PIEGHE ORIGAMI vs RIGA E COMPASSO

Vogliamo confrontare le costruzioni che si ottengono utilizzando le pieghe della carta con quelle ottenute mediante l'uso di riga e compasso.

Per fare ciò, elenchiamo le pieghe "ammesse" nelle costruzioni, che sono date da un insieme di assiomi creati dai professori Huzita e Scimemi negli anni 90'.

ASSIOMI DELLE PIEGHE ORIGAMI (U. Huzita e B. Scimemi)

- A1: si può piegare una retta per due punti P e Q.
- A2: si può piegare un punto P su di un punto Q ottenendo come piega l'asse del segmento PQ.
- A3 : assegnate due rette, r ed s, è possibile piegare r su s.
- A4 : assegnati un punto P e una retta r, si può piegare la retta per P perpendicolare ad r.
- A5 : assegnati due punti, P e Q, e una retta r, si può piegare (se esiste) una retta per P che porti Q su r .
- **A6 : assegnati due punti, P e Q, e due rette, r ed s, si può piegare (se esiste) una retta che porti contemporaneamente P su r e Q su s.**
- A7 : assegnato un punto P e due rette, r ed s, è possibile piegare una retta che porti P su r e sia contemporaneamente ortogonale ad s. (di H. Hatori).

Alcuni assiomi sono paragonabili alle regole di costruzione riga-compasso della geometria euclidea (per esempio l'asse di un segmento AB si può ottenere utilizzando A2 o puntando il compasso prima in A e poi in B, con apertura pari alla lunghezza di AB e tracciando due circonferenze. La retta che unisce i due punti di intersezione è l'asse del segmento).

La novità delle costruzioni origami è data però dall'assioma O6. Dal **punto di vista geometrico,** questo assioma permette di ampliare le costruzioni che si ottengono con riga e compasso (per esempio è proprio questa piega che permette di costruire un ettagono regolare!).

Cominciamo con il dare un'interpretazione geometrica interessante di tale assioma: la piega indicata in O6 equivale a trovare la tangente comune a due parabole!

Per convincerci di questo cominciamo a mostrare che piega otteniamo quando portiamo un punto P su una retta r. Utilizza lo spazio qui sotto per seguire la costruzione.

Portiamo P sulla retta r, ottenendo la piega s; tale piega è l’asse del segmento PP’ e quindi, per definizione, tutti i punti di s equidistano da P e P’.

Se tracciamo ora la perpendicolare r’ ad r , passante per P’, questa intersecherà s in Q. Dunque Q ha la stessa distanza da P (distanza punto-punto) e dalla retta r (distanza punto-retta), perciò Q appartiene alla parabola $\mathbb{C}$ di fuoco P e direttrice r. Inoltre si può mostrare che è l’unico punto della retta con questa caratteristica. Ne deduciamo che s è una retta tangente alla parabola $\mathbb{C}$.

L’assioma allora permette di costruire una retta tangente comune a due parabole.

Vediamo ora cosa comporta, dal **punto di vista algebrico,** la scelta delle regole di costruzione.

E’ facile convincersi che, mentre intersecare rette e circonferenze (come nelle costruzioni euclidee) corrisponde algebricamente a risolvere successioni di equazioni di primo e secondo grado, trovare la tangente comune ad una parabola corrisponde, in generale, a risolvere equazioni di terzo grado.

Vediamone un esempio.

Cerchiamo la tangente comune alle parabole: $2y=x^2$ e $y^2=-4x$.

