

# **Modelli dinamici, prevedibilità e complessità in ecologia e scienze sociali**

**Gian Italo Bischi**

*DESP - Dipartimento di Economia, Società e Politica  
Università di Urbino “Carlo Bo”*

*gian.bischi@uniurb.it*

*<http://www.mdef.it/gian-italo-bischi/>*



**Summer School: la matematica incontra il mondo  
San Pellegrino Terme, 5 - 6 - 7 Settembre 2016**



# The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences

(Eugene P. Wigner, Nobel per la Fisica nel 1963)

**Fenomeni governati da leggi matematiche = fenomeni prevedibili**

Capacità di *descrivere e prevedere* i fenomeni naturali: una mela, un pianeta, una particella elementare, un fluido, un gas

- Caduta di un grave  $x(t) = x_0 + v_{0x}t$  ;  
 $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2} g t^2$
- Moto di un pendolo, moto dei corpi celesti (pianeti, satelliti)
- Persino le particelle elementari governate dalla fisica quantistica
- *Moto di un fluido ...*

*Vediamo allora che ogni cosa procede in modo matematico - cioè infallibilmente - nel mondo intero, in modo che se qualcuno avesse una sufficiente capacità di conoscere a fondo le cose, e avesse abbastanza intelligenza e memoria per considerare tutte le circostanze e tenerne conto, questi potrebbe essere un profeta e potrebbe vedere il futuro nel presente come in uno specchio*



Gottfried Wilhelm Leibniz  
1646 -1716

Una sfida: Può la matematica aiutare anche a descrivere e prevedere anche sistemi biologici, sociali, economici?  
Può arrivare a *descrivere, prescrivere, prevedere* i comportamenti umani?

**Hari Seldon, Parker Pyne ...**

## Vito Volterra (1860-1940)

**Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati *per lungo andare di secoli* dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che siano mai vissute. Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una *sintesi* che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse**

[...]

**Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le *scienze biologiche e sociali*, che è più intensa la *curiosità*, giacché è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi.**

*dal discorso inaugurale per l'anno accademico 1901-1902 dell'Università di Roma*

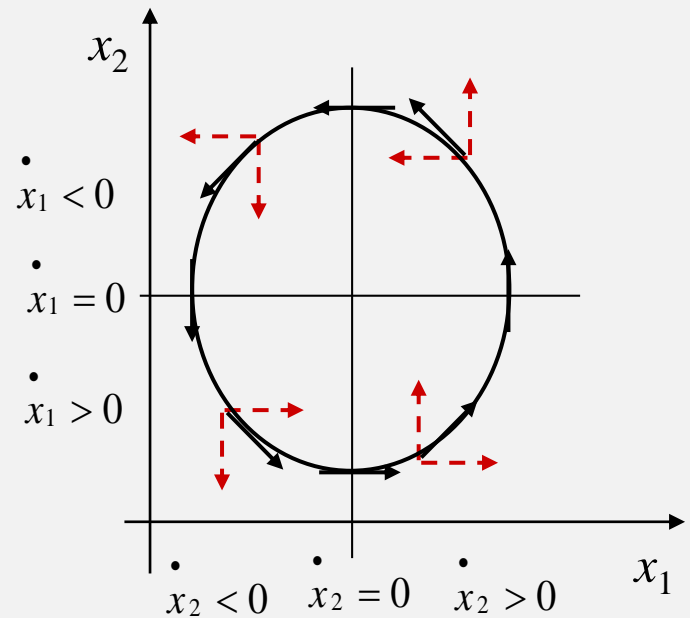


# Modello Preda-predatore (Vito Volterra, 1926)

Densità prede  $x_1$   $\frac{dx_1}{dt} = r x_1 - b x_1 x_2$

Densità predatori  $x_2$   $\frac{dx_2}{dt} = -m x_2 + c x_1 x_2$

- $\dot{x}_1 = x_1 (r - b x_2) \geq 0$
- $\dot{x}_2 = x_2 (-m + c x_1) \geq 0$



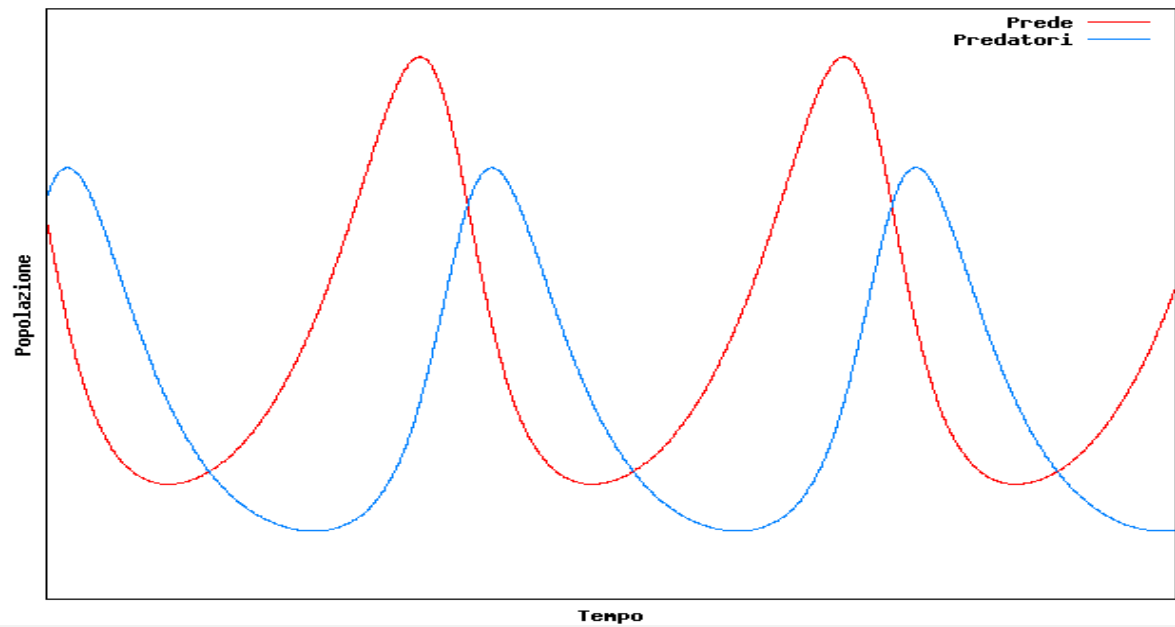
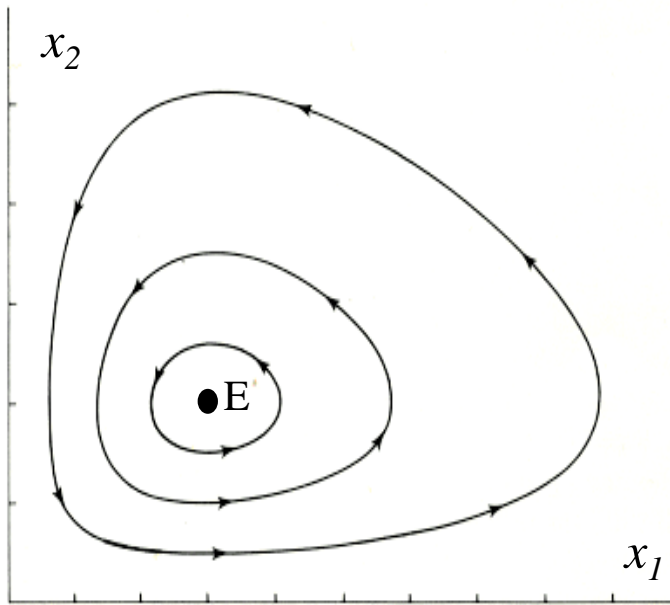
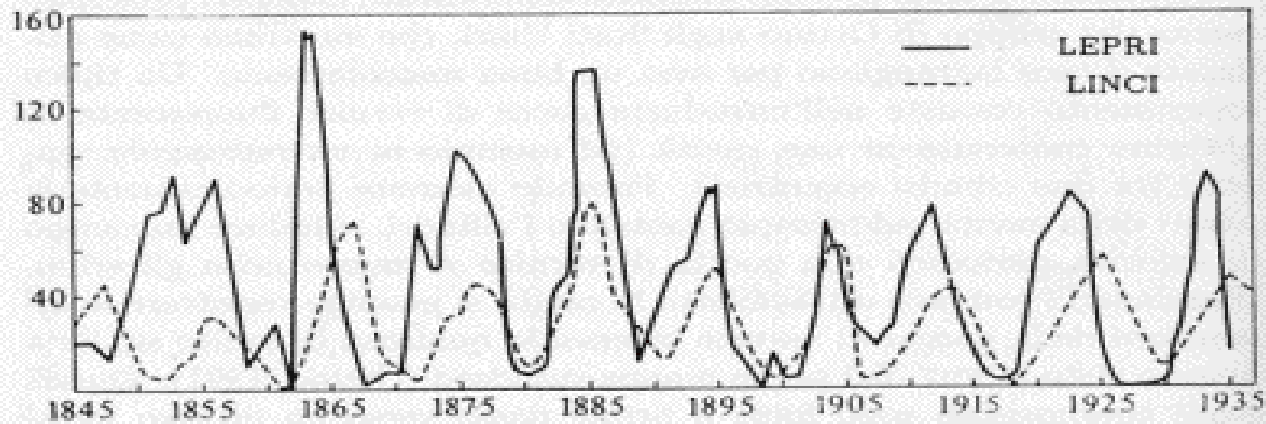


FIGURA 6.6  
Andamento temporale del numero di linci e lepri (in migliaia) nelle foreste del Canada nel periodo 1845-1935



*Fluttuazioni del numero di lepri e linci canadesi ricostruite in base al numero delle pelli acquistate dalla Compagnia della Baia di Hudson nei diversi anni, da Mac Lulich (1937)*

# Equazione di crescita di una singola specie senza limitazioni

$x(t)$  = numero di individui all'istante  $t$

$n$  = tasso relativo di natalità

$m$  = tasso relativo di mortalità

Legge di evoluzione:  $\frac{dx}{dt} = nx - mx = (n - m)x = rx$

•  
 $r = \frac{x}{x}$  tasso di crescita netto  
per unità di popolazione

$\frac{dx}{dt} = rx$  Equazione  
differenziale primo  
ordine lineare

con  $x(t_0) = x_0$  cond. iniziale

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t r dt \implies [\ln(x)]_{x_0}^{x(t)} = r[t]_{t_0}^t$$

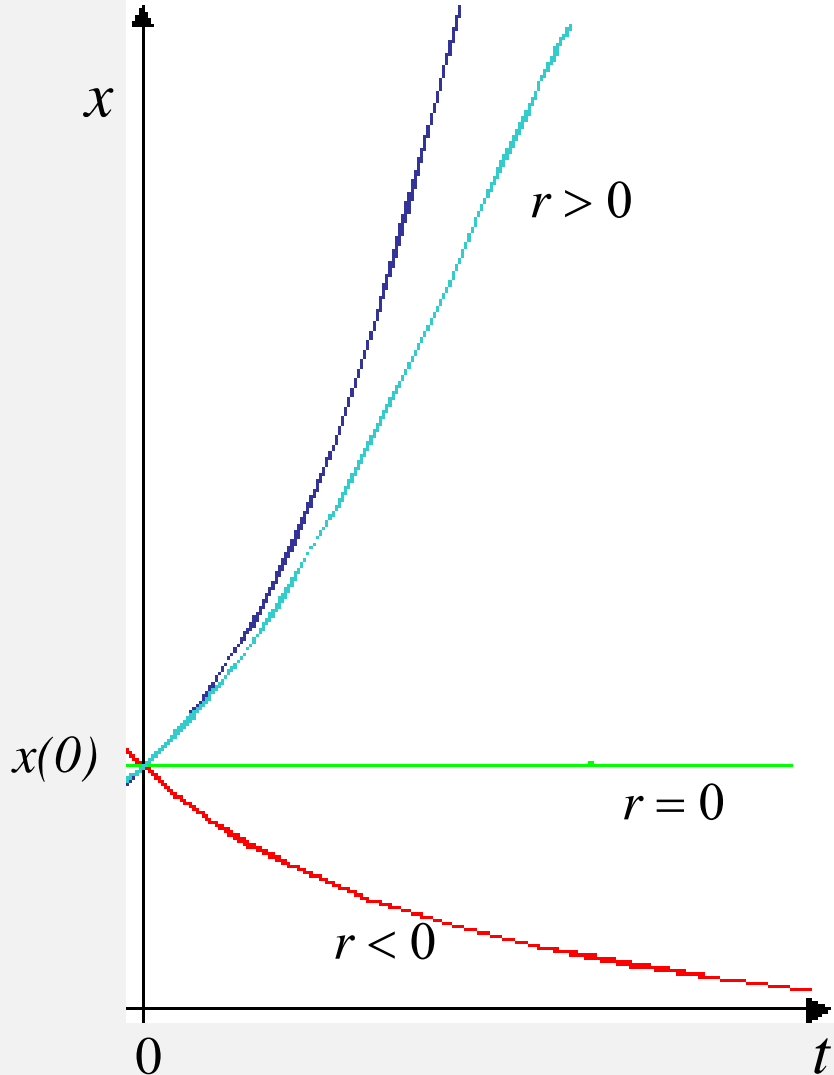
$$\ln x(t) - \ln x_0 = r(t - t_0)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x_0} = r(t - t_0) \implies \frac{x(t)}{x_0} = e^{r(t-t_0)}$$

**Modello**  $\frac{dx}{dt} = (n - m)x = rx$

$x(t_0) = x_0$  *cond. Iniziale*

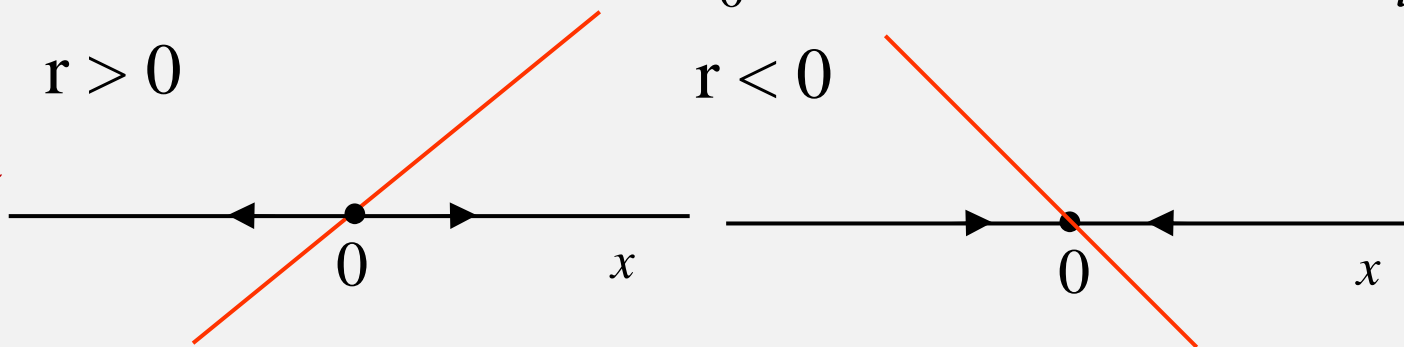
**Soluzione**  $x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$



$\frac{dx}{dt} = rx$

$r > 0$

$r < 0$



**Analisi qualitativa  
(o topologica)**



*Malthus (1798) An essay on the principle of population*

In assenza di limitazioni di cibo o spazio disponibile una popolazione naturale cresce in progressione geometrica.

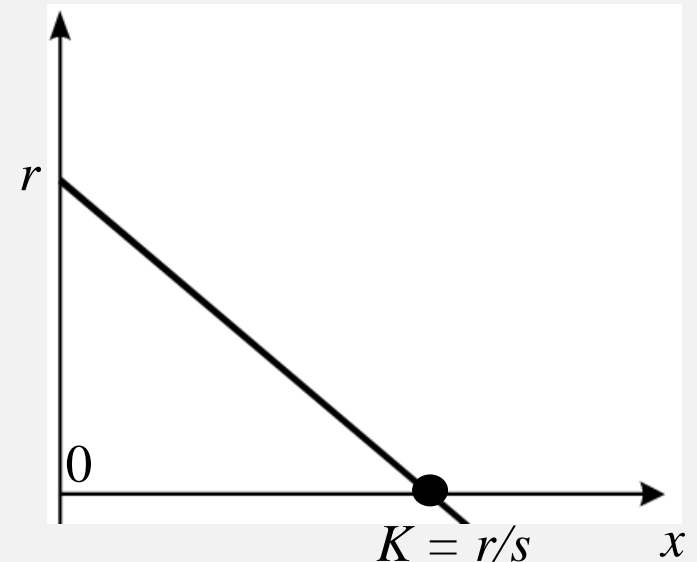
## **Popolazione che vive in un ambiente limitato**

Altra ipotesi Malthusiana: Al crescere della densità di popolazione cresce la mortalità per mancanza di cibo, spazio...)

Il tasso di mortalità  $m$  non sia costante, ma aumenti al crescere della numerosità della popolazione, ad esempio una extra mortalità proporzionale a  $sx$ .

Allora:  $\dot{x} = (r - sx)x$

con  $\frac{\dot{x}}{x} = r - sx$



*Tasso relativo di crescita linearmente decrescente*

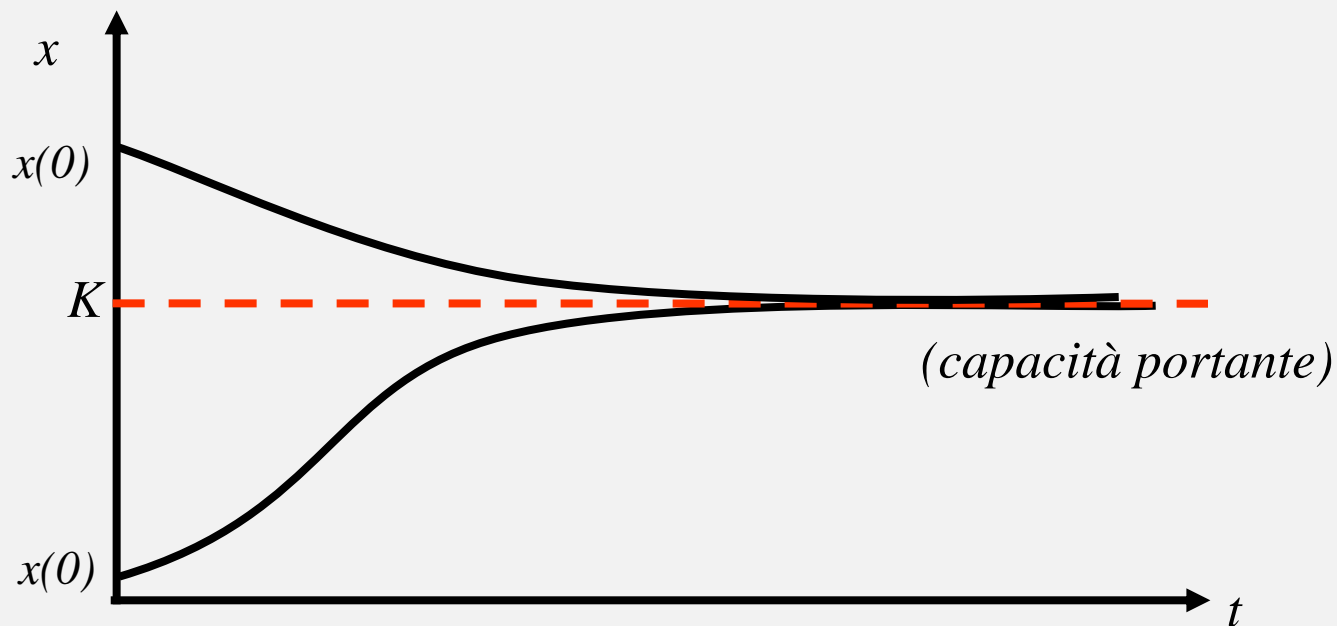
$$\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$$

Se proprio si vuole integrare...

