Problem solving con la Geometria origami

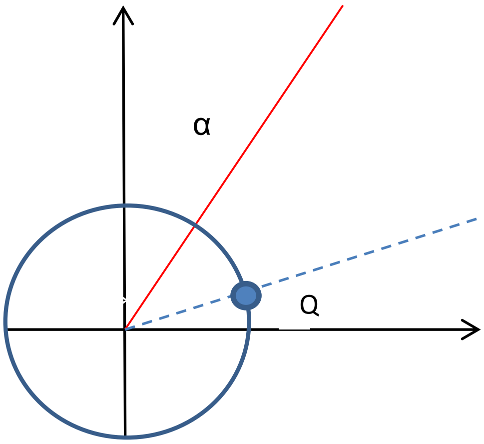
Laboratorio della Summer School

di San Pellegrino Terme 7-8–9 Settembre 2015

Scheda Attività : trisezione di un angolo qualsiasi

E' noto fin dai tempi antichi che, mentre è possibile trisecare angoli particolari (come quello retto), la trisezione di un angolo qualsiasi non si può ottenere utilizzando solo riga e compasso. Questo perché riga e compasso risolvono sequenze di equazioni di primo e secondo grado, mentre la trisezione è legata alla soluzione di un'equazione di terzo grado, come mostreremo ora.

Sia $\alpha=3\theta$ un angolo noto. Trisecare l'angolo significa trovare un angolo θ tale che $\alpha=3\theta$ o, equivalentemente, un punto Q di coordinate $Q(\cos(\theta), \sin(\theta))$.



Abbiamo:

$$\cos(3\theta)= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta)- \sin(2\theta)\sin(\theta)= \ldots = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

(completa tu i passaggi delle uguaglianze).

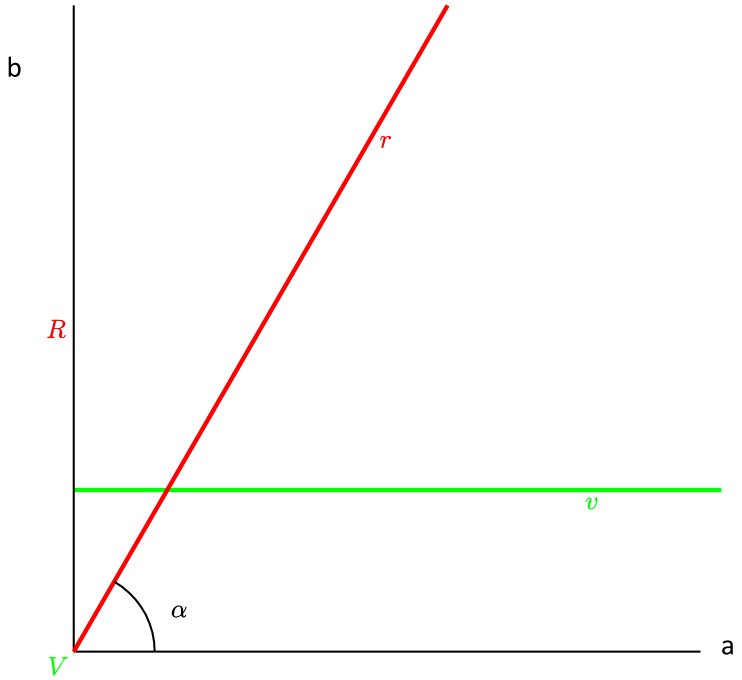
In definitiva avremo il coseno dell'angolo (e quindi potremo risalire all'angolo) risolvendo l'equazione di terzo grado:

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(\alpha)$$

Vogliamo allora mostrare come, utilizzando le pieghe origami e i loro assiomi, sia possibile ottenere la trisezione di un angolo α. Ovviamente tutta la costruzione può essere fatta origamicamente, ma, per evidenziare le ultime pieghe, le prime le immagineremo già fatte.

1) Nel disegno qui sotto (come nel foglio che ti è stato distribuito) è riportata la situazione di partenza dove, oltre all'angolo α trovi tracciate alcune altre rette e

alcuni punti.



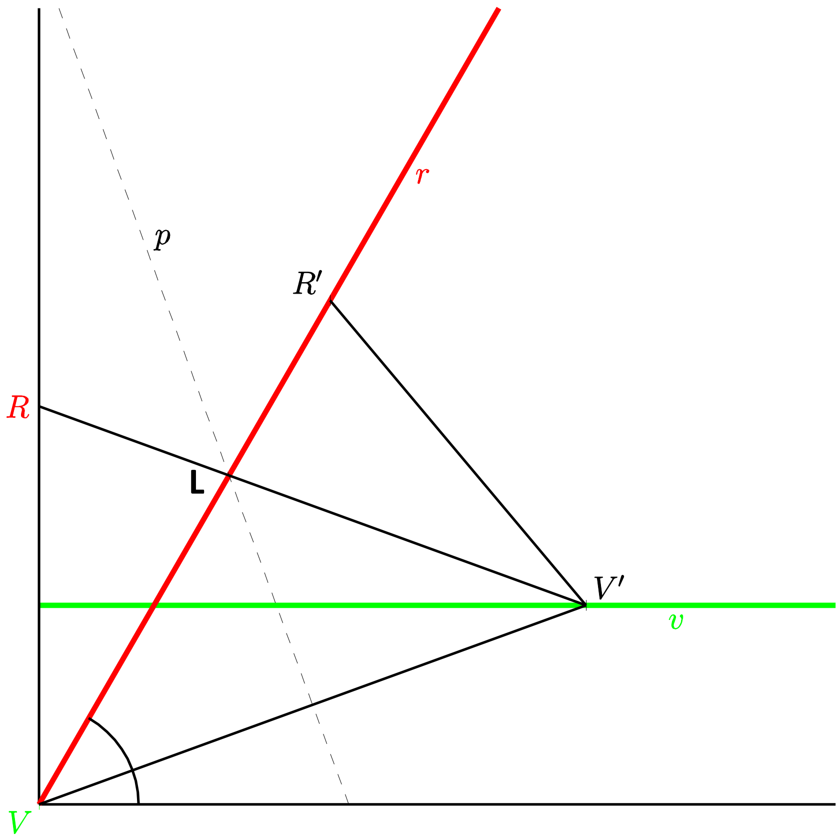
Spiega come sono state ottenute, stando particolarmente attento all'ordine delle pieghe e ai termini matematici per descriverli.

Passo 1. (angolo α)

Passo 2. (retta b)

Passo 3. (costruzione della retta v)

2) Utilizzando il nuovo assioma delle pieghe origami, traccia, sul foglio che ti è stato dato, una piega che porti il punto V sulla retta v e il punto R sulla retta r.
Otterrai una figura simile a questa:



a

Dimostra ora che l'angolo formato dalla retta a e dalla retta VV' è un terzo dell'angolo α.
Suggerimenti: (i) considera i triangoli VRV' (che tipo di triangolo è?) e VR'V';
(ii) considera il triangolo VV'L; (iii) ci sono rette parallele tagliate da trasversali!