Summer School
La matematica incontra le altre Scienze

San Pellegrino Terme 8–9-10 Settembre 2014

Laboratorio
Da Euclide ai pannelli solari piegando la carta

I Parte : Relazioni tra tetraedro regolare e cubo

Antonio Criscuolo Centro MatNet Università degli Studi di Bergamo

Sommario

Laboratorio presentato
al Convegno
Origami e didattica
Aprile 2014

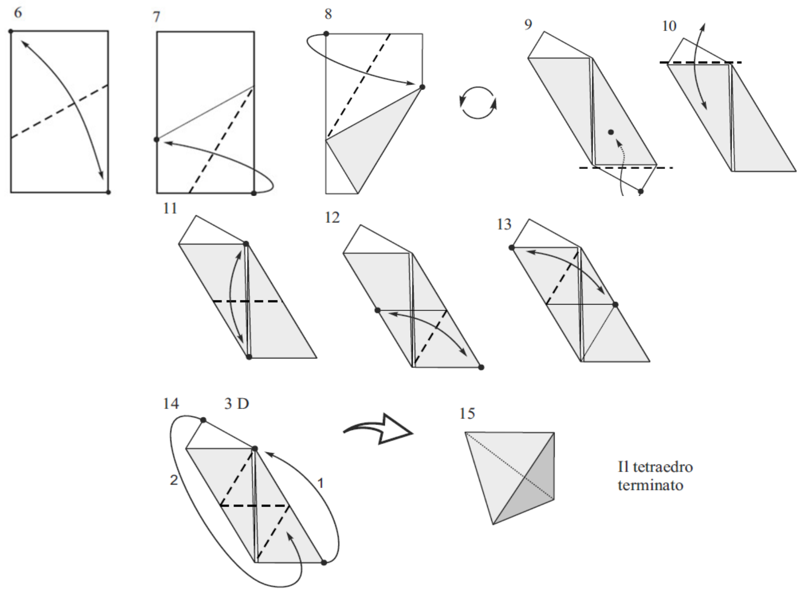
Secondo convegno italiano su
origami, dinamiche educative e didattica
11 - 13 aprile 2014 Bellaria (Rimini)

Laboratorio

Antonio Criscuolo Centro MatNet Università degli Studi di Bergamo
Francesco Decio BergamOrigami

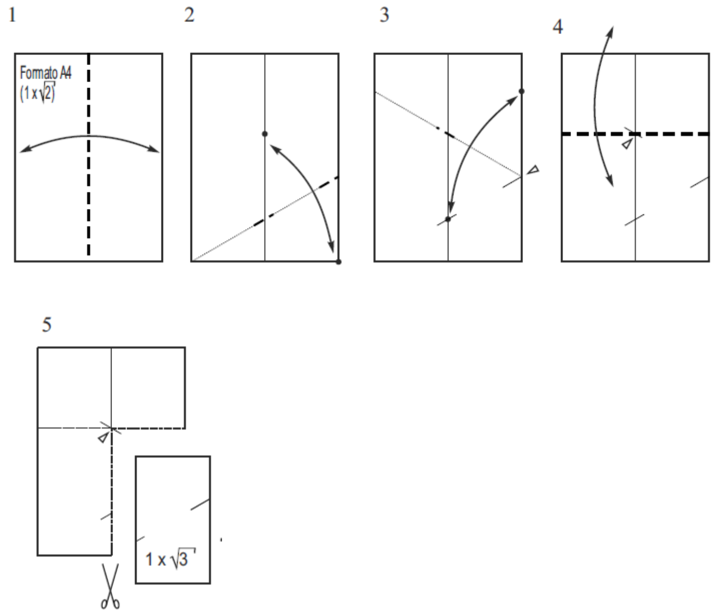
I. Da un particolare formato rettangolare della carta il più elementare dei poliedri regolari: costruzione del tetraedro.
II. Da un foglio A4 al formato $1 : \sqrt{3}$.
III. Dal foglio A4 i sei quadrati per costruire un cubo.
IV. La divisione dei lato di un foglio rettangolare in tre parti.
V. Costruzione del cubo con sei moduli quadrati.
VI. E' possibile inscrivere il tetraedro nel cubo?
VII. Quanti sono e che forma hanno gli spazi vuoti compresi tra cubo e tetraedro inscritto?
VIII. Dal foglio A4 ai quattro quadrati per costruire i quattro poliedri angolari compresi tra cubo e tetraedro inscritto.
IX. Il volume del tetraedro che parte è del volume del cubo?