Soluzione:

$$\int \frac{dx}{(r - sx)x} = \int dt \quad \dots$$

$$x(t) = \frac{rx_0 e^{rt}}{r + sx_0(e^{rt} - 1)}$$



# Analisi qualitativa della crescita logistica di una popolazione

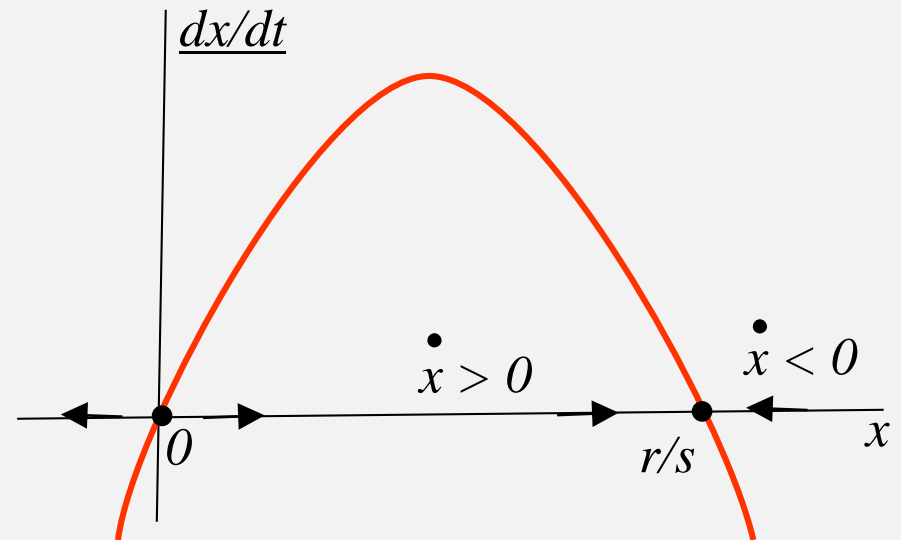
$$\frac{dx}{dt} = (r - sx)x$$

Secondo membro dell'equazione di evoluzione : (una parabola)

$$(r - sx)x \geq 0 \text{ per } 0 \leq x \leq r/s$$

$x = 0$  equilibrio di estinzione

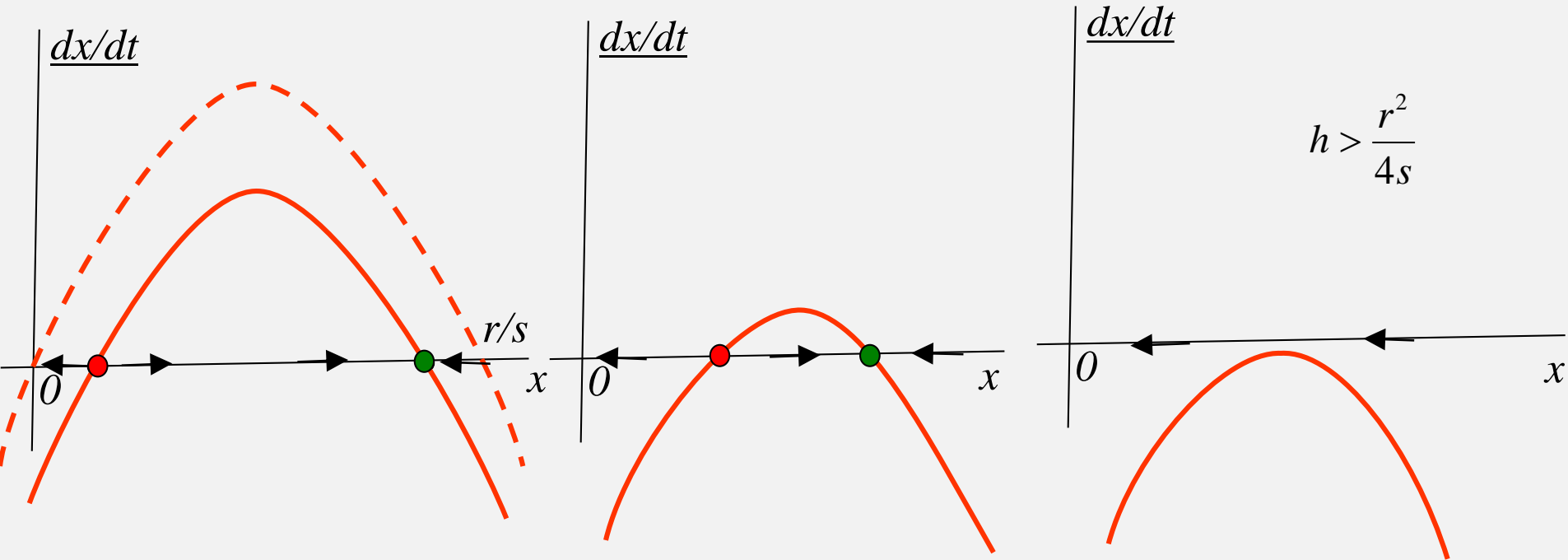
$x = K = r/s$  equilibrio naturale  
(capacità portante)



# Pesca con imposizione di quote costanti



Prelievo con quote costanti  $\dot{x} = (r - sx)x - h$



Due equilibri

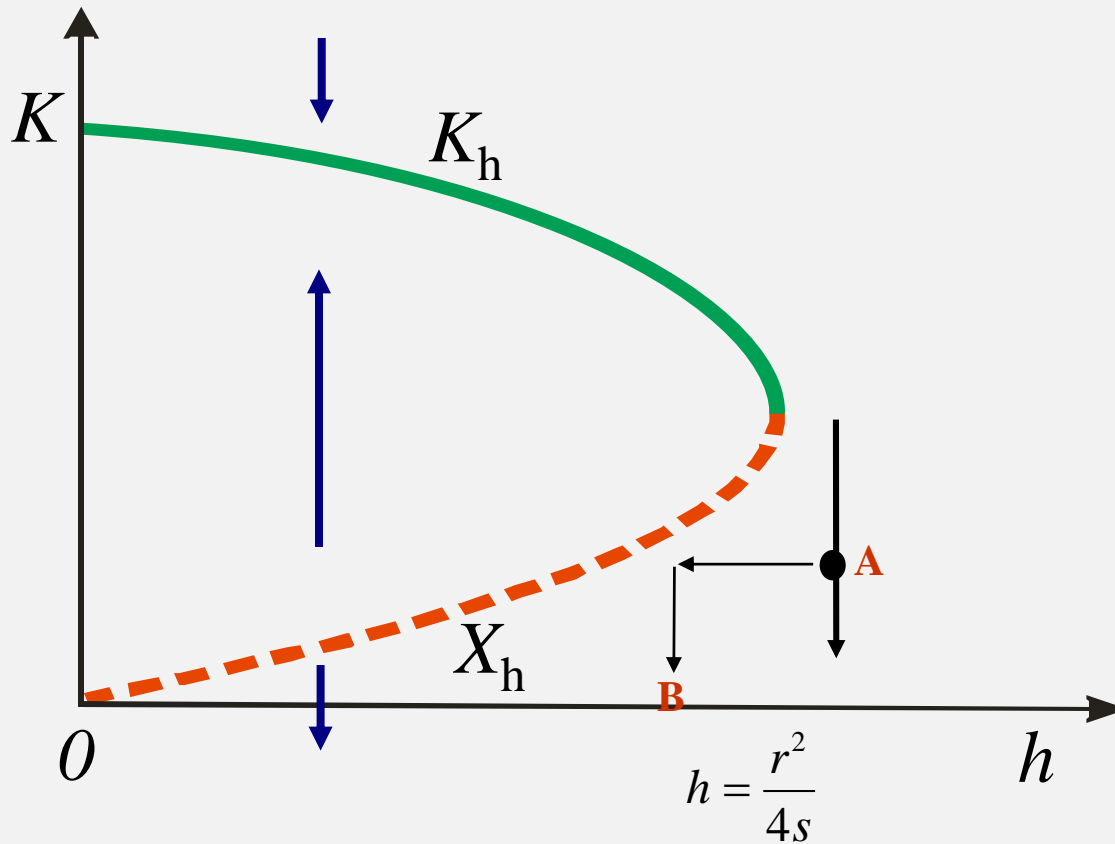
$$X_h = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}$$

Soglia di sopravvivenza

$$K_h = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s}$$

Equilibrio stabile

# Chi troppo vuole ... non piglia pesci



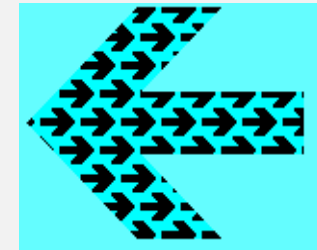
Irreversibilità !



# Interazione strategica: il Dilemma del Pescatore

|             |                                      | Fisherman C                        |                                      |
|-------------|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
|             |                                      | Moderate exploitaton (cooperative) | Intensive exploitation (competitive) |
| Fisherman R | Moderate exploitaton (cooperative)   | 3, 3                               | 1, 4*                                |
|             | Intensive exploitation (competitive) | 4, 1*                              | 2, 2*                                |

Un tipico dilemma sociale



Hardin, G. “The tragedy of the commons”, *Science* (1968).



E la mano invisibile di Adam Smith?

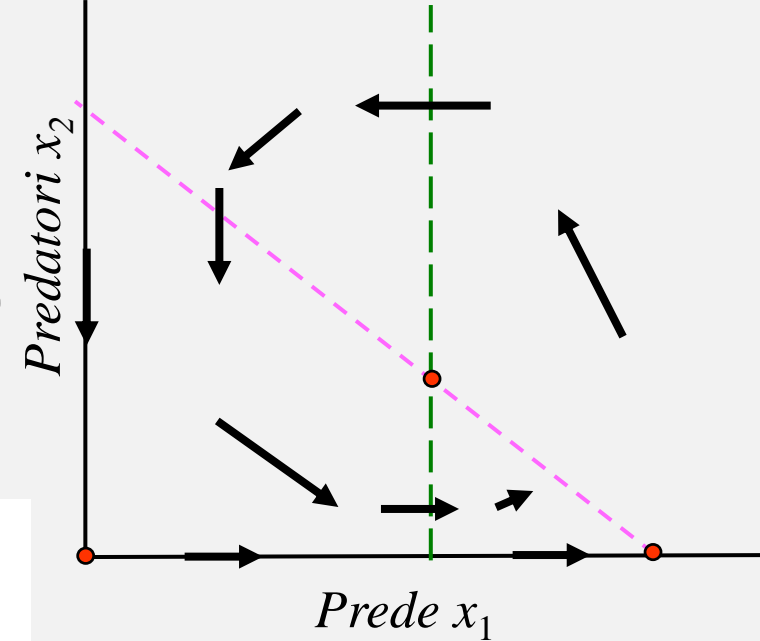
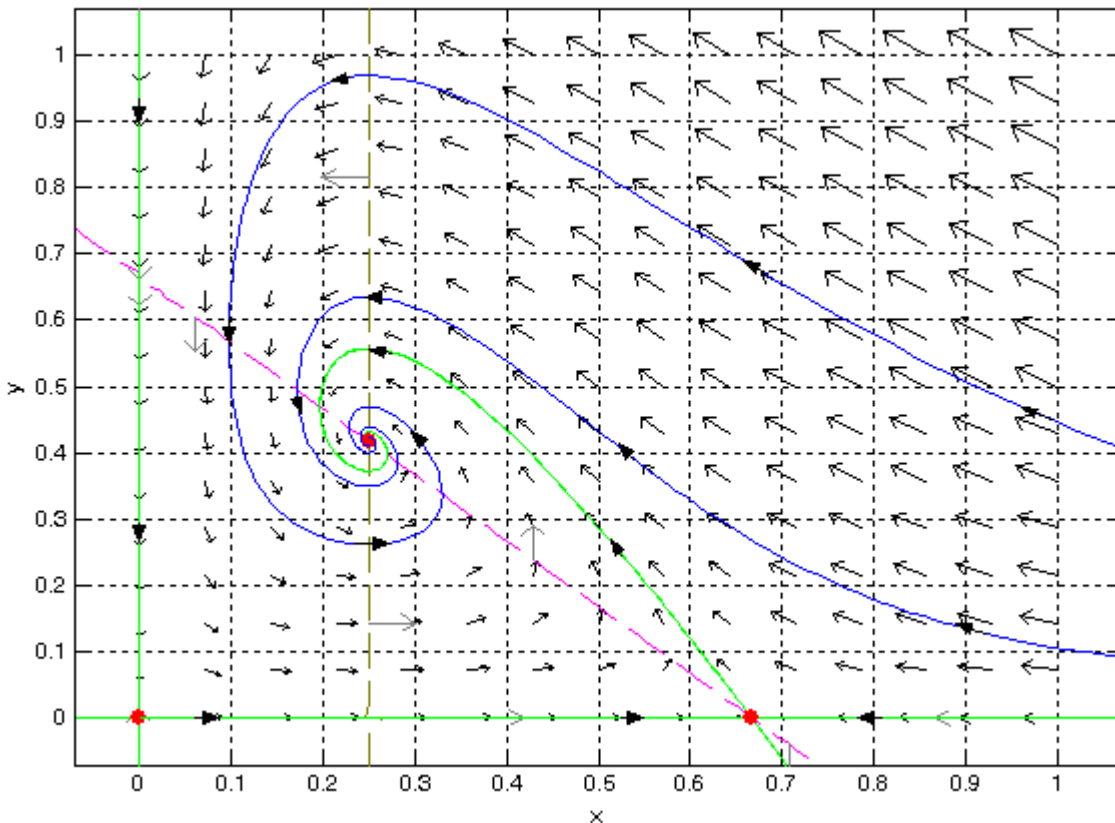
# Torniamo a Volterra

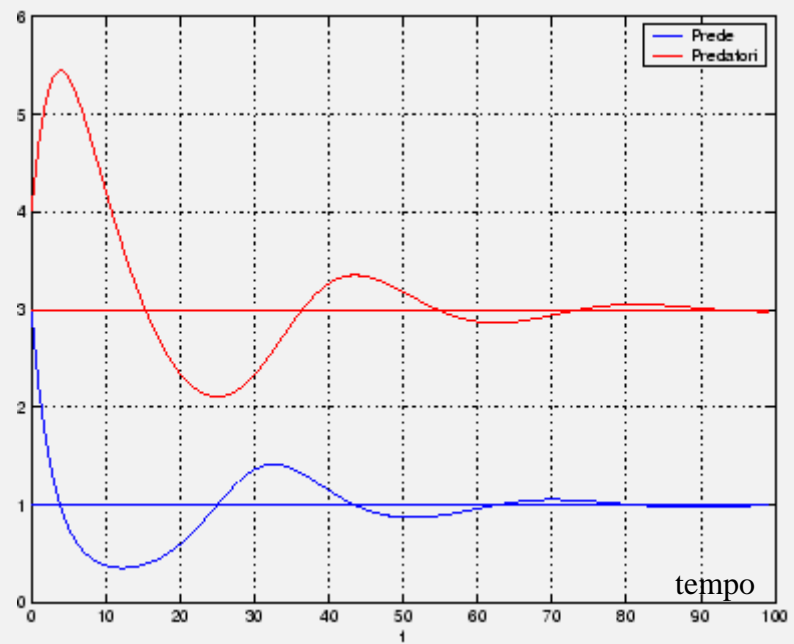
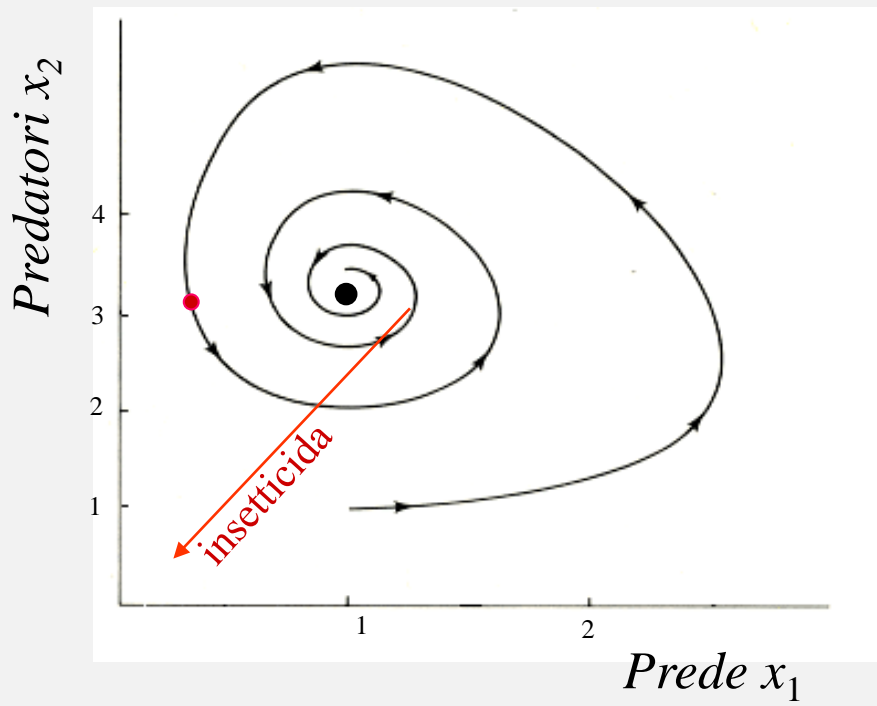
Crescita logistica della preda

- $x_1' = r x_1 - s x_1^2 - b x_1 x_2 = x_1(r - s x_1 - b x_2)$
- $x_2' = -m x_2 + c x_1 x_2 = x_2(-m + c x_1)$

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 - 3xy + \alpha x^2 \\ y' &= 4xy - y\end{aligned}$$

$$\alpha = -3$$



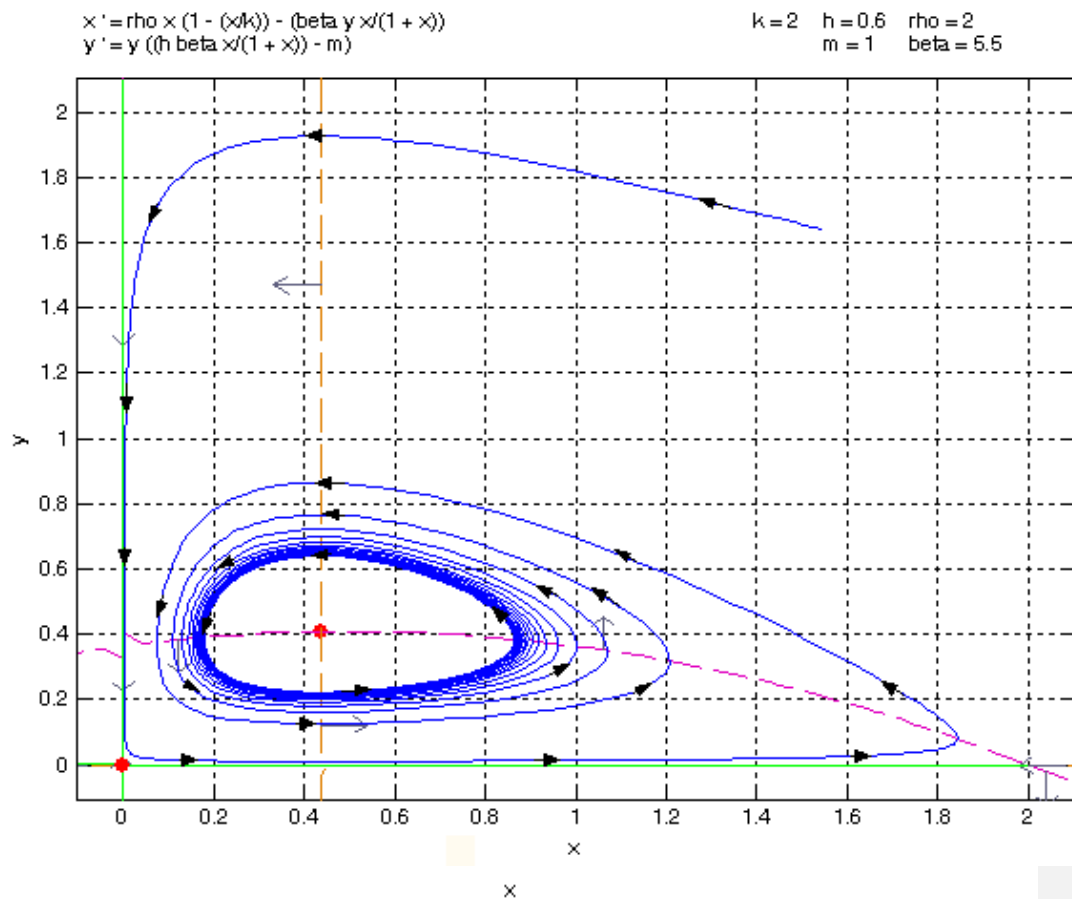




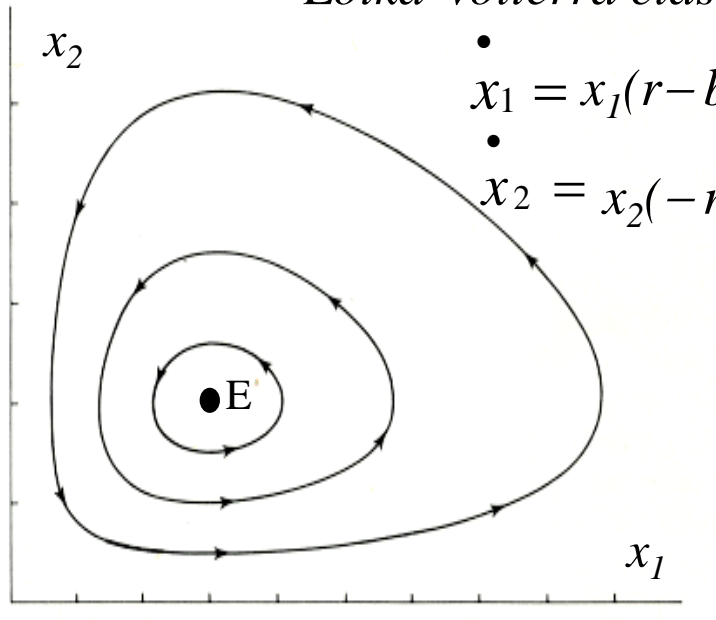
# Sazietà del predatore

$$\dot{x}_1 = rx_1 - sx_1^2 - \frac{bx_1}{a+x_1} x_2 = x_1 \left( r - sx_1 - \frac{bx_2}{a+x_1} \right)$$

$$\dot{x}_2 = -mx_2 + \frac{cx_1}{a+x_1} x_2 = x_2 \left( -m + \frac{cx_1}{a+x_1} \right)$$