Intersechiamo le parabole con la generica retta $y=mx+q$ ottenendo:

$$x^2-2mx-2q=0 \qquad \text{e} \qquad m^2x^2+2(mq+2)x+q^2=0.$$

Ponendo il $\Delta=0$ in entrambe le equazioni risulta:

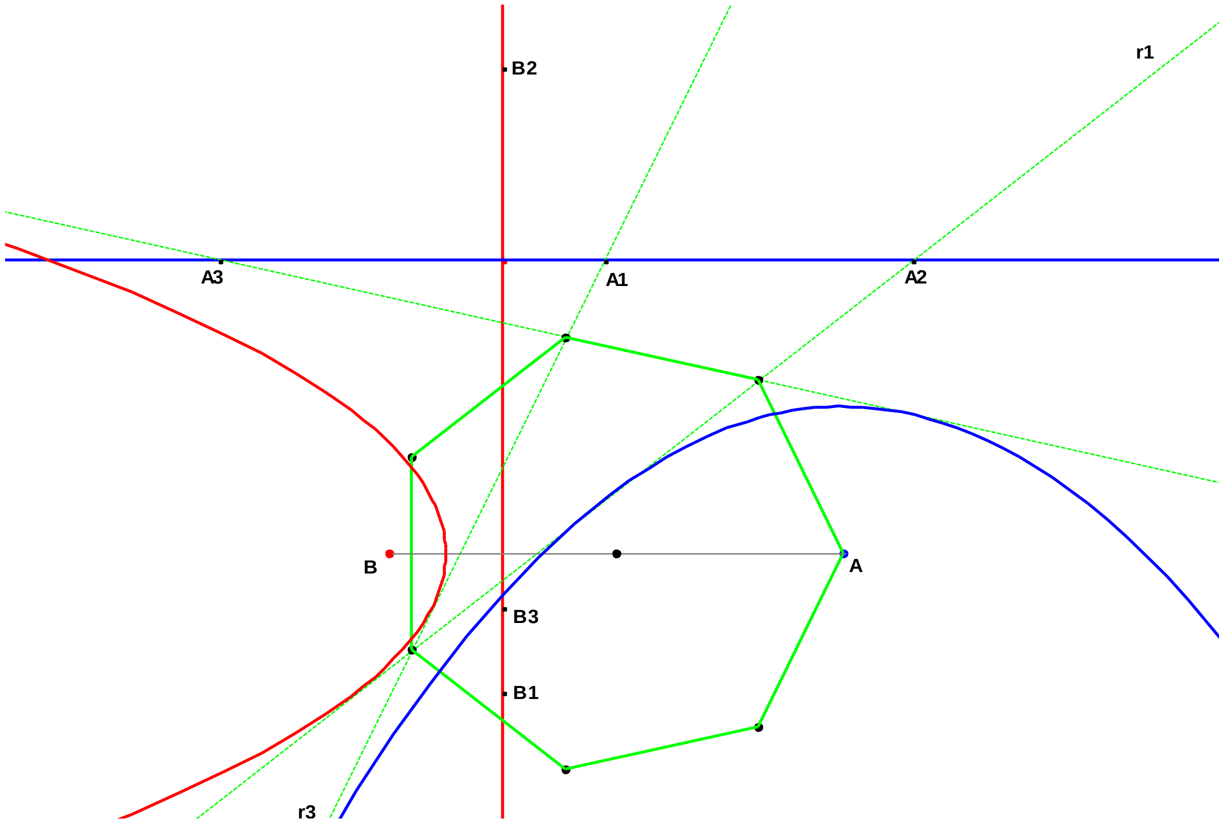
$$q=-m^2/2 \quad \text{e} \quad (mq+2)^2-m^2q^2=0.$$

Sostituendo q nella seconda equazione e semplificando abbiamo

$$m^3=2.$$

(esempio di equazione di terzo grado con 1 soluzione reale).

Nel disegno che segue l'esistenza di tre tangenti comuni a due parabole è stata utilizzata per costruire un ettagono regolare (costruzione di B. Scimemi).



Dunque l'assioma A6 è legato alla soluzione di equazioni di terzo grado. In effetti si dimostra che le costruzioni origami permettono di risolvere successioni di equazioni di primo, secondo e terzo grado.