Costruzione del tetraedro regolare

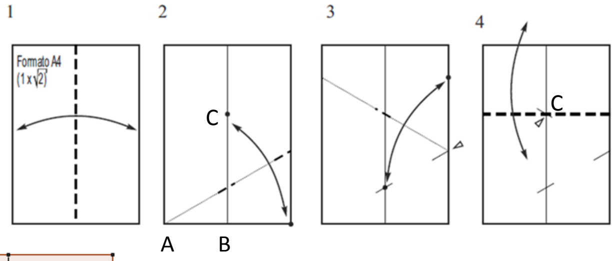


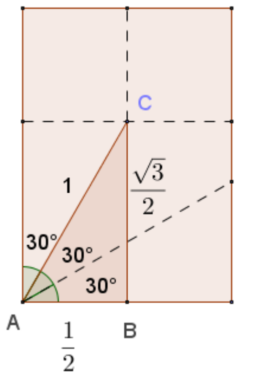
Diagrammi origami di Francesco Decio

Il foglio 1: $\sqrt{3}$ per costruire il tetraedro



Il foglio 1: $\sqrt{3}$ per costruire il tetraedro: dimostrazione

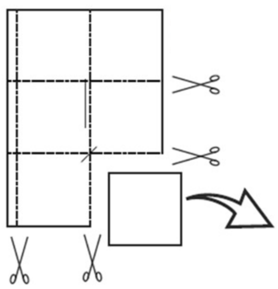




Triangolo ABC: metà triangolo equilatero

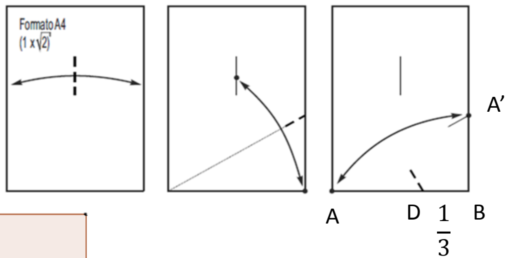
$$\frac{CB}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

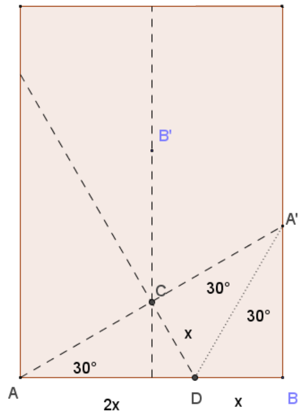
Dal foglio A4 sei quadrati per costruire le sei facce del cubo



6 quadrati di lato $\frac{1}{3}$ del lato lungo A4

La divisione in tre parti uguali del lato corto A4



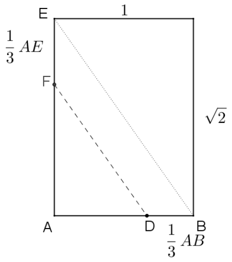


ACD = A'CD = A'BD triangoli rettangoli 30°-60°

AD = A'D = 2 CD = 2 DB

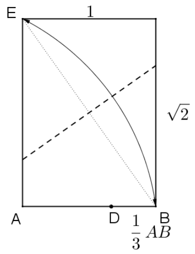
$$DB = \frac{1}{3}AB$$

Dalla divisione in tre parti uguali del lato corto A4 a quella del lato lungo

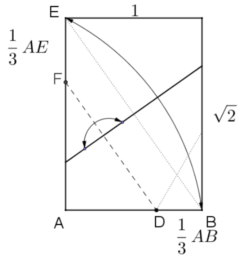


Si può utilizzare il teorema di Talete tracciando la parallela alla diagonale EB passante per D

Nella geometria della piegatura della carta la parallela ad una retta si traccia come perpendicolare alla perpendicolare