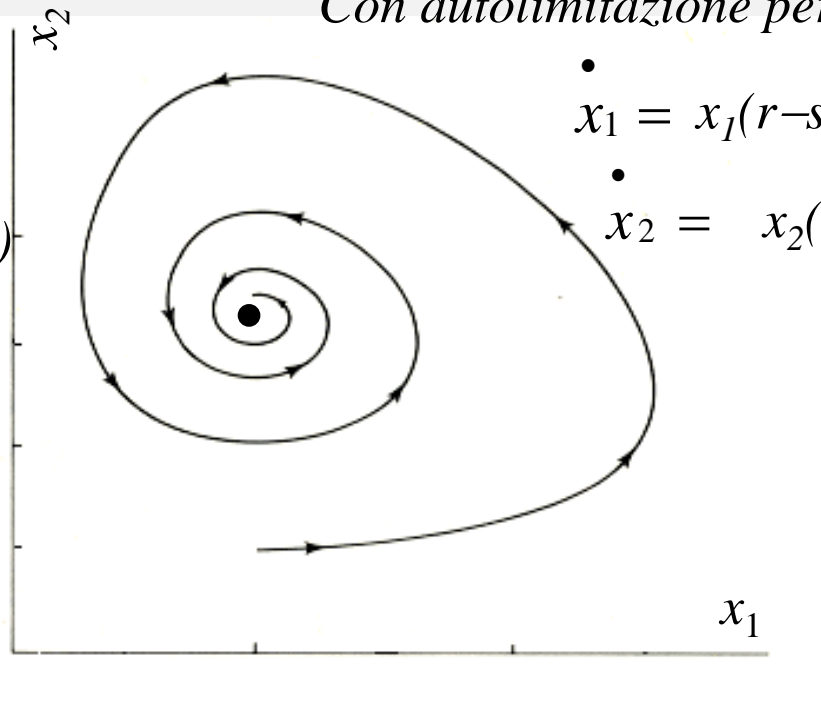


*Lotka-Volterra classico*



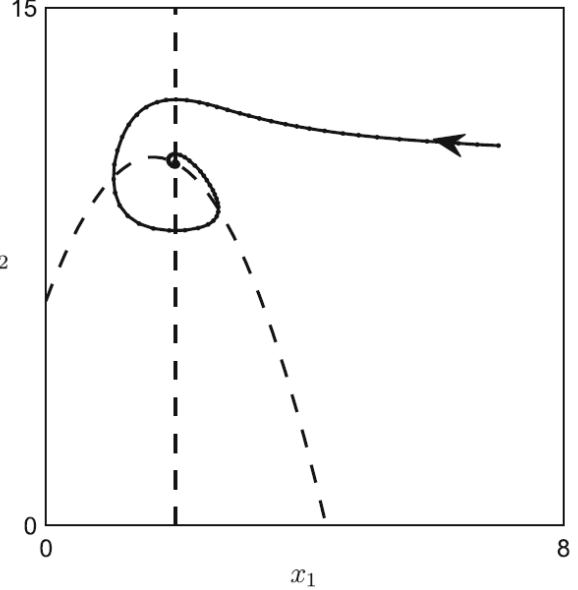
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(r - bx_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-m + cx_1) \end{aligned}$$

*Con autolimitazione per la preda*

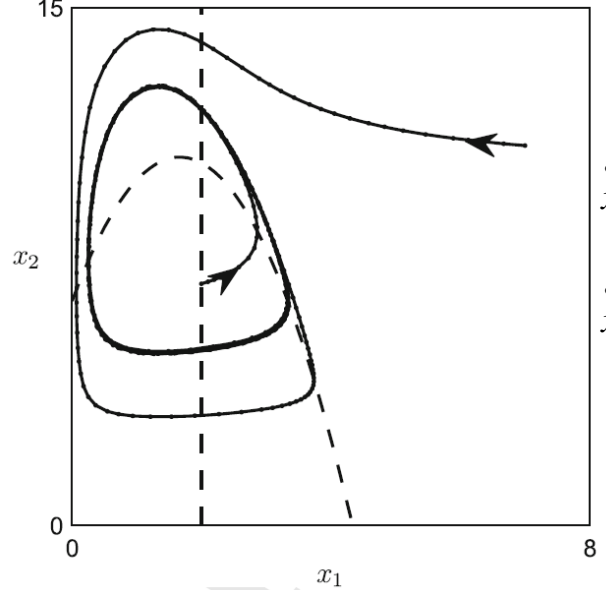


$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(r - sx_1 - bx_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-m + cx_1) \end{aligned}$$

$\alpha = 1.3, s = 0.3, b = 0.2, h = 1, d = .2, c = .3$



$\alpha = 1.3, s = 0.3, b = 0.2, h = 1, d = .2, c = .35$



*Con saturazione dell'appetito*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1 - sx_1^2 - \frac{bx_1}{a+x_1}x_2 = x_1 \left( r - sx_1 - \frac{bx_2}{a+x_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= -mx_2 + \frac{cx_1}{a+x_1}x_2 = x_2 \left( -m + \frac{cx_1}{a+x_1} \right) \end{aligned}$$



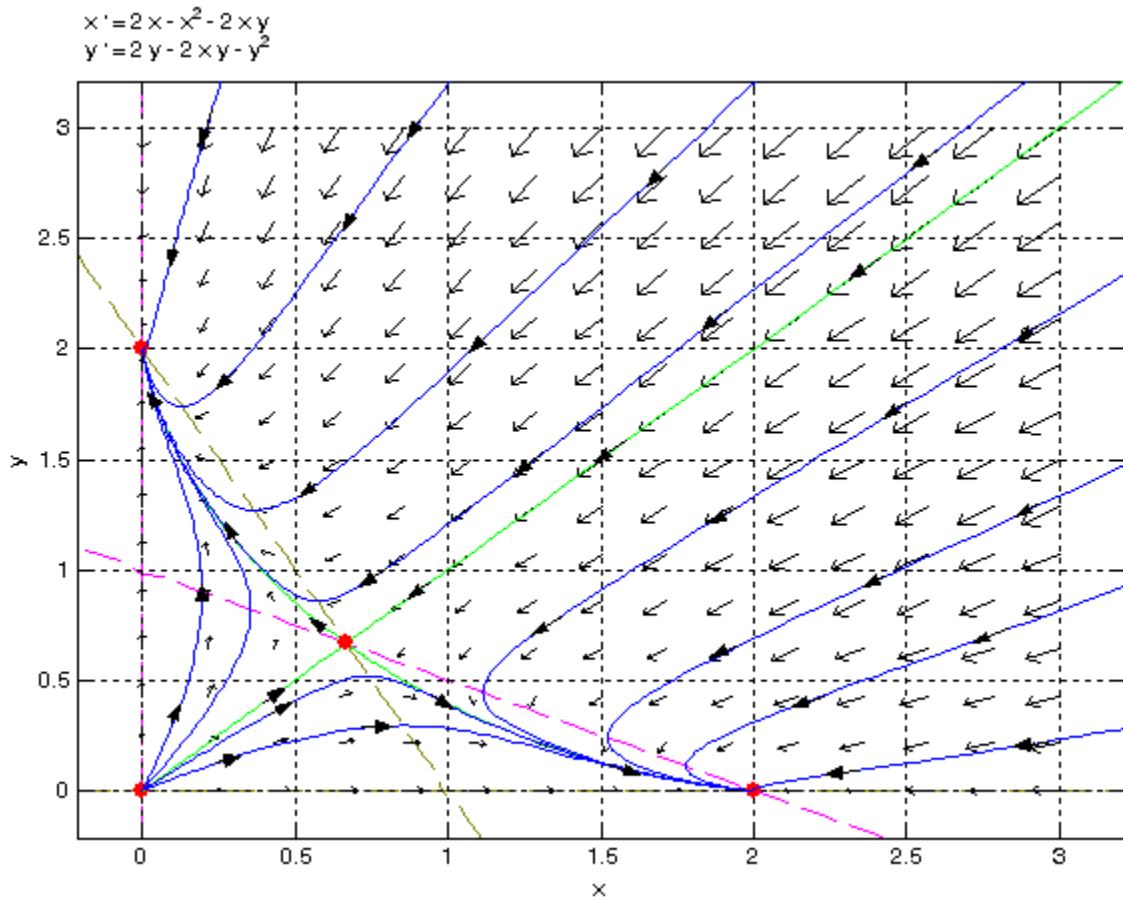
*"Plasmare dunque concetti in modo da poter introdurre la misura; misurare quindi; dedurre poi delle leggi; risalire da esse ad ipotesi; dedurre da queste, mercé l'analisi, una scienza di enti ideali sì, ma rigorosamente logica; confrontare poscia con la realtà; rigettare o trasformare, man mano che nascono contraddizioni tra i risultati del calcolo ed il mondo reale, le ipotesi fondamentali che han già servito;*

*e giungere così a divinare fatti e analogie nuove, o dallo stato presente arrivare ad argomentare quale fu il passato e che cosa sarà l'avvenire; ecco, nei più brevi termini possibili, riassunto il nascere e l'evolversi di una scienza avente carattere matematico."*

Vito Volterra, Saggi Scientifici, Zanichelli Bologna 1920

# Modello di Volterra per la competizione fra due specie

- $x_1' = r_1 x_1 - s_1 x_1^2 - \alpha_{12} x_1 x_2 = x_1 (r_1 - s_1 x_1 - \alpha_{12} x_2)$
- $x_2' = r_2 x_2 - s_2 x_2^2 - \alpha_{12} x_1 x_2 = x_2 (r_2 - s_2 x_2 - \alpha_{12} x_1)$



## **Gli esperimenti di Gause (1934)**

*Due specie di protozoi: Paramecium aurelia e Paramecium caudatum.*

*Ponendo in colture separate le due specie, e rinnovando periodicamente il terreno, si ottennero curve di accrescimento approssimativamente sigmoidali con il conseguimento d'uno stato stazionario.*

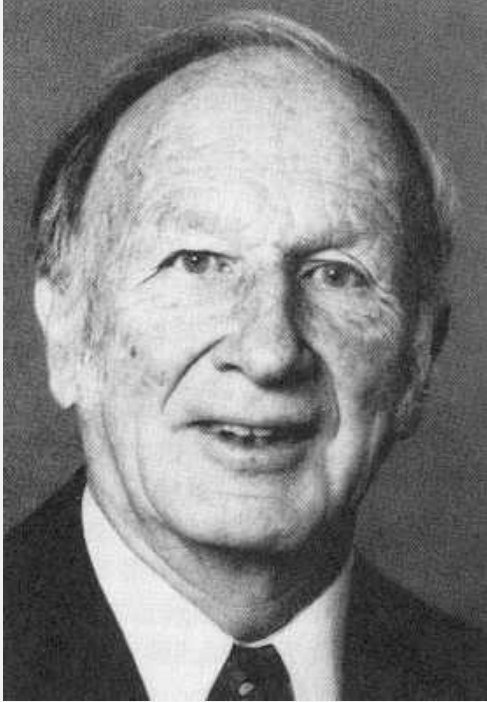
*Ponendo le due specie insieme in uno stesso terreno di coltura si vide che mentre Paramecium aurelia manteneva ancora un accrescimento logistico, la popolazione di Paramecium caudatum, dopo un certo numero di giorni (circa 8), cominciò a diminuire fino a scomparire del tutto. Da ciò si può dedurre che una delle due specie è riuscita a competere meglio per le risorse causando l'estinzione di quella concorrente.*

## **Il principio d'esclusione competitiva (principio di Gause).**

*Se due specie coesistono in un medesimo ambiente ciò avviene in ragione del fatto che esse presentano nicchie ecologiche separate. Qualora, però, le due specie presentino nicchie sovrapposte, allora una delle due specie prenderà il sopravvento sull'altra fino ad eliminarla. Comunque, spesso la coesistenza è garantita dalla presenza di nicchie ecologiche non completamente sovrapposte (le specie in questione possono presentare, infatti, differenze lievi a livello di dieta o di habitat). In conseguenza di ciò nasce il quesito su quanto due nicchie debbano essere separate affinché la coesistenza sia permessa..*

## **Il modello di Volterra dimostra che:**

- due specie con identiche richieste non possono coesistere
- la specie più efficiente nel convertire le risorse escluderà l'altra tendendo ad un equilibrio funzione inversa dei tassi di consumo individuale e diretta delle efficienze



**Edward Lorenz (1917–2008)**

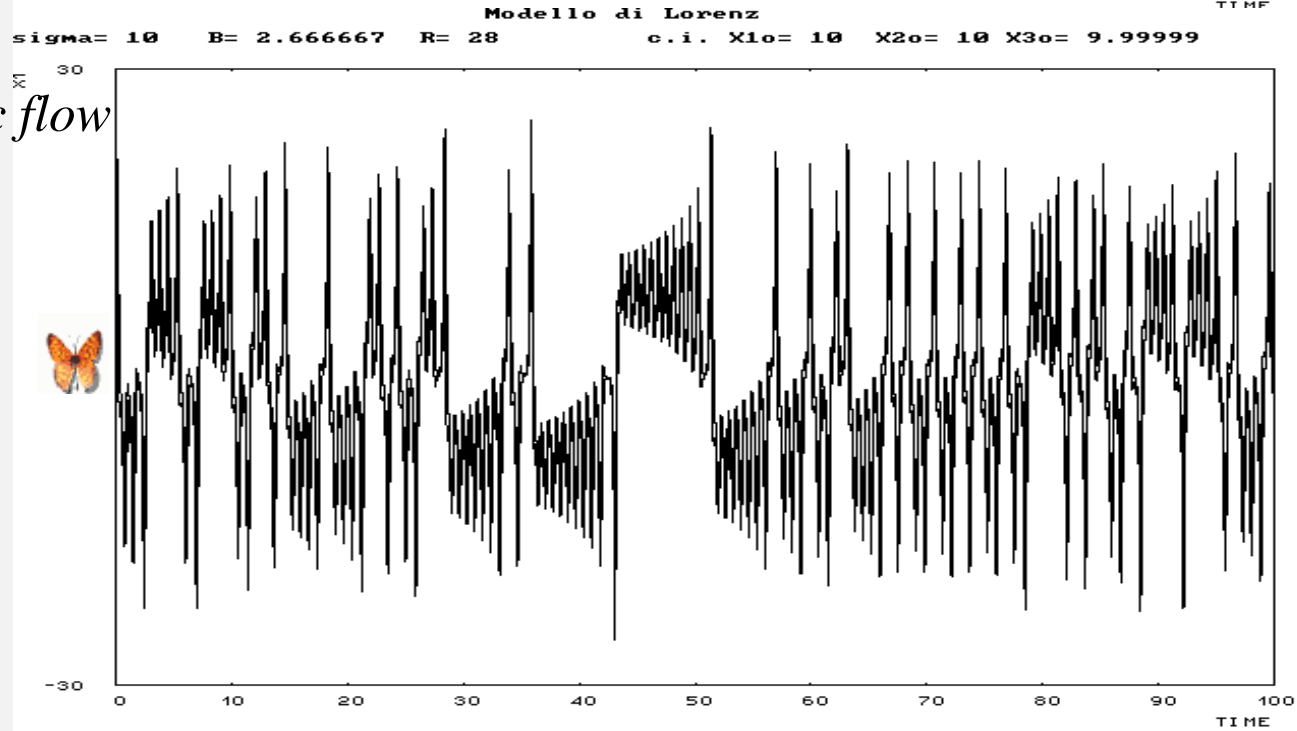
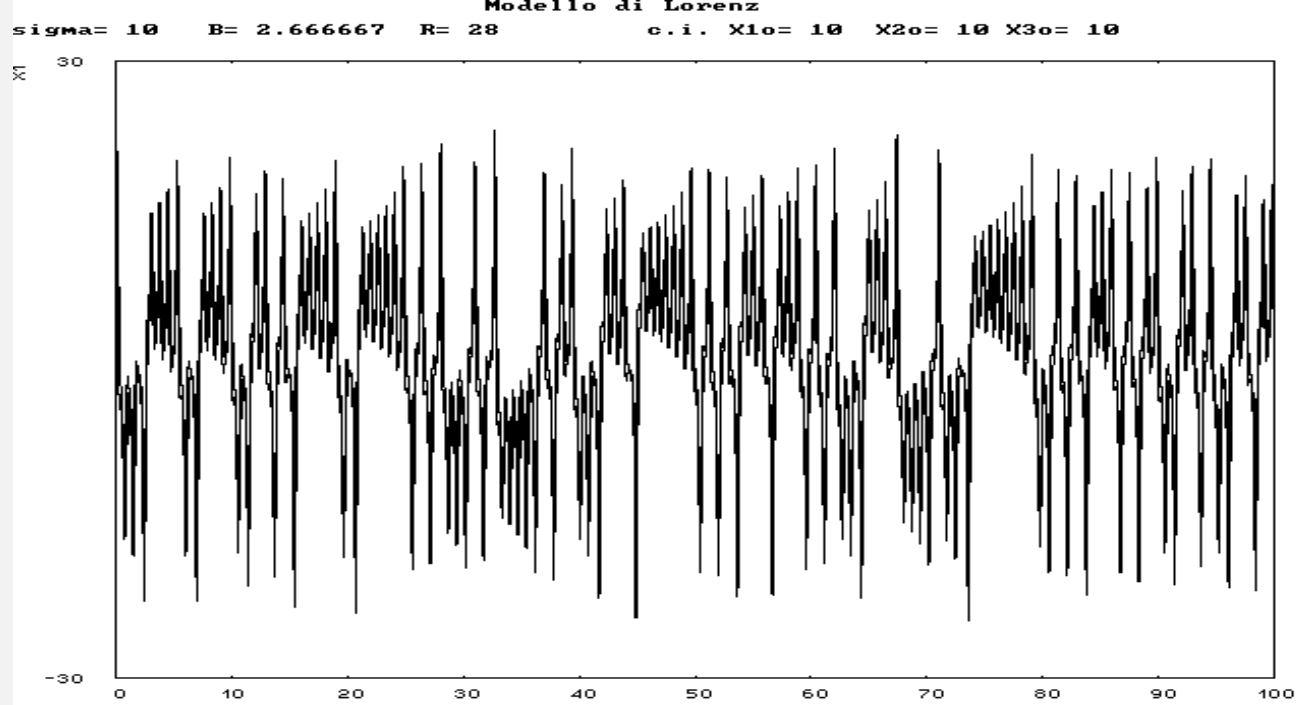
*Deterministic non-periodic flow*

