

Cognome e Nome _____ Matr. _____ Corso di studi _____

1. (5 pt.) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{2 + 2e^x}.$$

Determinare in particolare: insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti, derivata prima e derivata seconda, crescere e decrescere, concavità e convessità, punti di massimo e di minimo, punti di flesso. Disegnarne un grafico approssimativo.

2. (5 pt.) Stabilire il carattere delle seguenti serie

(a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + n - 2}$$

3. (5 pt.) Stabilire con un opportuno criterio la convergenza del seguente integrale generalizzato e, in caso positivo, calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

4. (5 pt.) Enunciare il teorema degli zeri, il teorema di Weierstrass e il teorema dei valori intermedi. Dimostrare il teorema dei valori intermedi.
5. (5 pt.) Enunciare i teoremi di Rolle e di Lagrange. Dimostrare uno dei due, deducendo l'altro come corollario.