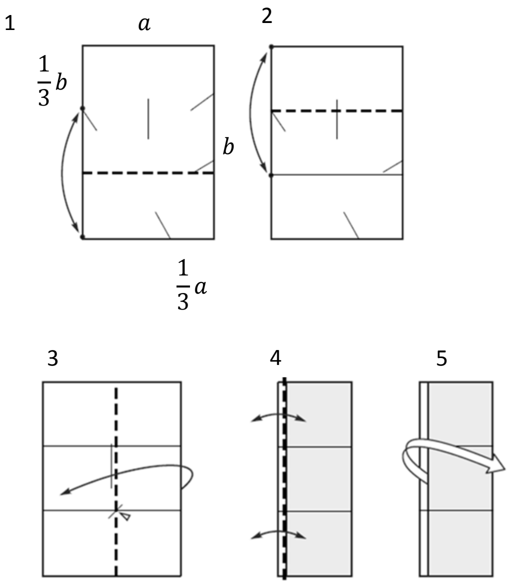
1. Sovrapporre B ad E per ottenere una piega perpendicolare alla diagonale EB



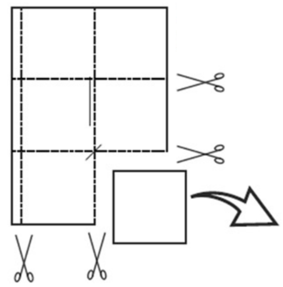
2. Sovrapporre la piega ottenuta a se stessa tenendo fisso il punto D

$$EF = \frac{1}{3}EA$$

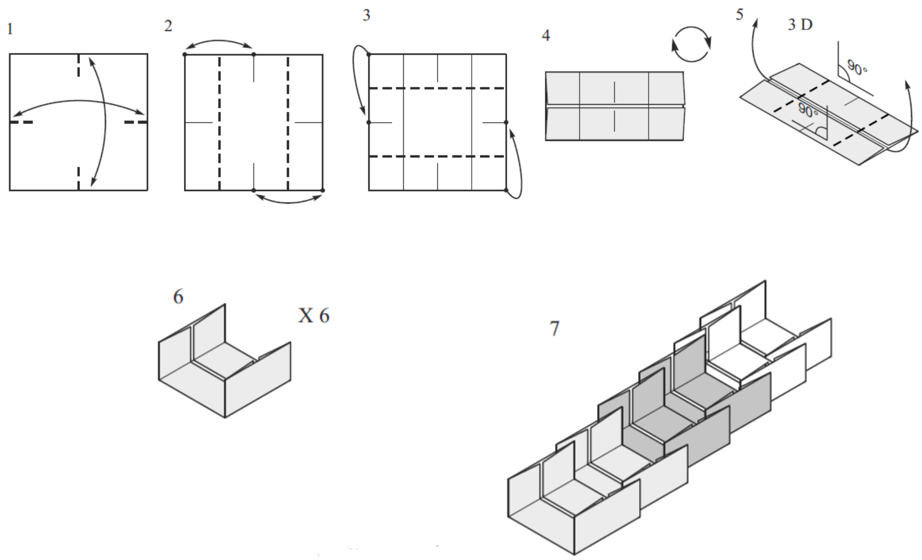
Dal foglio A4 sei quadrati per costruire le sei facce del cubo