*J. Atmos. Sci. (1963)*

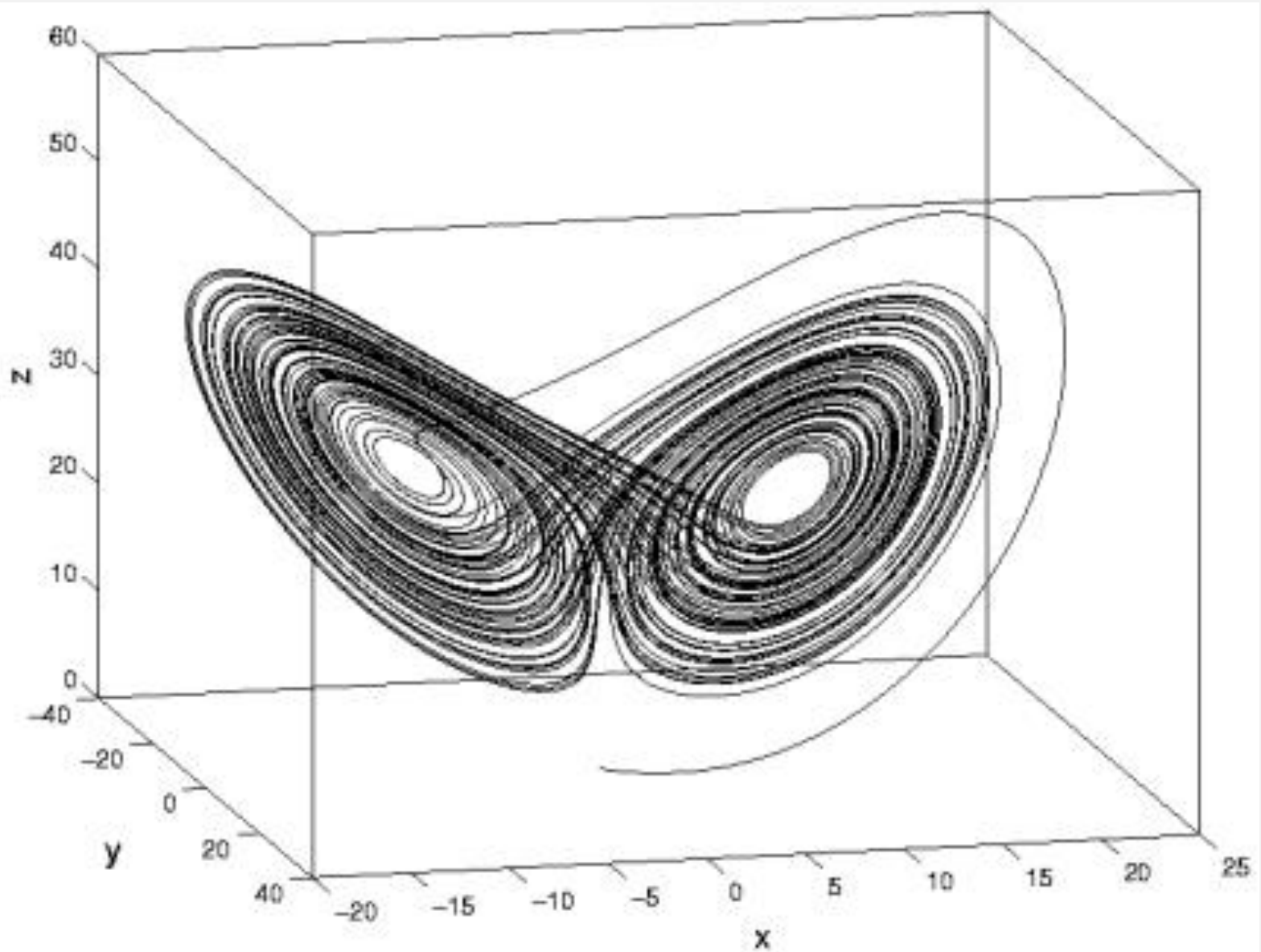
$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$



Lorenz, E.N.: *Predictability: does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in 4381 Texas?* 139th Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science (29 Dec 1972)



**Nel 1776 Laplace scriveva :**

*“Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all’istante precedente e se noi immaginassimo un’intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro”*

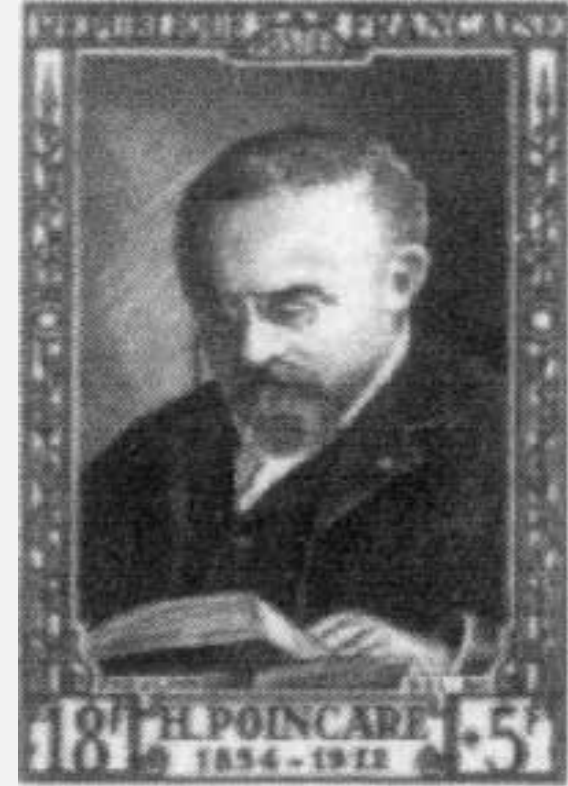


Pierre-Simon Laplace  
1749-1827



## Henri Poincaré (1903)

*Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.*



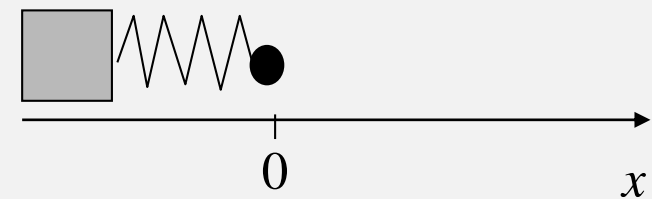
Henri Poincaré, 1854-1912

*Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.*

*Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali..*

**PROBLEMA DEI 3 CORPI**

# Oscillatore armonico



$$m \ddot{x} = -kx$$

$$c.i. x(0) = A;$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

soluzione

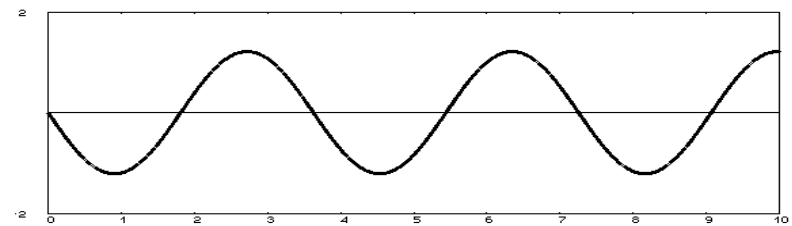
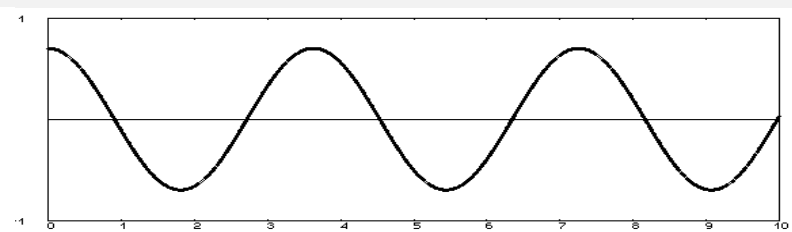
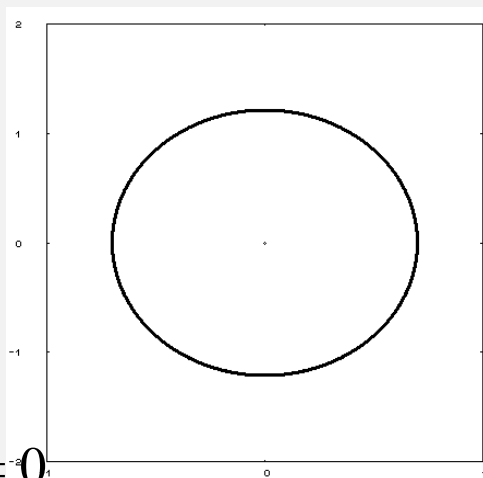
$$x(t) = A \cos \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## Sistema equivalente

$$x_1 = x; \quad x_2 = \dot{x}$$

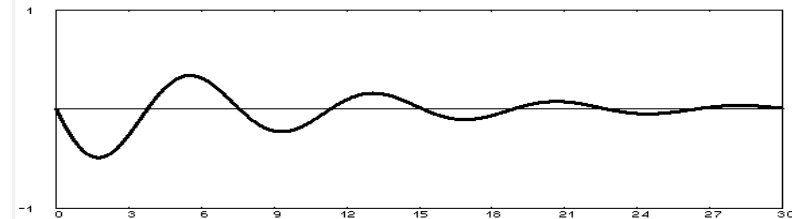
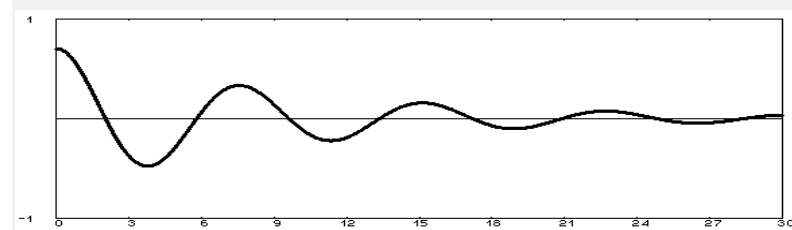
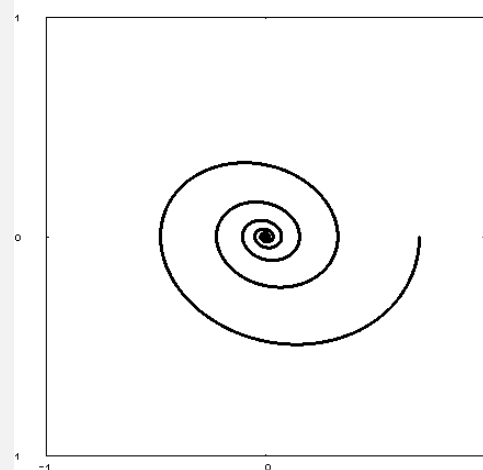
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{cases}$$

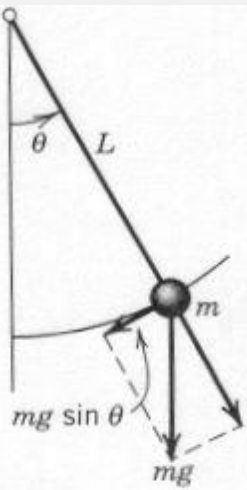
$$c.i. x_1(0) = A \quad x_2(0) = 0$$



## Con attrito $-\eta \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{\eta}{m} x_2 \end{cases}$$





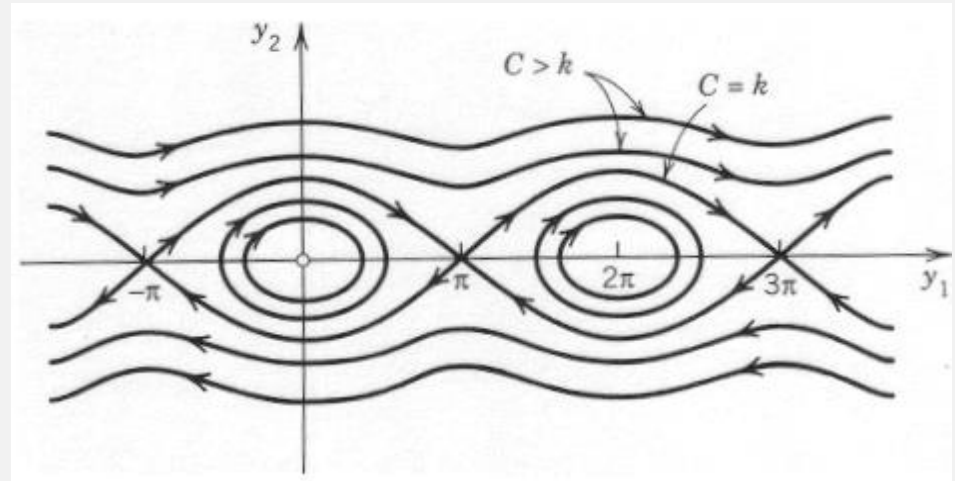
Pendolo  $l \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad \theta(0) = \theta_0; \quad \dot{\theta}(0) = 0$

E' un oscillatore armonico per  $\sin \theta \cong \theta$

Altrimenti:

$$x_1 = \theta; \quad x_2 = \dot{\theta}$$

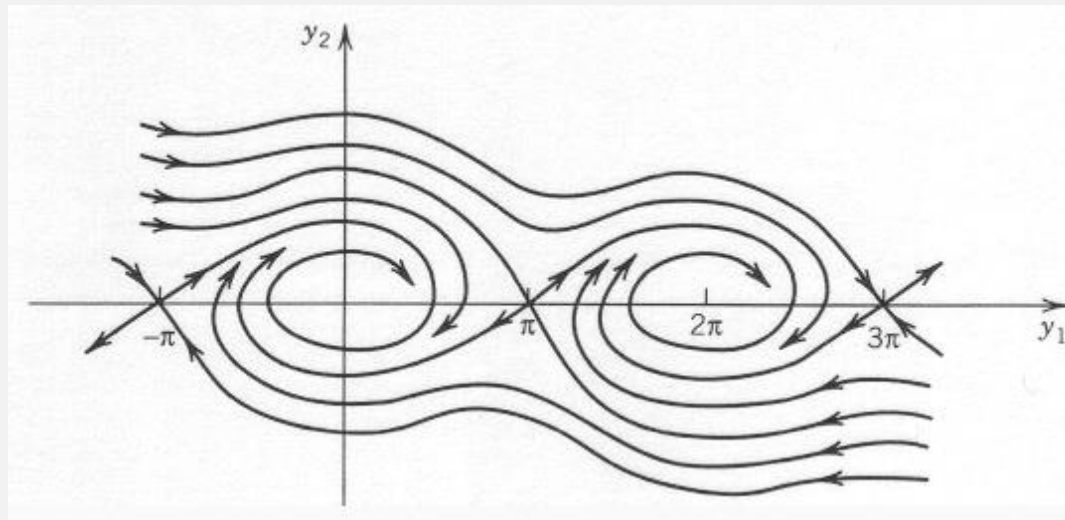
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$



Introducendo attrito viscoso, cioè un termine proporzionale alla velocità

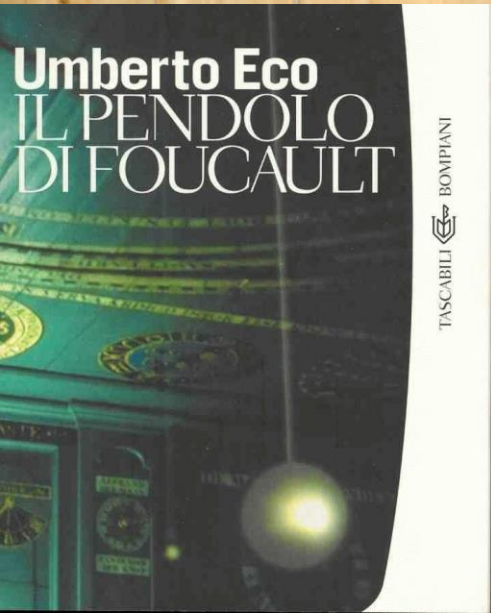
$$l \ddot{\theta} = -k \dot{\theta} - g \sin \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{l} x_2 \end{cases}$$





Umberto Eco  
(1932-1916)



## Incipit.

Fu allora che vidi il Pendolo.

La sfera, mobile all'estremità di un lungo filo fissato alla volta del coro, descriveva le sue ampie oscillazioni con isocrona maestà. Io sapevo – ma chiunque avrebbe dovuto avvertire nell'incanto di quel placido respiro – che il periodo era regolato dal rapporto tra la radice quadrata della lunghezza del filo e quel numero  $\pi$  che, irrazionale alle menti sublunari, per divina ragione lega necessariamente la circonferenza al diametro di tutti i cerchi possibili così che il tempo di quel vagare di una sfera dall'uno all'altro polo era effetto di una arcana cospirazione tra le più intemporalmente delle misure, l'unità del punto di sospensione, la dualità di una astratta dimensione, la natura ternaria di  $\pi$  il tetragono segreto della radice, la perfezione del cerchio.”

# Finale

“Il Pendolo non oscillava più nel suo luogo consueto a mezza crociera. Era stato appeso, più grande, alla chiave di volta, al centro del coro.[...] La corda si era tesa sotto il peso della sfera e si era avvolta, ora strettamente come un laccio, intorno al collo del mio povero amico, sbalzato a mezz'aria, pendulo lungo il filo del Pendolo e, volato di colpo verso l'estremità orientale del coro, ora stava tornando indietro, già privo di vita (spero), nella mia direzione. [...] Il collo di Belbo appariva come una seconda sfera inserita lungo il tratto del filo che andava dalla base alla chiave di volta e — come dire — mentre la sfera di metallo si tendeva a destra, il capo di Belbo, l'altra sfera, inclinava a sinistra, e poi l'inverso. Per lungo tratto le due sfere andarono in direzioni opposte così che quello che sciabolava nello spazio non era più una retta, ma una struttura triangolare. [...] Poi, mentre l'oscillatore continuava a incoraggiare quella funebre altalena, per un atroce comporsi di forze, una migrazione di energie, il corpo di Belbo era divenuto immobile, e il filo con la sfera si muovevano a pendolo soltanto dal suo corpo verso terra, il resto — che collegava Belbo con la volta — rimanendo ormai a piombo. Così Belbo, sfuggito all'errore del mondo e dei suoi moti, era divenuto lui, ora, il punto di sospensione, il Perno Fisso, il Luogo a cui si sostiene la volta del mondo, e solo sotto i suoi piedi oscillavano il filo e la sfera, dall'uno all'altro polo, senza pace...”



Il pendolo ideale consiste di un filo sottilissimo, incapace di resistenza a flessione e torsione, di lunghezza  $L$ , cui è attaccata una massa al suo baricentro. Per la sfera il baricentro è il centro, per un corpo umano è un punto a 0.65 della sua altezza, misurato dai piedi. Se l'impiccato è alto m. 1.70 il baricentro è a m. 1.10 dai suoi piedi e la lunghezza  $L$  comprende questa lunghezza. Cioè, se la testa fino al collo è lunga m. 0.30, il baricentro è a  $1.70 - 1.10 = 0.60$  m. dalla testa e a  $0.60 - 0.30 =$  m. 0.30 dal collo dell'impiccato.

Il periodo di piccole oscillazioni del pendolo, determinato da Huygens, è dato da:

$$T \text{ (secondi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \quad (1)$$

dove  $L$  è in metri,  $\pi = 3.1415927\dots$  e  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ . Ne risulta che la (1) dà:

$$T = \frac{2 \cdot 3.1415927}{\sqrt{9.8}} \sqrt{L} = 2.00709 \sqrt{L}$$

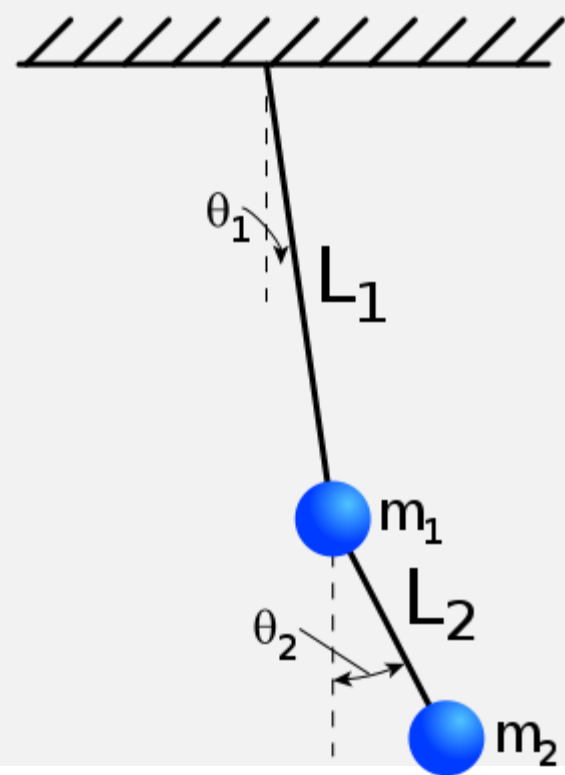
cioè pressapoco:

$$T = 2\sqrt{L} \quad (2)$$

Nota bene:  $T$  è indipendente dal peso dell'impiccato (uguaglianza degli uomini davanti a Dio)...

Un doppio pendolo con due masse attaccato allo stesso filo... Se sposti A, A oscilla e dopo un po' si ferma e oscilla B. Se i pendoli accoppiati hanno masse o lunghezze diverse, l'energia passa dall'uno all'altro ma i tempi di queste oscillazioni dell'energia non sono uguali... Questo vagolare dell'energia avviene anche se invece di cominciare a far oscillare A liberamente dopo averlo spostato, seguiti a spostarlo periodicamente con una forza. Cioè se il vento soffia a raffiche sull'impiccato in anti-sintonia, dopo un po' l'impiccato non si muove e la forza oscilla come se fosse imperniata sull'impiccato.

