Università degli Studi di Bergamo — Scuola di Ingegneria
Analisi Matematica I — Tema del 17/01/2020 - Versione 1

Cognome e Nome ______________________ Matr. __________ Corso di studi __________

Intendo sostenere la prova di teoria nell'appello di GENNAIO ☐

1. (9 pt.) Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{-x}\left(x^2-1\right)$$
   a) Studiare la funzione f (insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, derivata prima, crescere e decrescere, punti di massimo e di minimo, eventuali punti di non derivabilità, **non è richiesto lo studio della derivata seconda**) e disegnarne un grafico approssimativo in base alle informazioni ottenute.
   b) Calcolare tramite la definizione l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (6 pt.) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}-1\right).$$

3. (6 pt.) **Giustificando le proprie affermazioni,** determinare la più semplice successione asintotica alla seguente
$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}{(n+5)^2}.$$

4. (6 pt.)
   a) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2+(2a+1)x+b & \text{per } x \geq 0 \\ \sin(ax) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$
   è continua nel punto $x_0 = 0$.
   b) Determinare poi i valori dei parametri a e b per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

5. (6 pt.) Data la funzione
$$f(x) = (x+\alpha)e^{-\beta x}$$
determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché scrivendo lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ con resto secondo Peano della funzione $f(x)$ si abbia
$$f(x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right),\ x \to 0.$$