

Cognome e Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ Corso di studi \_\_\_\_\_

1. (6 pt.) Sia data la funzione  $f(x) = e^{\sqrt[3]{(x-1)(x-\frac{1}{2})}} - 1$ .
- (a) Determinare il campo di esistenza di  $f$ , il segno e gli eventuali zeri. Determinare poi (se esistono) eventuali asintoti.
  - (b) Determinare il comportamento asintotico di  $f$  negli zeri.
  - (c) Studiare la derivata prima di  $f$  precisando i punti di non derivabilità.
  - (d) Disegnare un grafico della funzione  $f$  compatibile con le informazioni ottenute ai punti precedenti.
2. (a) (2 pt.) Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} + \sin \left( \frac{1}{e^n} \right) \right)$$

- (b) (2 pt.) Discutere la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+4n+9}$$

3. (a) (2 pt.) Stabilire tramite l'applicazione di un opportuno criterio se converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+1) \log(1 + \frac{1}{x^2})}{x^5 + x^2 + 3} dx$$

- (b) (2 pt.) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx$$

4. (5 pt.) Enunciare e dimostrare che il limite del prodotto di due successioni convergenti è il prodotto dei limiti. È necessario che entrambe le successioni convergano affinché il prodotto converga? Argomentare opportunamente le proprie affermazioni.
5. (5 pt.) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat. Illustrarne l'essenzialità delle ipotesi tramite opportuni controesempi.