(Da una lettera privata di Mario Salvadori, Columbia University, 1984)



## **Argento vivo (2013) di Marco Malvaldi (1974-)**

Un pendolo è un oggetto il cui comportamento è molto facile da prevedere. Un qualsiasi peso attaccato in fondo a un filo (o distribuito lungo un'asta la cui estremità superiore sia fissata a un perno) non potrà fare altro quando perturbato dal suo stato di equilibrio, se non oscillare da una parte all'altra, smorzando mano a mano l'ampiezza del proprio moto [...]. Un pendolo semplice, dicevamo, ha un comportamento semplice e lineare: ma se in fondo al primo pendolo ne attaccate un secondo, se in fondo ad un'asta che pende ne incardinate una seconda e poi, dopo aver sollevato il tutto, lo lasciate cadere, la semplicità di cui parlavamo prima potete scordarvela. Un doppio pendolo, nonostante la sua apparente semplicità, è quello che in fisica si definisce "sistema caotico": ovvero un sistema che, se si cambiano anche in modo infinitesimale le condizioni di partenza, esibisce comportamenti completamente differenti fra loro, e non prevedibili sulla base delle condizioni iniziali. Basta alzare uno dei due perni un filino di più, o di meno, e la traiettoria che tratterà il nostro pendolo potrebbe non assomigliare minimamente a quelle precedenti.

Da un punto di vista fisico, un giocatore di golf è un doppio pendolo: una prima asta (le braccia fino al gomito) su cui è incernierata una seconda asta (le braccia dal gomito al polso, le mani e la mazza). Un sistema, quindi, che per minime variazioni delle condizioni iniziali esibisce comportamenti assolutamente caotici.

Questa breve digressione di fisica classica, oltre a far vedere che l'autore è una persona di una certa qual cultura, ci aiuta a comprendere per quale motivo, mentre si incamminava verso la club house, Giacomo Mancini fosse incazzato nero.

---

# review article

---



## Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May\*

---

*First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.*

---



Robert May, 1976

*“Appello evangelico per l’introduzione di queste equazioni alle differenze semplici in corsi elementari di matematica, cosicchè l’intuizione degli studenti possa essere arricchita vedendo le cose bizzarre che succedono con semplici equazioni non lineari. [...]”.*

*“Io vorrei sollecitare che sia presentata [l’equazione logistica] presto nell’educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non richieda un corso elementare di matematica.*

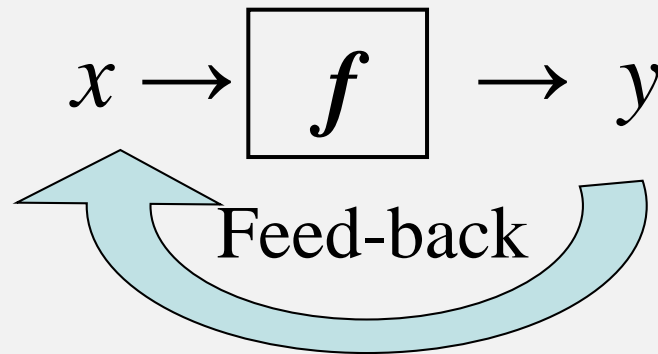
*Tale studio potrebbe in generale arricchire l’intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche.”*

**Sistemi dinamici a tempo discreto:** Assegnato  $x_0$ , la successione degli stati (traiettoria) si ottiene per induzione:

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad t = 0, 1, \dots \quad x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1)$$

*Iterazione di funzione  $y = f(x)$*

Funzione composta con se stessa)



$$x(0) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(1) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(2) \dots x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1) \dots$$

“traiettoria” del sistema dinamico

$$x(1) = f(x(0)) \quad x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \dots x(t) = f^t(x(0))$$

**Modello di May:** Stagioni riproduttive, supponiamo che ogni anno si riproduca una frazione  $r$  di insetti e ne muoia una frazione  $m$ .

Nell'anno successivo la popolazione è

$$N(t+1) = N(t) + rN(t) - mN(t) = (1 + r - m)N(t)$$

**Popolazione che vive in un ambiente limitato.**

Si fa l'ipotesi che il tasso di mortalità  $m$  non sia costante, ma aumenti al crescere della numerosità della popolazione, ad esempio  $m = sN(t)$ , mortalità per sovraffollamento (carezza di cibo ecc.)

La legge di evoluzione diventa di secondo grado:

$$N(t+1) = (1 + r)N(t) - sN(t)^2$$

Con il cambio di variabile:  $N = \frac{1+r}{s}x$  si ottiene la forma standard

$$x(t+1) = ax(t)[1 - x(t)] \quad \text{dove } a = (1+r)$$

# CAOS DETERMINISTICO E LETTERATURA

Dal romanzo: *Jurassic Park*,

di **Michael Crichton** (23 ottobre 1942, 4 novembre 2008)

Un passo tratto dalla Seconda Iterazione

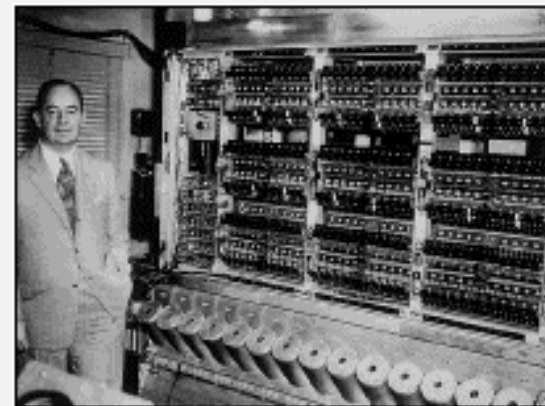
[...] *Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i “meccanismi del mondo reale”. Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici.*

*Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos.*

*Terza cosa, sembravano voler fare di tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale.*

Ancora Ian Malcom, da *Jurassic Park*, terza iterazione.

*“I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann , il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. [...]. La teoria del caos manda all'aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se non per pochi giorni. [...] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni- è buttato via. È un'impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo”.*



## Jurassic Park, terza iterazione:

*“Un simile controllo è impossibile” dichiarò Ian Malcom*

*“Invece sì” disse Hammond*

*“Mi scusi, ma lei non sa quello che dice” ribattè Malcom*

*“Piccolo stronzo arrogante” disse Hammond. Si alzò e uscì.*

*“Mi spiace” disse Malcom “ma il punto è che ciò che definiamo natura è di fatto un sistema complesso, non lineare.*

*Ci costruiamo una immagine lineare della natura e poi combiniamo pasticci.*

*Io non sono uno di quegli ambientalisti dal cuore tenero, ma dovete capire ciò che non capite. Quante volte bisogna sbattere il muso contro l’evidenza dei fatti?*

*Abbiamo costruito la diga di Assuan sostenendo che avrebbe rivitalizzato l’Egitto, e invece distrugge il fertile delta del Nilo, produce infestazioni da parassiti e rovina l’economia.*

*Abbiamo costruito...*

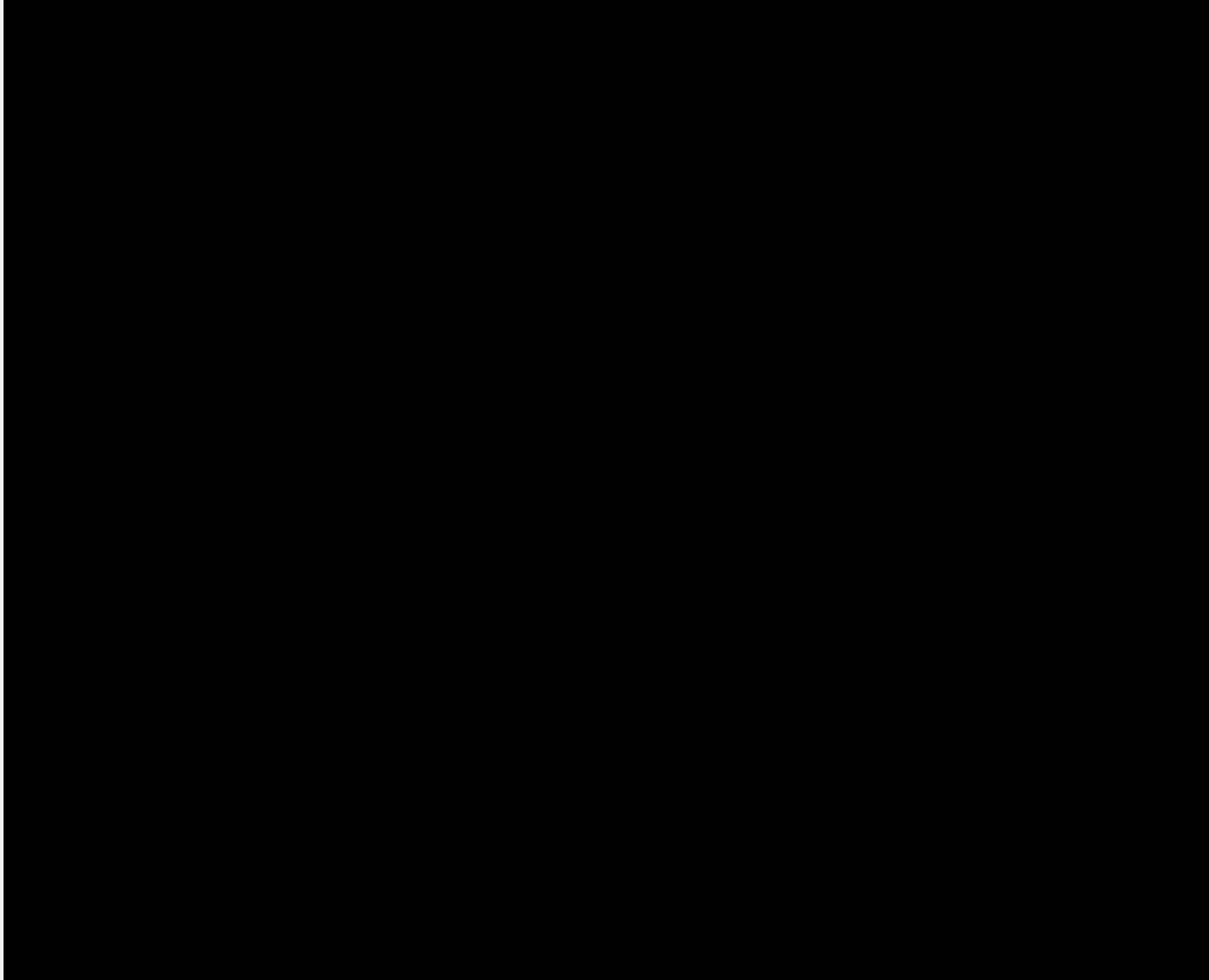
COMMISSARIO, C'È UNA FARFALLA  
CHE SVOLAZZÀ TRANQUILLA.

LA TEORIA DEL CAOS DICE CHE SE UNA  
FARFALLA SBATTE LE ALI QUI, POTREBBE  
SUCCEDERE UNA CATASTROFE' ALTROVE.

CHE FACCIAMO,  
LA ARRESTIAMO'?



Ray Bradbury “A sound of thunder” (il risveglio del tuono)  
The Simpson

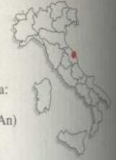






CHAOS 1997

**CHAOS**  
 IGT MARCHE ROSSO  
 TABLE RED WINE  
 ESTATE BOTTLED  
 Imbottigliato all'origine da:  
 Fattoria Le Terrazze  
 di Antonio Terni - Numana (An)  
 PRODUCT OF ITALY  
 ITALIA



NET CONT. 750 ML e ALC. 13,5% BY VOL.  
<http://www.italywines.com>

The "Chaos" theory explains why certain patterns cannot be fully explained. And wine - this wine, any wine - cannot be explained by the countless interactions between its compounds. All the better.  
 La teoria del "Chaos" spiega perché alcune realtà non si possono spiegare del tutto. Così come un vino - questo vino, qualsiasi vino - non si può spiegare in base alle innumerevoli interazioni fra le sue componenti. Meglio così.

NON DISPERDERE IL VETRO NELL'AMBIENTE L. 49

# CHAOS

IGT MARCHE ROSSO  
 TABLE RED WINE  
 ESTATE BOTTLED



Imbottigliato all'origine da:  
 Fattoria Le Terrazze  
 di Antonio Terni - Numana (An)  
 PRODUCT OF ITALY  
 ITALIA

NET CONT. 750 ML e ALC. 13,5% BY VOL.

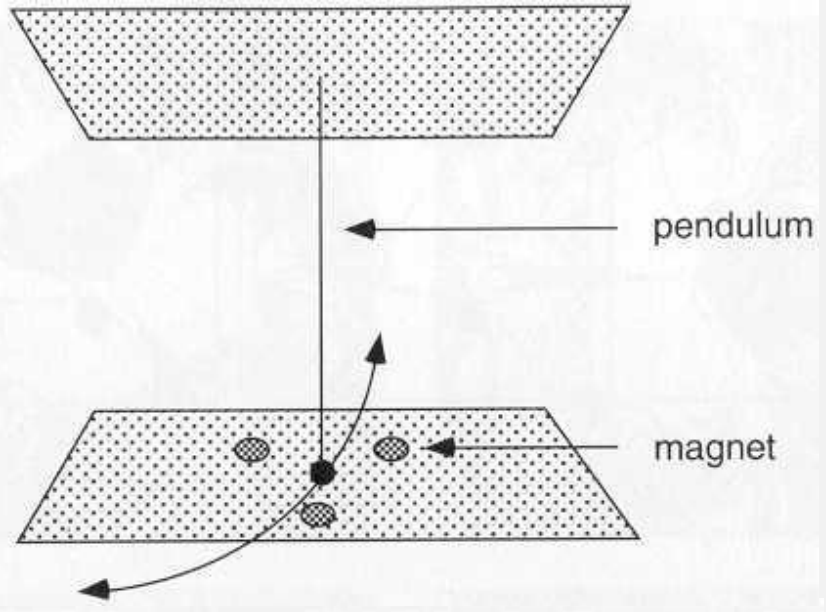
<http://www.italywines.com>

The "Chaos" theory explains why certain patterns cannot be fully explained. And wine - this wine, any wine - cannot be explained by the countless interactions between its compounds. All the better.

La teoria del "Chaos" spiega perché alcune realtà non si possono spiegare del tutto. Così come un vino - questo vino, qualsiasi vino - non si può spiegare in base alle innumerevoli interazioni fra le sue componenti. Meglio così.

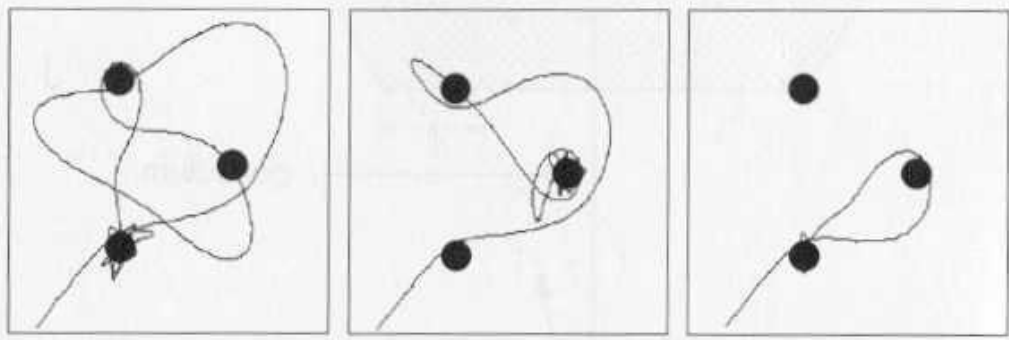
NON DISPERDERE IL VETRO NELL'AMBIENTE L. 49

strutture complesse dei bacini di attrazione nel caso di più attrattori coesistenti



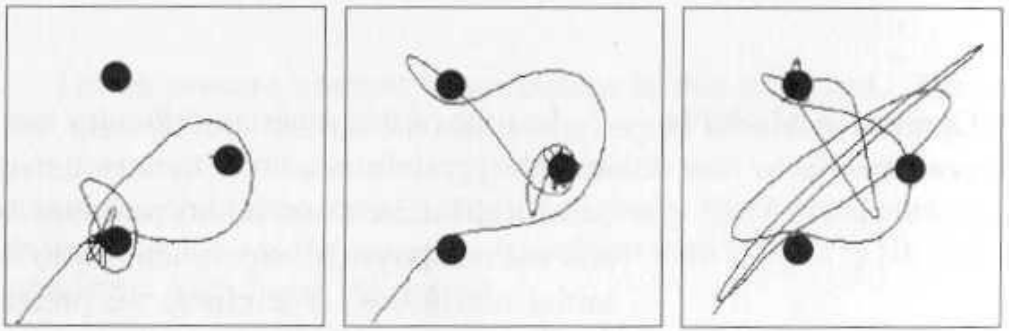
**Trajectories and Friction**

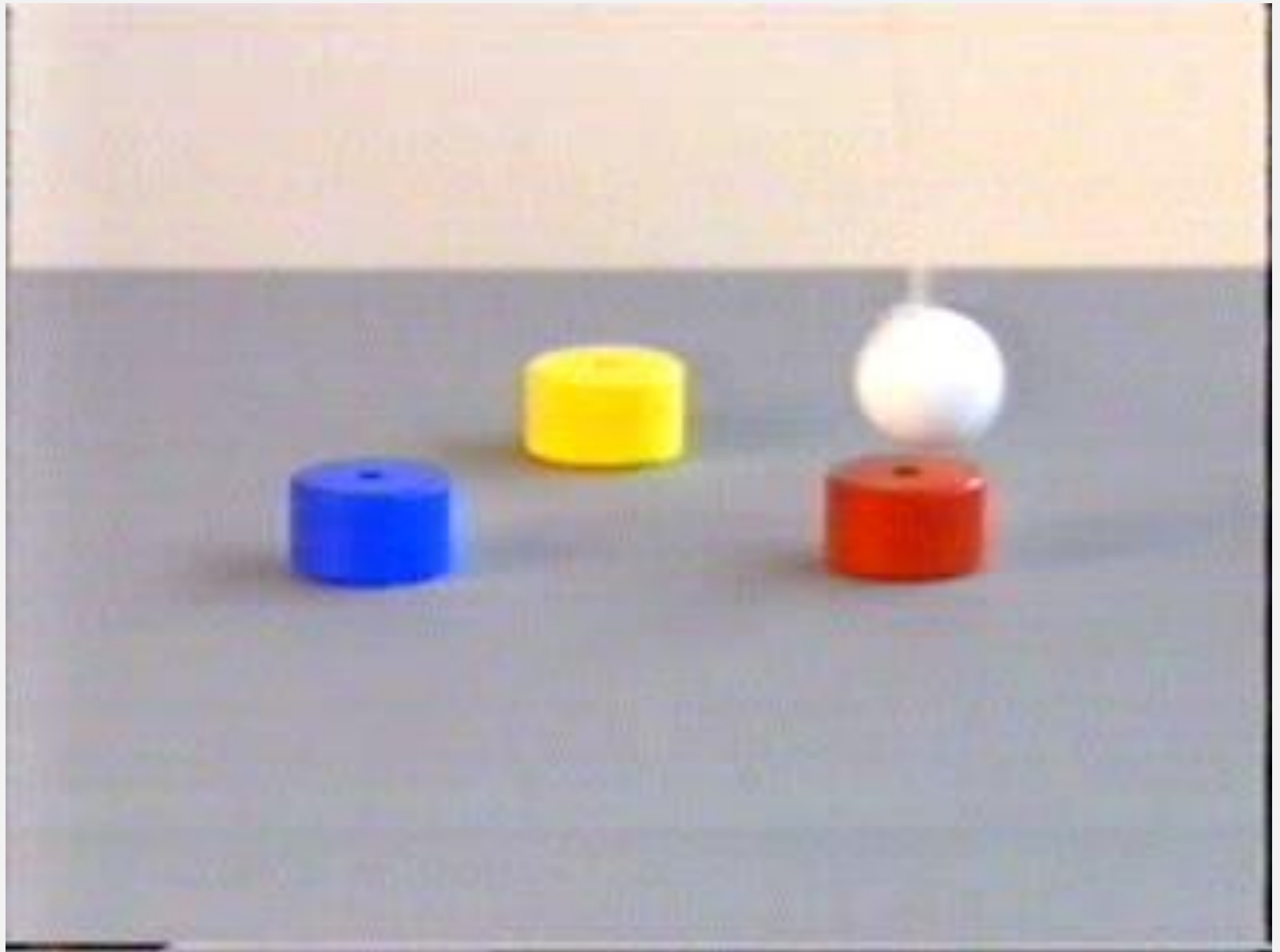
Top view of the paths of the pendulum. Same initial point in the lower left, but different friction parameters (low friction on the left and high friction on the right). Note that the final rest point of the pendulum is not the same in the three experiments.



**Trajectories and Gravitational Force**

Top view of the paths of the pendulum. Same initial point and different force parameters with low force pulling the pendulum to its mid-point position (left), and strong force (right).







