinomio quindi continua in 0 perciò

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2+ax-b+1=-b+1=f(0).$$

La funzione $\log(1+bx)$ è continua in 0 perciò

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1+bx) = \log 1 = 0.$$

Quindi la funzione è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $-b+1=0$, cioè $b=1$, indipendentemente dal valore di a.

b) Determinare poi i valori dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Per essere derivabile in x_0 vi dovrà essere continua, per cui supponiamo fin da subito $b=1$. Abbiamo

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} h+a & \text{per } h<0 \\ \dfrac{\log(1+h)}{h} & \text{per } h>0. \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} h+a = a \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+h)}{h} = 1, \end{aligned}$$

per i limiti notevoli (o asintotici notevoli). Quindi f è derivabile in x_0 se e solo se $a=1$ (e $b=1$) e in tal caso $f(0)=0$ e $f'(0)=1$.

5. (6 pt.) Data la funzione

$$f(x) = (\alpha - 2x)e^{\beta x}$$

determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché scrivendo lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ con resto secondo Peano della funzione $f(x)$ si abbia

$$f(x) = -2 - 6x - 8x^2 + o\left(x^2\right),\ x \to 0.$$

Se così è lo sviluppo di Taylor di f, allora $f(0) = -2$ per cui dobbiamo avere $f(0) = (\alpha - 0)e^{-0\beta} = \alpha = -2$. Abbiamo quindi $f(x) = (-2-2x)e^{\beta x}$. Vale allora

$$f'(x) = (-2 + \beta(-2-2x))e^{\beta x} = (-2 - 2\beta - 2\beta x)e^{\beta x}.$$

Per avere lo sviluppo di Taylor richiesto, si deve avere $f'(0) = -6$ e quindi $-2-2\beta = -6$, cioè $\beta = 2$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x+1)e^{2x} \\ f'(x) &= -2(1+2x+2)e^{2x} = -2(2x+3)e^{2x} \\ f''(x) &= -2(2+4x+6)e^{2x} = -8(x+2)e^{2x}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $f(0) = -2$, $f'(0) = -6$ e $f''(0) = -16$ per cui lo sviluppo di Taylor è quello richiesto.