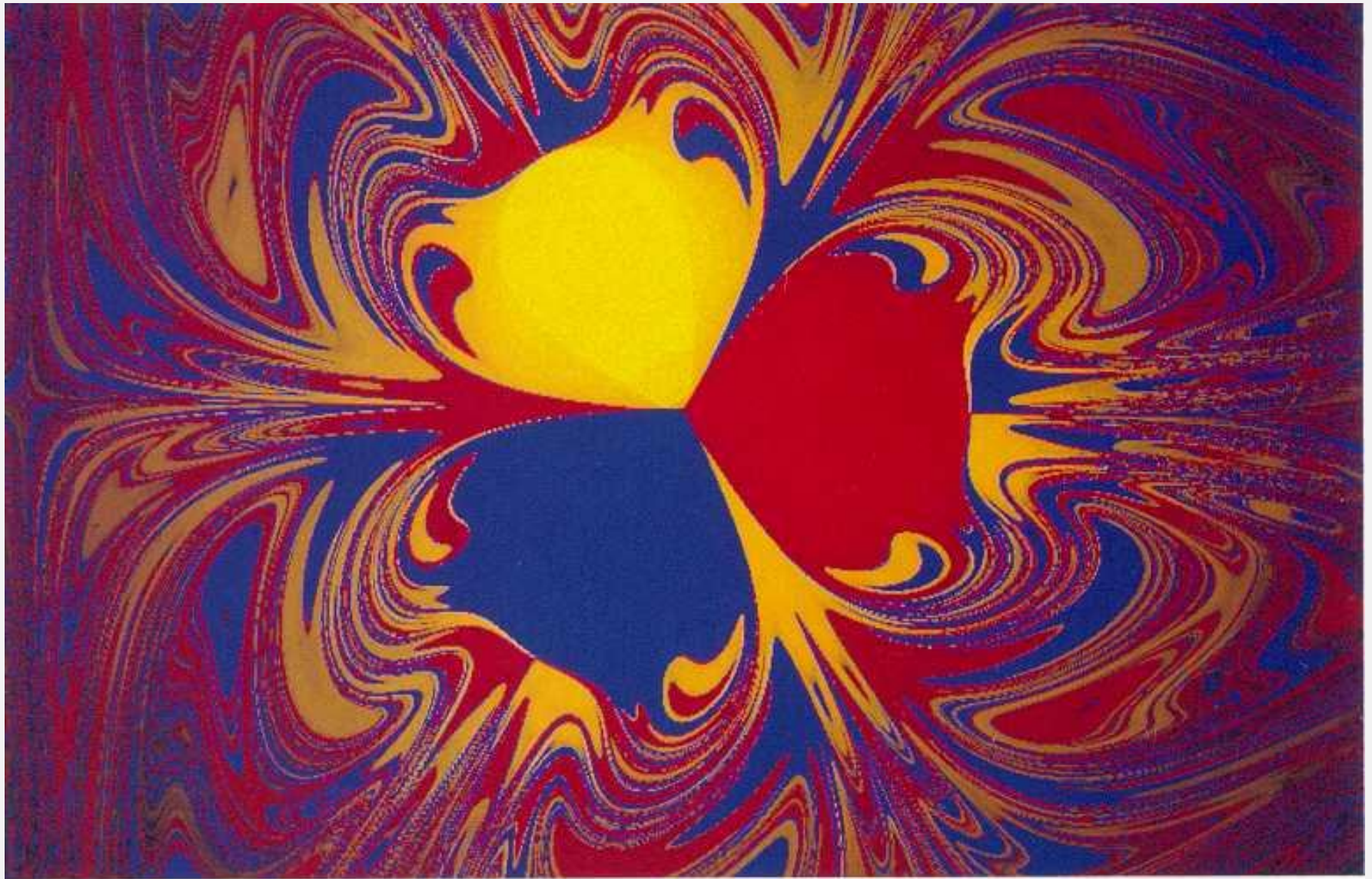


Plate 27: The pendulum experiment from section 12.8. The basins of attraction of the three magnets are colored red, blue, and yellow.

# Dinamica dei prezzi: modello della Ragnatela

Quantità richiesta al tempo  $t$  dai consumatori

$$Q^d = D(p) \quad \text{funzione di domanda}$$

Quantità che viene immessa sul mercato dai produttori

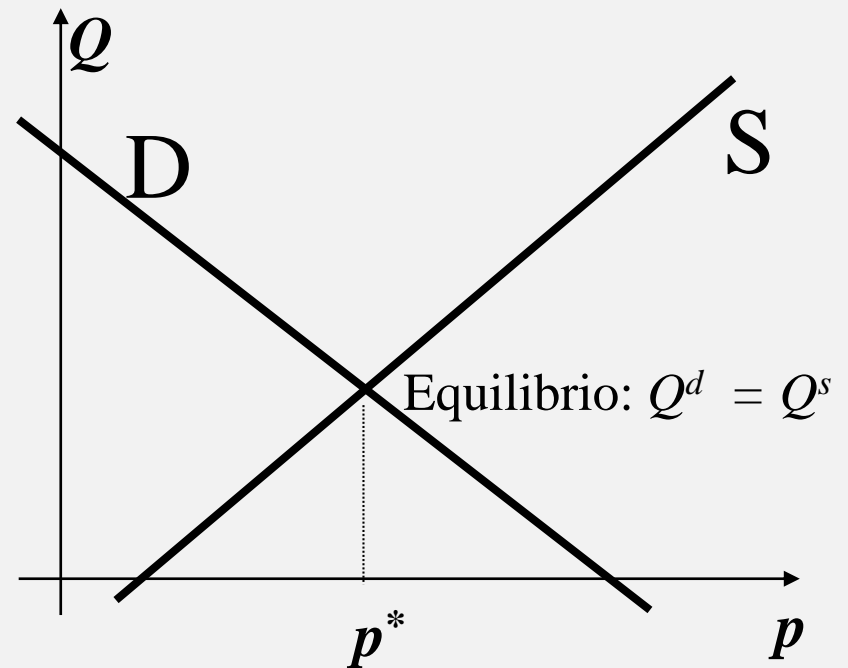
$$Q^s = S(p) \quad \text{funzione di offerta}$$

Esempio:

funzioni  $D$  e  $S$  lineari:

$$D(p) = a - b p ; \quad S(p) = -c + d p$$

$a, b, c, d$  costanti positive



## Introduciamo il tempo.

Al tempo  $t$  i consumatori decidono in base al prezzo  $p_t$  osservato, ma la merce nel mercato al tempo  $t$  è stata prodotta in base a decisioni prese in un tempo precedente, perché la produzione richiede un certo lasso di tempo.

Sia  $\Delta t = l$  il tempo di produzione che intercorre fra decisione e immissione nel mercato

- I consumatori decidono la quantità da acquistare in base a  $p_t$
- I produttori decidono in  $t-l$  la quantità da immettere nel mercato al tempo  $t$  in base al prezzo atteso

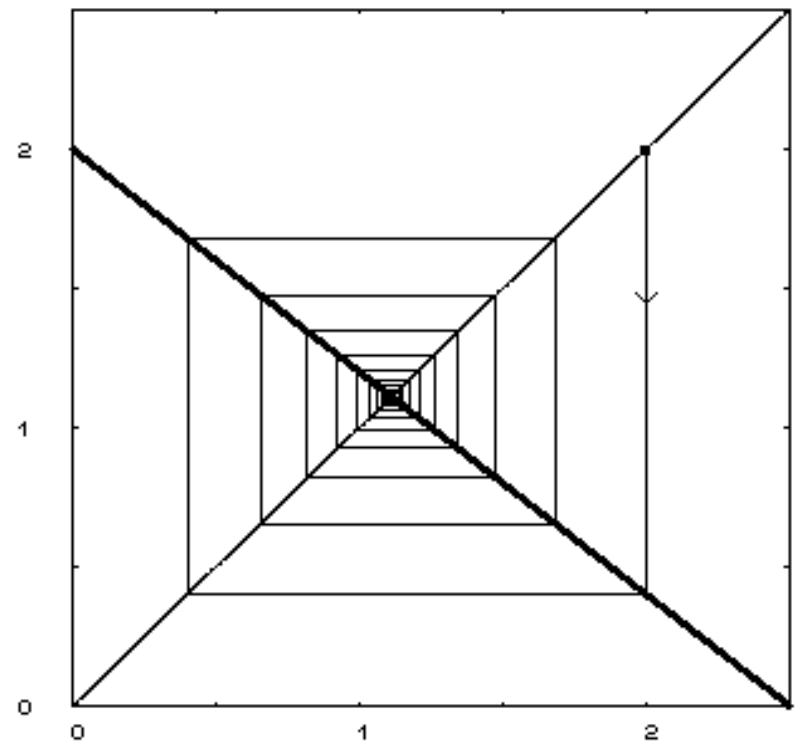
*Introduciamo aspettative statiche (o naive) :*  $p_t^{att} = p_{t-1}$

$$p_t = D^{-1}(S(p_{t-1})) = f(p_{t-1})$$

Con funzioni di domanda e offerta lineari:  $D(p) = a - b p$ ;  $S(p) = -c + d p$

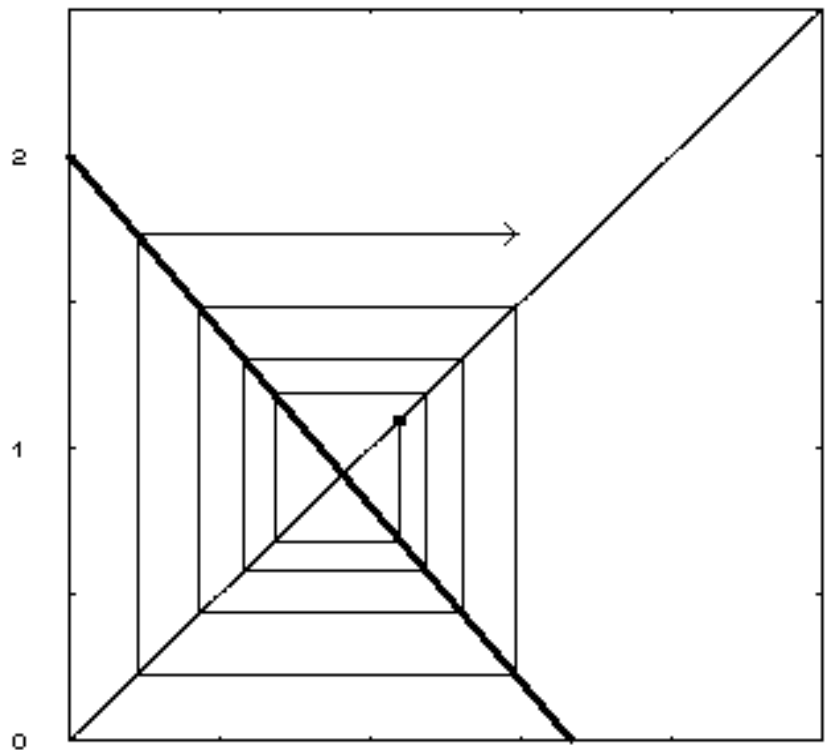
$$a - b p_t = -c + d p_{t-1}, \text{ da cui: } p_t = -\frac{d}{b} p_{t-1} + \frac{a+c}{b}$$

a= 1 b= 1 c= 1 d= .8

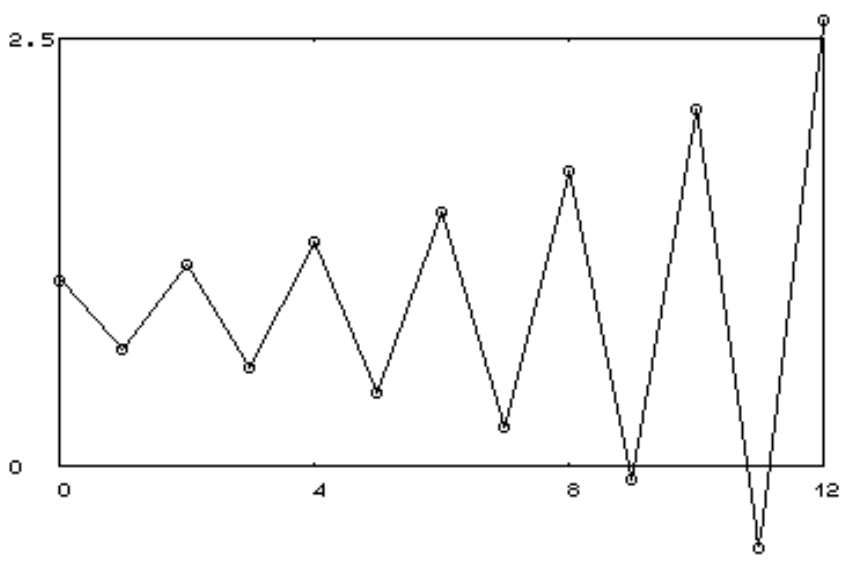
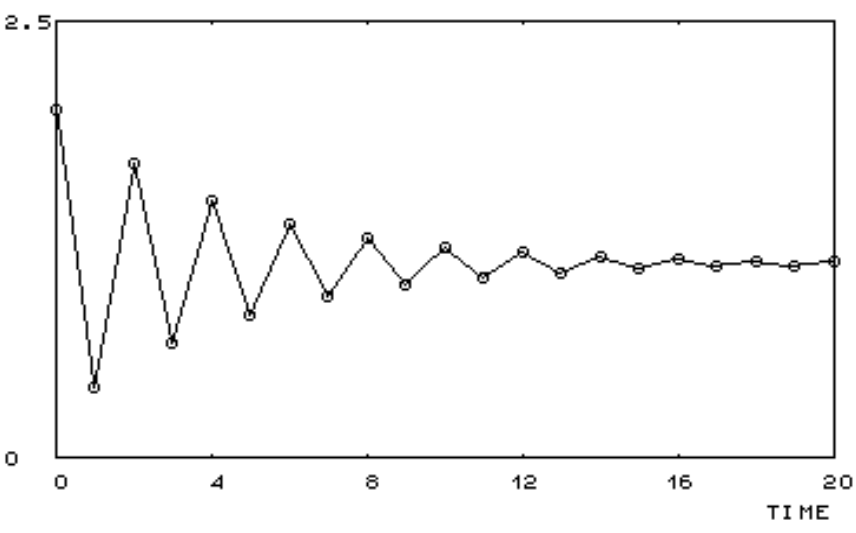


a= 1 b= 1 c= 1 d= .8 c.i. 2

a= 1 b= 1 c= 1 d= 1.2



a= 1 b= 1 c= 1 d= 1.2 c.i. 1.1



Funzione di offerta non lineare:

$$Q^S = S(p) = \arctan(\lambda(p-1))$$

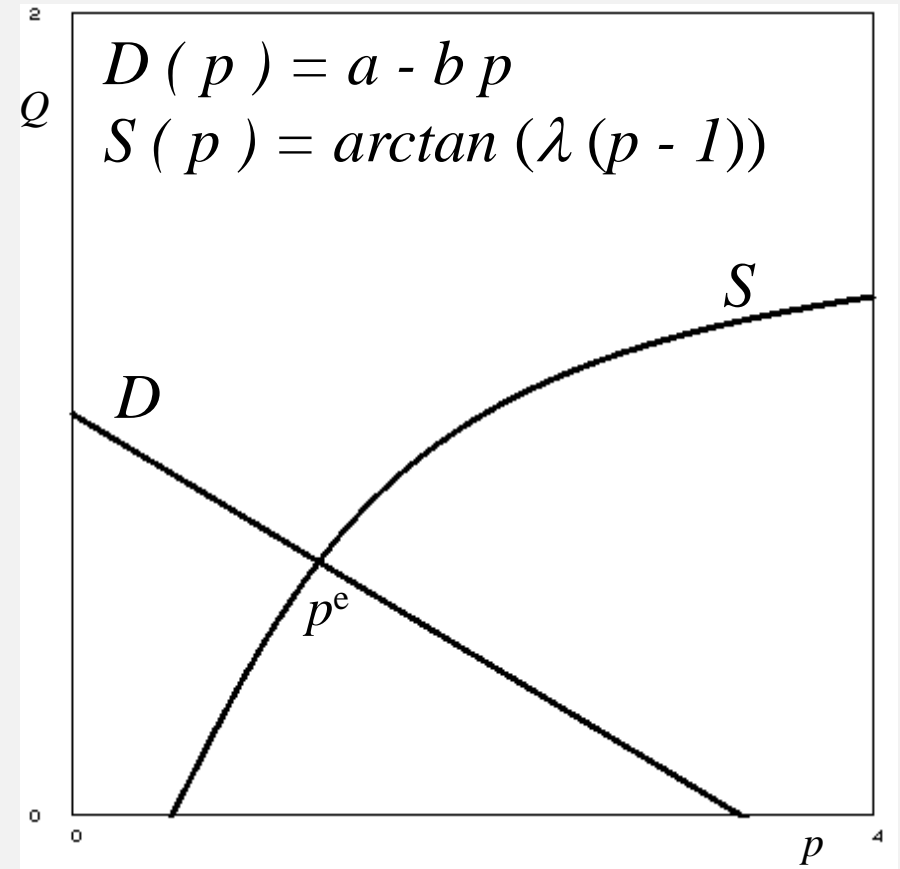
$$D(p_t) = S(p_{t-1}) \quad \text{diventa}$$

$$a - bp_t = \arctan(\lambda(p_{t-1}-1))$$

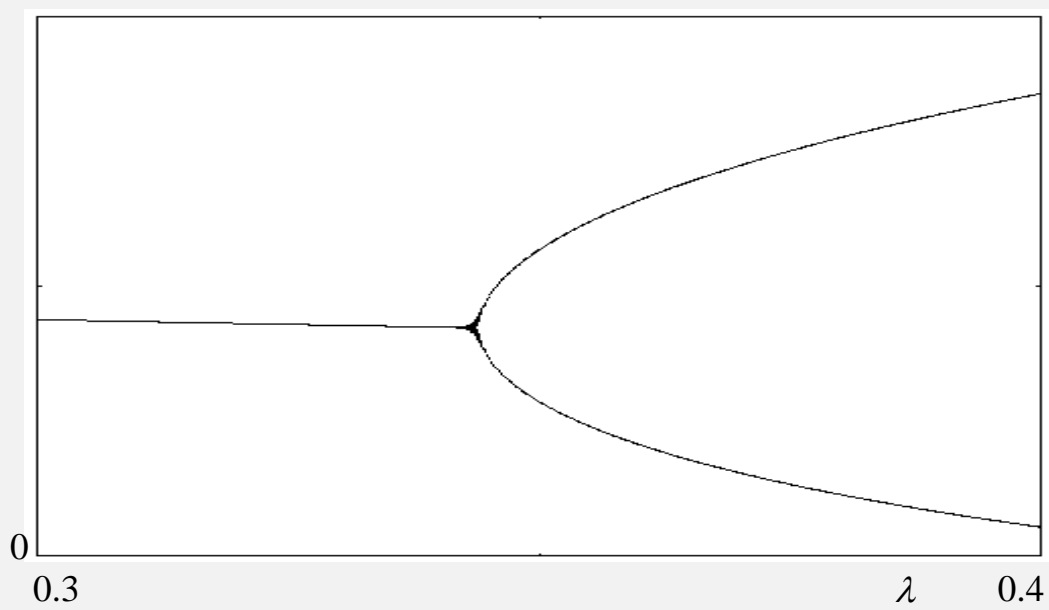
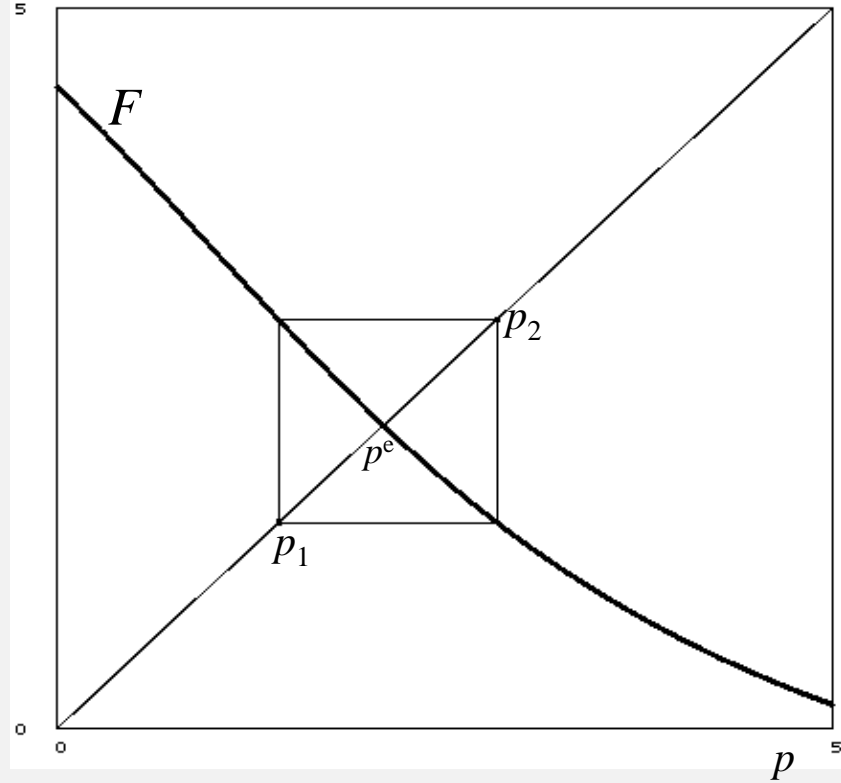
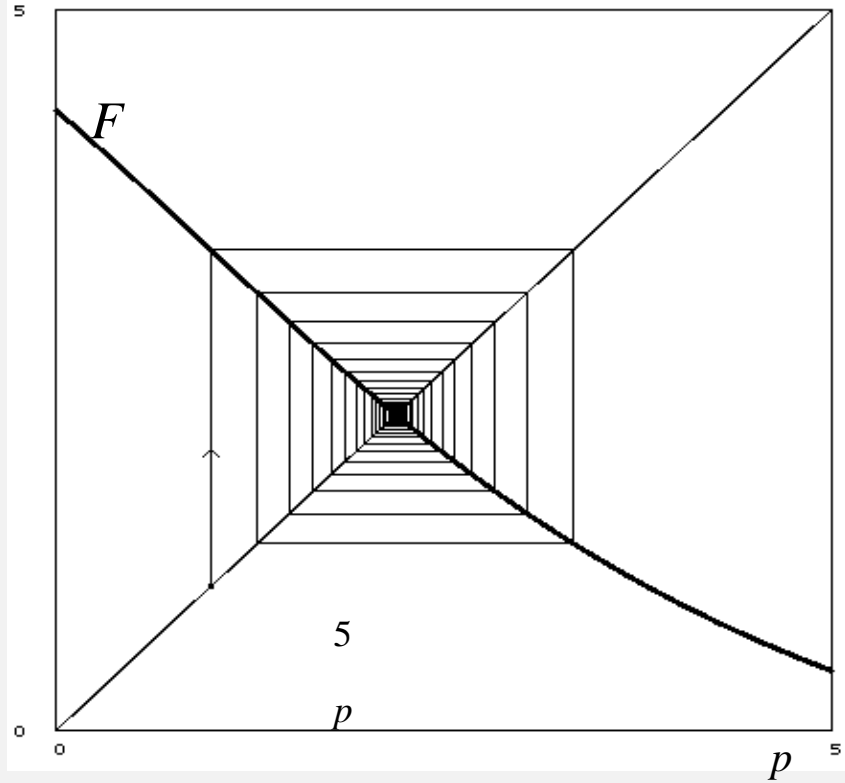
da cui si ottiene il modello dinamico

$$p_t = F(p_{t-1}) = [a - \arctan(\lambda(p_{t-1}-1))]$$

La mappa  $F(p)$  è monotona decrescente







# Aspettative adattive

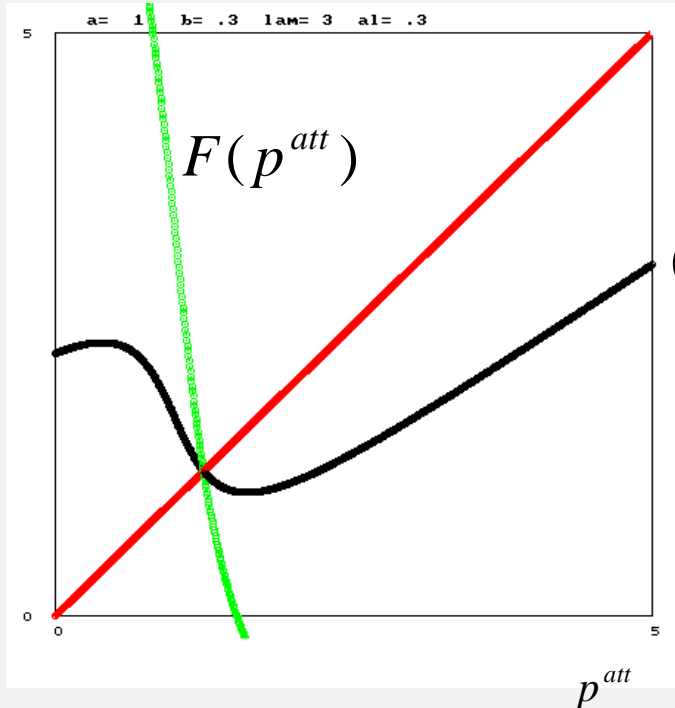
$$p_{t+1}^{att} = p_t^{att} + \alpha (p_t - p_t^{att}) \quad \text{con } 0 < \alpha \leq 1$$

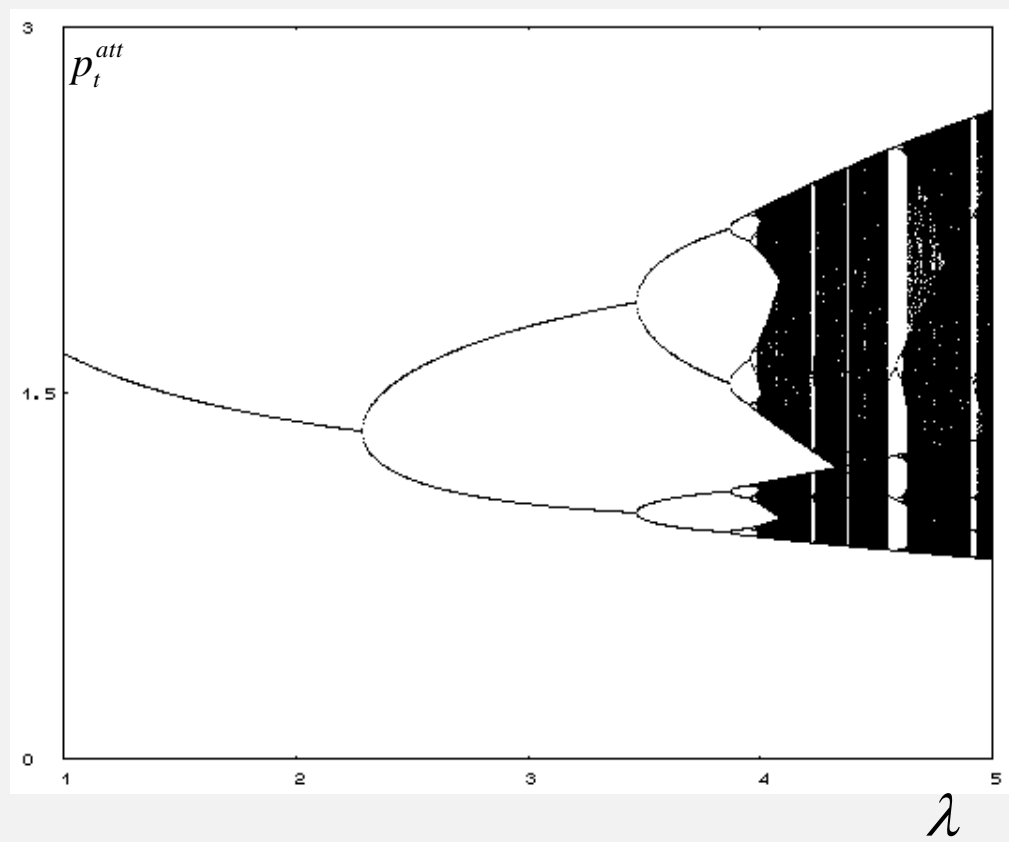
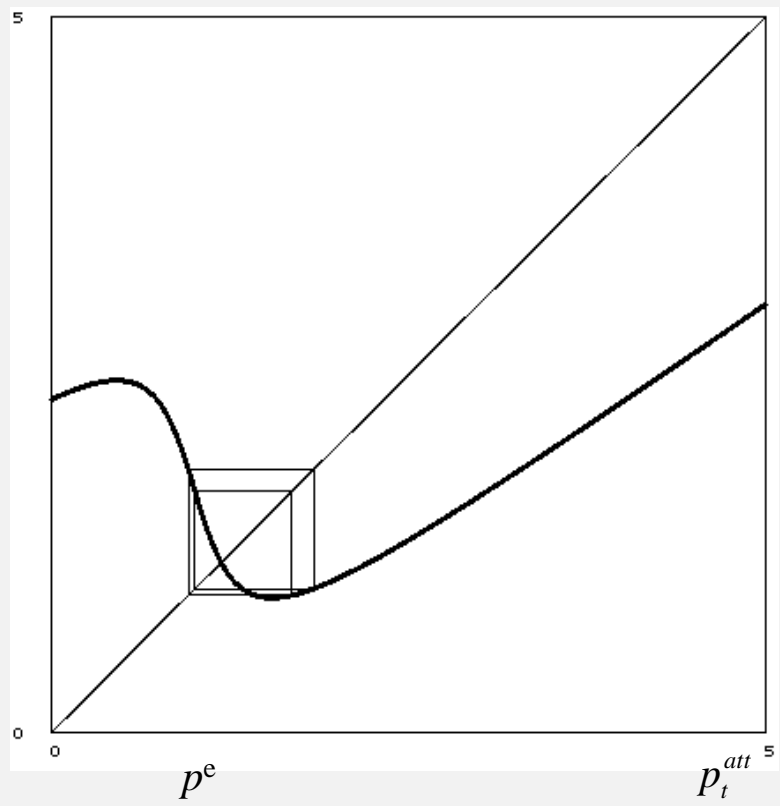
Inserendo:

$$p_t = F(p_t^{att}) \quad \text{mapping from beliefs to realizations}$$

nell'equazione delle aspettative adattive:

$$p_{t+1}^{att} = p_t^{att} + \alpha (F(p_t^{att}) - p_t^{att}) = (1 - \alpha) p_t^{att} + \frac{\alpha}{b} [a - \arctan(\lambda (p_t^{att} - 1))]$$





Un precursore: A.A. Cournot (1838) a Parigi, “*Récherches sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*”

La rivoluzione marginalista:

1871 - “*The Theory of Political Economy*” di W.S. Jevons a Londra;

1871- “*Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*” (*Principles of Economics*) di C.Menger a Vienna;

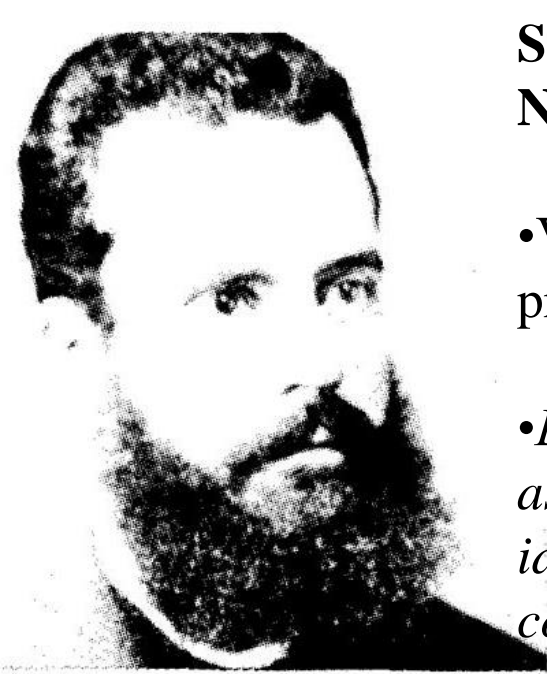
1874 - “*Eléments d'économie politique pure*” di L.Walras a Losanna.



Leon Walras (1834-1910)

**Massimizzare una funzione di utilità (di soddisfazione, “felicità” ecc.)**

Walras sostenne l’esistenza di una stretta analogia tra l’Economia le “scienze fisico-matematiche”. Il principio di minimizzazione permeava tutta la Fisica dell’epoca.



**Studia matematica e si laurea in ingegneria a Torino.  
Nel 1892 succede a Walras sulla cattedra di Losanna.**

•Vuole “disinquinare” le scienze sociali da politica e filosofia, prendendo come modello la Meccanica Razionale.

•*L'economia non abbia timore di diventare un sistema assiomatico-deduttivo, ipotizzando agenti e processi economici idealizzati, così come la fisica utilizza con grande profitto entità come i corpi rigidi, i fili inestensibili e privi di massa, i gas perfetti, le superfici prive di attrito...*

Vilfredo Pareto (1848-1923)

## **Le polemiche.**

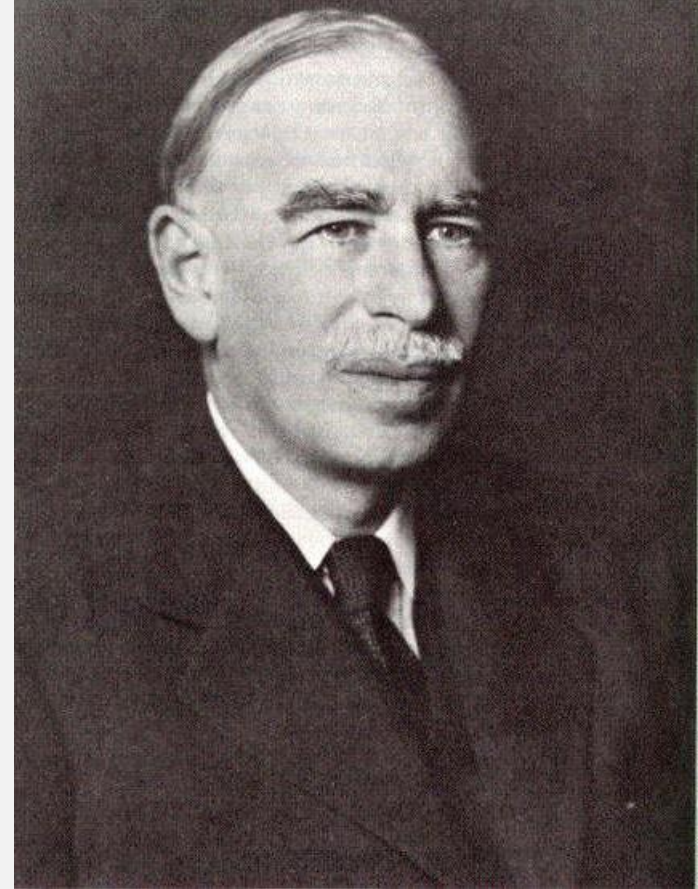
•E' possibile trasformare in quantitativa una scienza umana, ovvero una disciplina i cui procedimenti e le cui conclusioni coinvolgono pesantemente pregiudizi storici, culturali e politici?

•L'impiego della Matematica fornisce all'Economia una particolare autorevolezza, che rischia di trasformarsi in presunta oggettività e che comunque rende difficile l'individuazione dei suoi condizionamenti ideologici.

*Non basta semplicemente adattare i metodi e i ragionamenti della fisica alla modellizzazione dell'economia perché l'economia è una scienza morale.*

*Essa ha a che vedere con motivazioni, aspettative, incertezze psicologiche.*

*È come se la caduta della mela al suolo dipendesse dalle aspirazioni della mela, se per lei sia conveniente o meno cadere a terra, se il suolo vuole che essa cada, e se vi sono stati errori di calcolo da parte della mela sulla sua reale distanza dal centro del pianeta”*

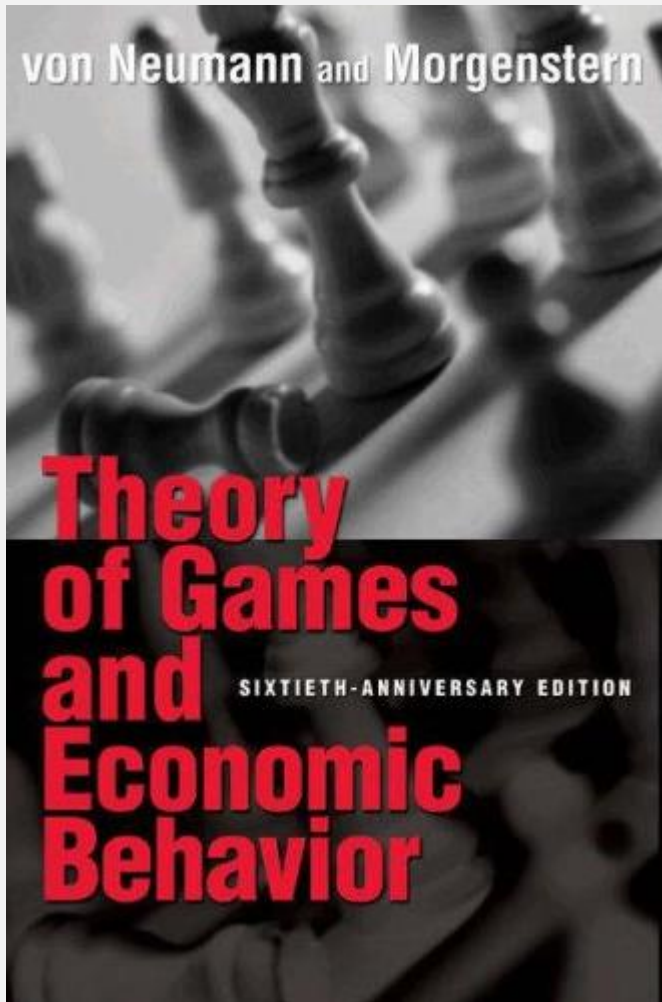


John Maynard Keynes (1883–1946)

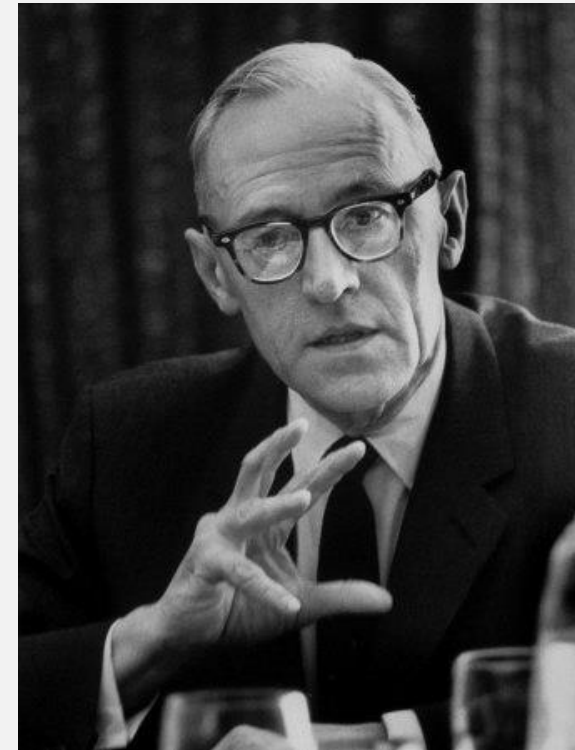
**Aggiungiamo:**

**come e quanto la mela si fa condizionare dal comportamento delle altre mele dello stesso albero o di alberi vicini, le aspirazioni e aspettative della mela, le informazioni che la mela ha, ecc.**

# Interazione strategica



**John (János) von Neumann**  
Budapest (Ungheria) 1903  
Washington (USA) 1957



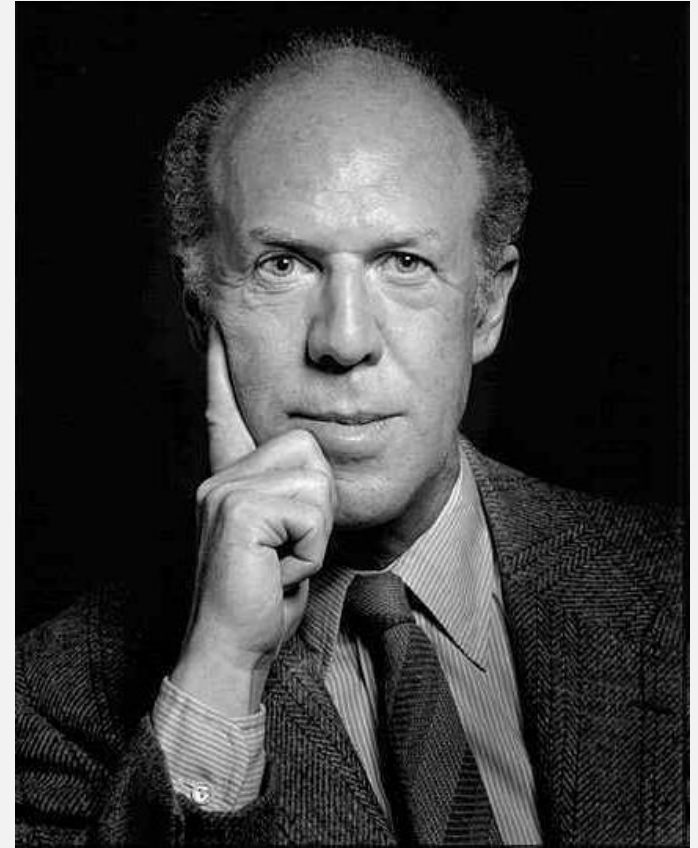
**Oskar Morgenstern**  
Görlitz (Germania) 1902  
Princeton (USA) 1977

Princeton, 1947

*The Theory of Value (1959)*

Nella prefazione Debreu scrive:  
*“la teoria del valore è trattata qui secondo  
gli standard di rigore dell’attuale scuola  
formalista di Matematica*

*Lo standard di rigore logico della  
matematica in economia è ormai la regola,  
non più l’eccezione”.*



Gerard Debreu (1921–2004)  
Premio Nobel per l’economia nel 1983



Ma lo stesso Debreu disse: *“La seduzione della forma matematica può diventare quasi irresistibile. Nel perseguimento di tale forma, può darsi che il ricercatore sia tentato di dimenticare il contenuto economico e di evitare quei problemi economici che non siano matematizzabili”*

Goodwin racconta... *“Un giorno mi capitò di dare un seminario davanti a un gruppo di colleghi, nel quale cercavo di dimostrare che era una buona cosa dar da mangiare ai disoccupati a un prezzo al di sotto del normale. Nel bel mezzo della mia esposizione venni interrotto da qualcuno che, opponendosi alla mia tesi, richiamò un teorema che, ricorrendo ai moltiplicatori di Lagrange, dimostra come un ottimo sociale implichi un prezzo unico per ciascun bene. Quest’esperienza mi ha indotto a cercare, per il resto della mia vita, di essere in grado di comprendere, almeno a livello dilettantistico, l’uso (e gli abusi) della matematica nell’analisi economica”*.

Da: Richard M. Goodwin *“Economia matematica: una visione personale”* in *Il mestiere di economista*. a cura di J.A. Kregel, Einaudi 1988

Dalla corrispondenza fra Walras e Poincaré

*“Ho pensato che all’inizio di ogni speculazione matematica ci sono delle ipotesi e che, perché questa speculazione sia fruttuosa, occorre, come del resto nelle applicazioni della Fisica, che ci si renda conto di queste ipotesi.*

*Per esempio, in Meccanica si trascura spesso l’attrito e si guarda ai corpi come infinitamente lisci. Lei guarda agli uomini come infinitamente egoisti ed infinitamente perspicaci. La prima ipotesi può essere accettata come prima approssimazione, ma la seconda necessiterebbe forse di qualche cautela.”*



Jules Henri Poincaré (1854–1912)

## Modelli con aspettative

In economia e nelle scienze sociali lo stato attuale consegue sì da quelli del passato, ma dipende anche dalle *decisioni degli individui che lo compongono, decisioni che sono influenzate dalle aspettative che essi hanno sul futuro.*

$$x_{t+1} = f( x_{t+1}^{(e)} ) \quad \text{oppure} \quad x_t = f( x_{t+1}^{(e)} )$$

Le aspettative degli agenti sul futuro si riflettono sul modo in cui i sistemi evolvono: mappings from beliefs to realizations.

Gli agenti economici dei modelli devono essere dotati della capacità fare congetture sulla distribuzione di probabilità dei possibili stati futuri dell'Economia

## **Ipotesi delle aspettative razionali (Muth, 1961, Lucas, 1972)**

Gli agenti economici sono in grado di prevedere correttamente il futuro dei sistemi che studiano, così come un fisico conosce le leggi della natura.

$$x_{t+1}^{(e)} = x_{t+1}$$

Così nasce l'agente economico rappresentativo razionale

## **Aspettative razionali e caos deterministico. Una evidente antinomia**

*Se si parte da un modello con aspettative razionali e si scopre che esso genera caos deterministico, allora le previsioni non possono essere razionali (cioè perfette) per definizione di dinamiche caotiche.*

Un corollario che contraddice un'ipotesi del teorema!

Benhabib, Day (1982) “A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 37-55.

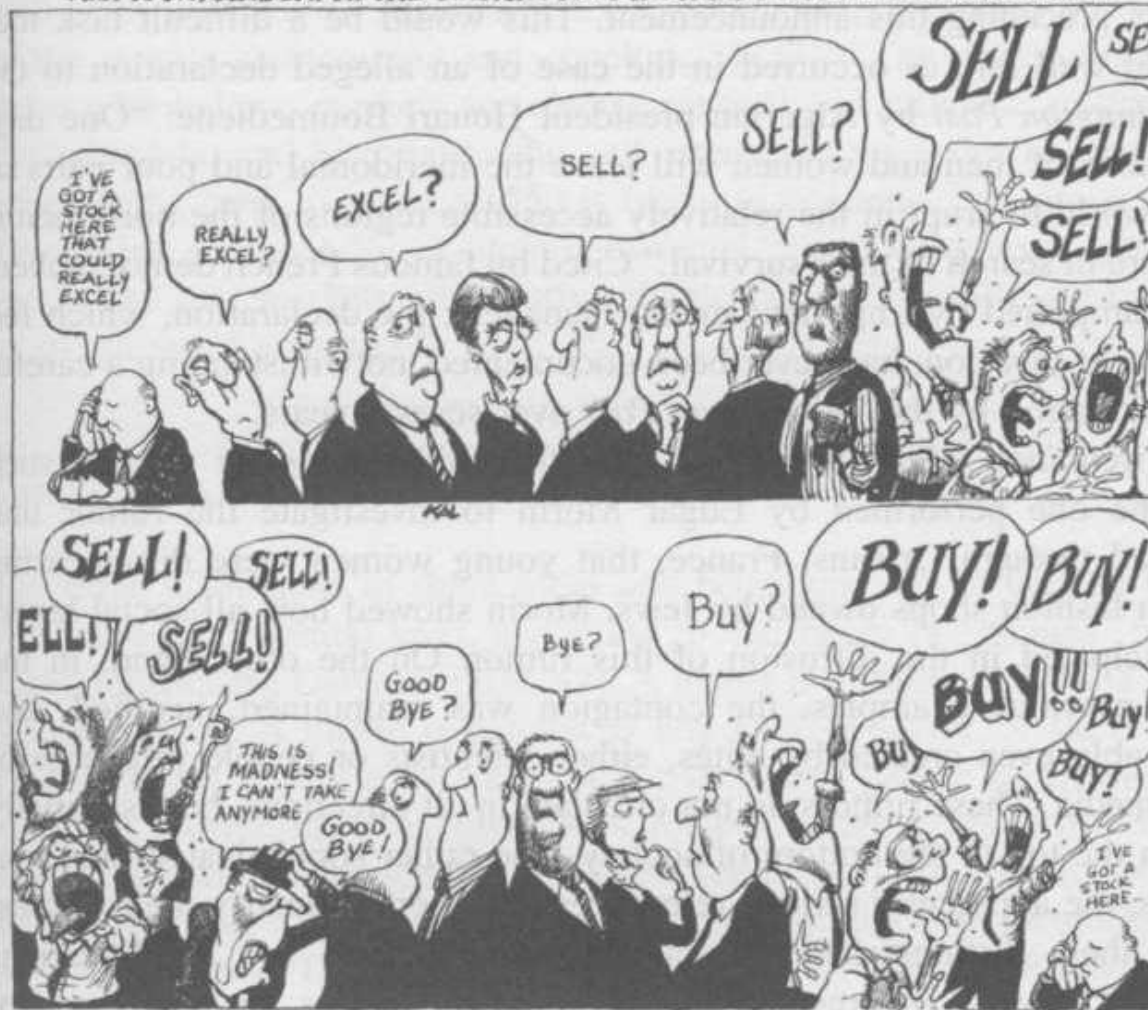
Boldrin, Montrucchio. (1986) “On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths.” *Journal of Economic Theory* 40: 26—39.

Grandmont, J.M. (1985) “Endogenous Competitive Business Cycles” *Econometrica* 53: 995—1045.

# KAL

KAL  
BALTIMORE SUN  
Baltimore  
USA

JUST A NORMAL DAY AT THE NATION'S MOST IMPORTANT FINANCIAL INSTITUTION...



CARTOONISTS & WRITERS SYNDICATE <http://CartoonWeb.com>

FIG. 4.3. Cartoon of the impact of rumors in stock market behavior taken from the front page of *The Economist*, November 1–7, 1997, commenting on the turmoil following the 7% loss of October 27, 1997 on the DJIA. Creation of KAL.

Identifichiamo due categorie di investitori:  
*fondamentalisti e chartisti*

## MODELLO CON FUNZIONI LINEARI

$$P_{t+1} = P_t + \gamma [D_t^C + D_t^F] \quad D = \textit{eccesso di domanda}$$

- Comportamento dei FONDAMENTALISTI:

$$D_t^F = \alpha (F - P_t) \quad \alpha > 0$$

- Comportamento dei CHARTISTI:

$$D_t^C = \beta (P_t - F) \quad \beta > 0$$

Cosa succede al passare del tempo al prezzo del titolo?

$$P_{t+1} = P_t + \gamma [\beta (P_t - F) + \alpha (F - P_t)]$$

Occorre identificare il **punto fisso o stato stazionario (P\*)** e successivamente verificarne la **stabilità**.

$$P_{t+1} = P_t = P^* \implies P^* = F$$

Il punto fisso è il valore Fondamentale.

### **Stabilità**

$$P_{t+1} = f(P_t) = (1 + \gamma\beta - \gamma\alpha) P_t - \gamma\beta F + \gamma\alpha F$$

Modello lineare, condizione per la stabilità :

$$-1 < (1 + \gamma\beta - \gamma\alpha) < 1$$



■ I prezzi CONVERGONO quando:

$$0 < (\alpha - \beta) < 2 / \gamma$$

Cioè i fundamentalisti predominano, ma non eccessivamente

■ I prezzi DIVERGONO quando una delle seguenti condizioni si verifica:

$$1 + \gamma(\beta - \alpha) > 1$$

$$\beta > \alpha$$

I chartisti sono più reattivi dei  
fundamentalisti (dominano il mercato)

$$1 + \gamma(\beta - \alpha) < -1$$

$$(\alpha - \beta) > 2 / \gamma$$

I fundamentalisti sono *troppo*  
più reattivi dei chartisti

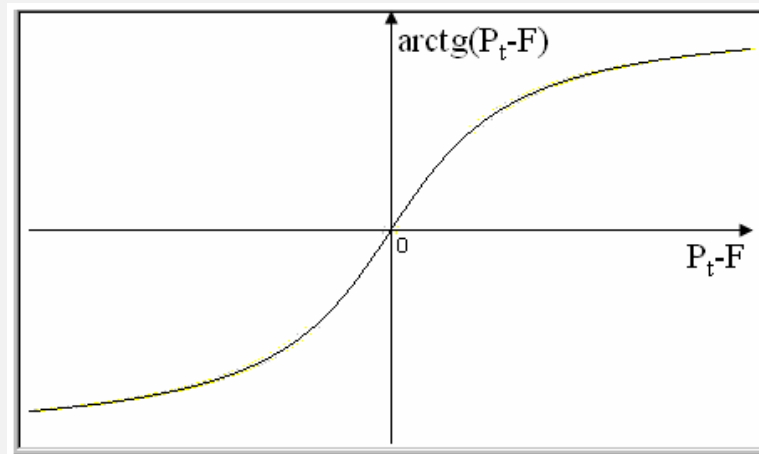
# MODELLO CON CHARTISTI PRUDENTI

- Comportamento dei FONDAMENTALISTI:

$$D_t^F = \alpha (F - P_t) \quad \alpha > 0$$

- Comportamento dei CHARTISTI:

$$D_t^C = \beta \arctan (P_t - F) \quad \beta > 0$$



Equazione di evoluzione del prezzo:

$$P_{t+1} = f(P_t) = P_t + \gamma [\beta \arctg(P_t - F) + \alpha (F - P_t)]$$

Punto fisso  $P_{t+1} = P_t = F$

Stabilità:  $-1 < f'(F) < 1$

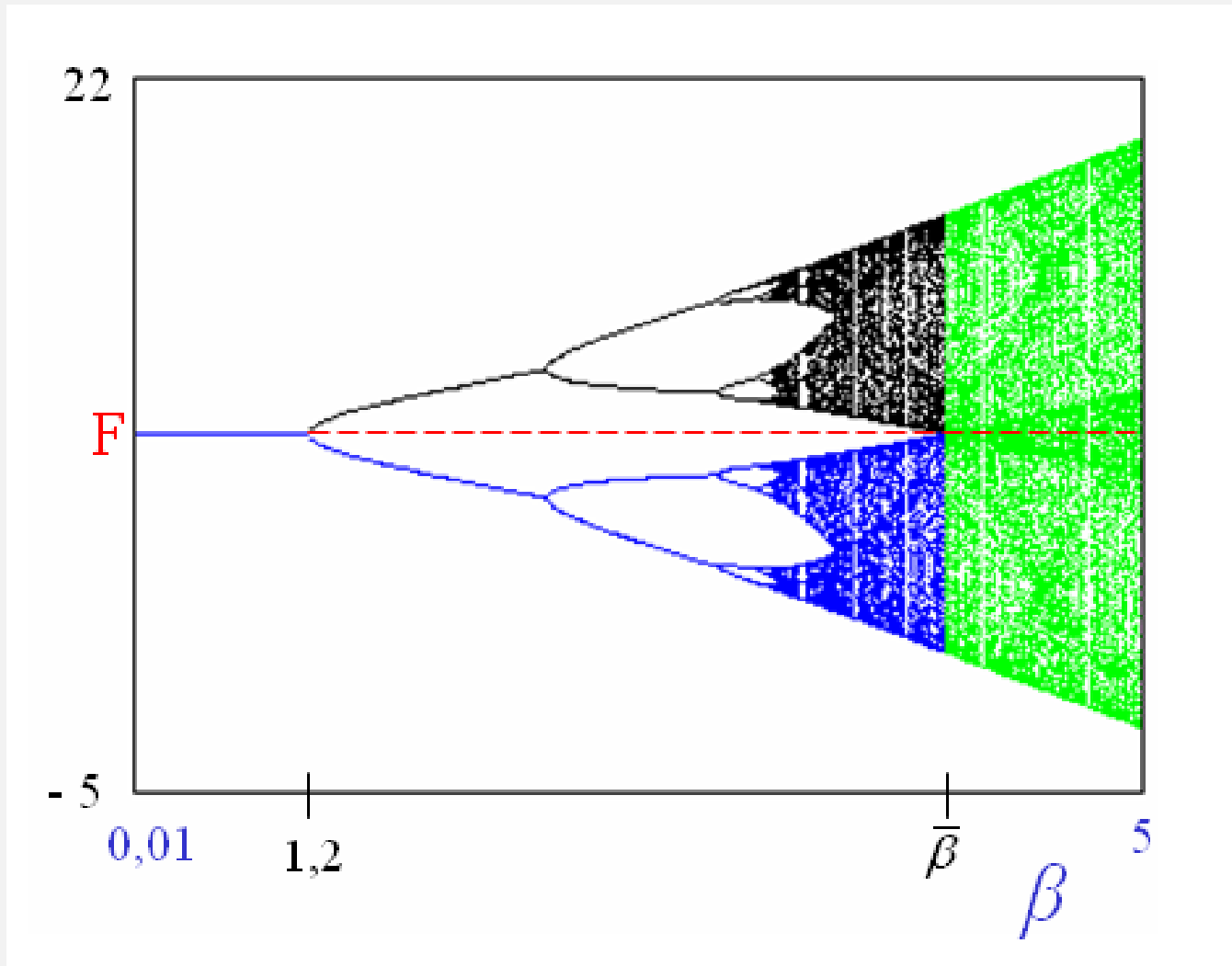
$$1 + \gamma(\beta - \alpha) > 1$$

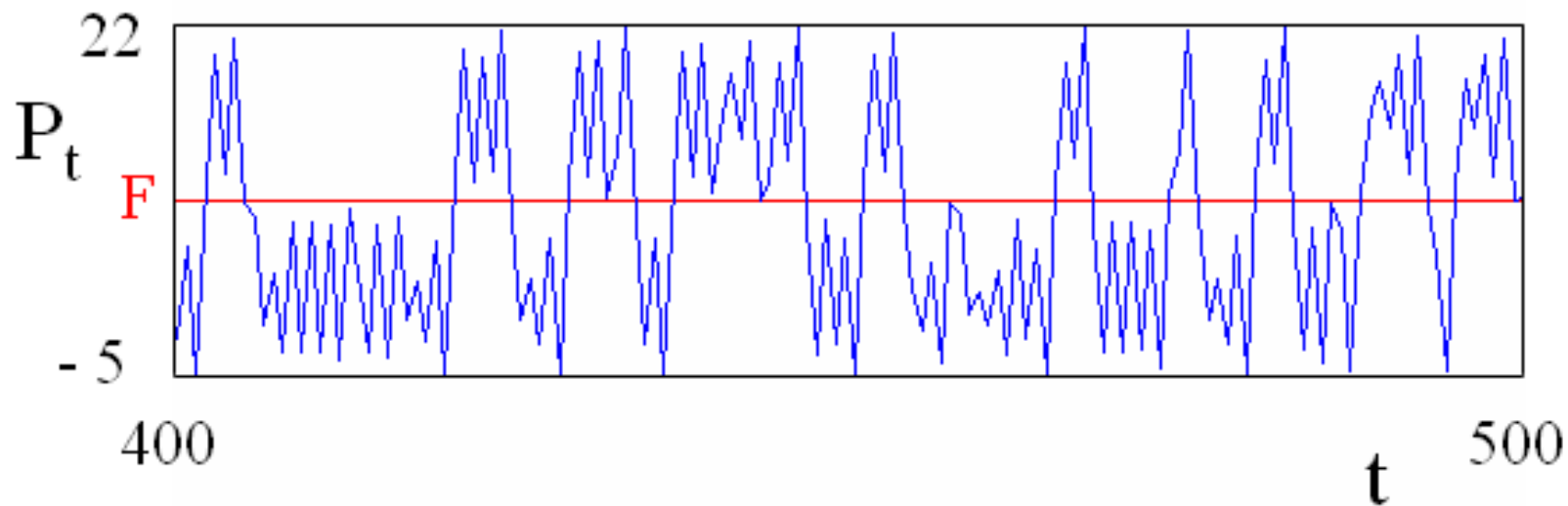
$$\beta > \alpha$$

$$1 + \gamma(\beta - \alpha) < -1$$

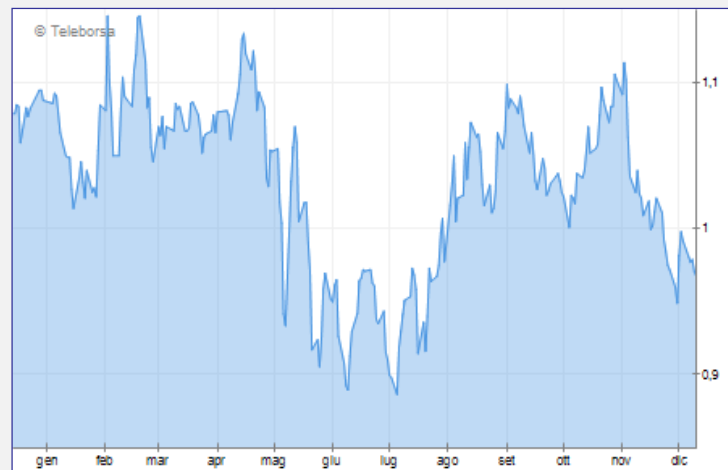
$$(\alpha - \beta) > 2/\gamma$$

Cosa succede quando il prezzo Fondamentale è instabile?





Indice FTSE MIB



Telecom Italia

# Polemica riaccesa dall'attuale crisi economica:

come può una scienza (fondata su metodi matematici) non prevedere, non accorgersi di quello che sta succedendo?

Benedetto XVI

Angelus di inizio anno 2010:

**«Il futuro è nelle mani di Dio,  
non di maghi e economisti».**



Carl Chiarella “What’s beyond?” in *Lettera Matematica Pristem* (2010).



Ogni cambio di paradigma economico porta anche un cambio nel tipo di modellistica. Negli anni 30 le idee keynesiane soppiantano il punto di vista classico perché indicato come responsabile della grande crisi del '29.

Il paradigma neoclassico (ipotesi di agente economico razionale e mercati efficienti) sostituisce il punto di vista keynesiano accusato di essere inefficace nell'affrontare la stagnazione economica degli anni 70. È ancora troppo presto per dire se l'attuale crisi economica avrà lo stesso profondo impatto sulle ipotesi che stanno alla base dei modelli economici.

Chiarella conclude con la frase: *viviamo tempi interessanti*

Ideogramma cinese per la parola *crisi*

Composta dai due ideogrammi

*wei* (pericolo) e *ji* (opportunità)



Per chi fosse interessato, altro materiale divulgativo sui sistemi dinamici si trova nella parte divulgativa della mia pagina web:

<http://www.mdef.it/who-is-who/the-core-research-group/gian-italo-bischi/selected-publications/popularization-expository/>