6 quadrati di lato $\frac{1}{3}$ del lato lungo A4

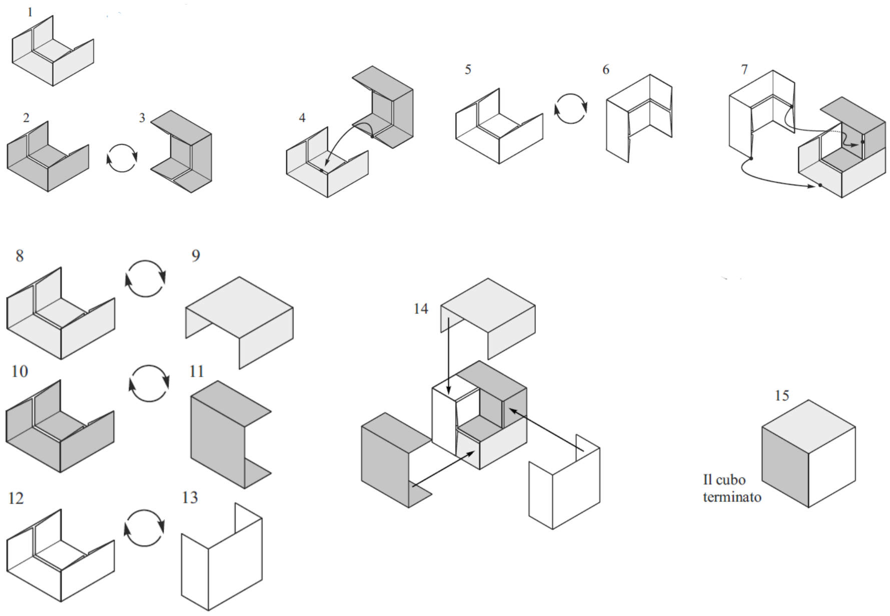


Il cubo con 6 moduli: piegatura del modulo

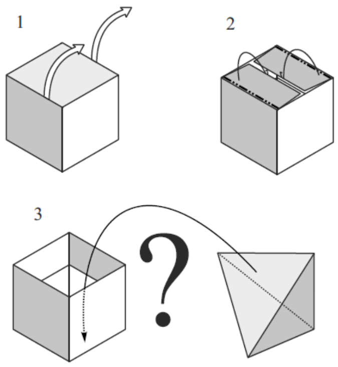


Modello di Paul Jackson

Il cubo: montaggio dei moduli



E’ possibile inserire il tetraedro nel cubo?



1.Quale dei due spigoli è più lungo, quello del tetraedro o quello del cubo?

2.Quale dei due poliedri è più alto?

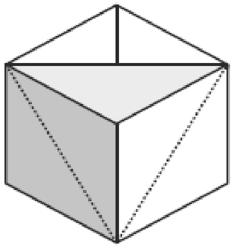
1.È possibile inserire il tetraedro nel cubo? In che modo?

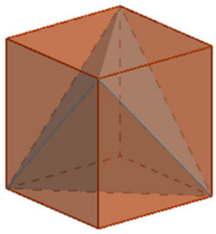
2.Quanto vale il rapporto tra lo spigolo del tetraedro e quello del cubo?

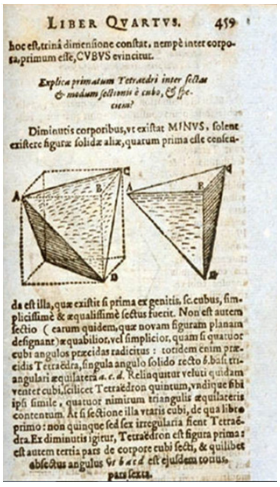
3.Quanto vale la distanza tra uno spigolo del tetraedro e lo spigolo opposto?

4.La distanza tra uno spigolo del tetraedro e lo spigolo opposto è maggiore, uguale o minore dell’altezza del tetraedro?

Il tetraedro inscritto nel cubo







LIBER QVARTVS. 459

hoc eſt, trinâ dimenſione conſtat, nempè inter corpora, primum eſſe, CVBVS evincitur.

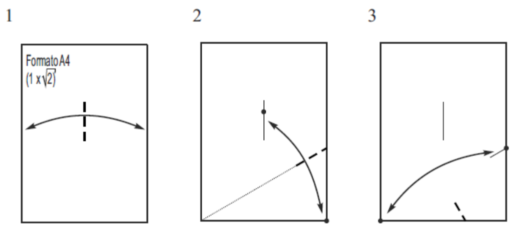
Explica primatum Tetraedri inter ſectas & modum ſectionis è cubo, & ſpeciem?

Diminutis corporibus, vt exiſtat MINVS, ſolent exiſtere figuræ ſolidæ aliæ, quarum prima eſſe cenſenda eſt illa, quæ exiſtit ſi prima ex genitis, ſc. cubus, ſimpliciſſimè & æqualiſſimè ſectus fuerit. Non eſt autem ſectio (earum quidem, quæ novam figuram planam deſignant) æquabilior, vel ſimplicior, quam ſi quatuor cubi angulos præcidas radicitus: totidem enim præcidis Tetraëdra, ſingula angulo ſolido recto *b*. baſi triangulari æquilatera *a. c. d.* Relinquitur veluti quidam venter cubi, ſcilicet Tetraëdron quintum, vndique ſibi ipſi ſimile, quatuor nimirum triangulis æquilateris contentum. At ſi ſectione illa vtaris cubi, de qua libro primo: non quinque ſed ſex irregularia fient Tetraëdra. Ex diminutis igitur, Tetraëdron eſt figura prima: eſt autem tertia pars de corpore cubi ſecti, & quilibet abſectus angulus vt *b a c d* eſt ejuſdem totius pars ſexta.

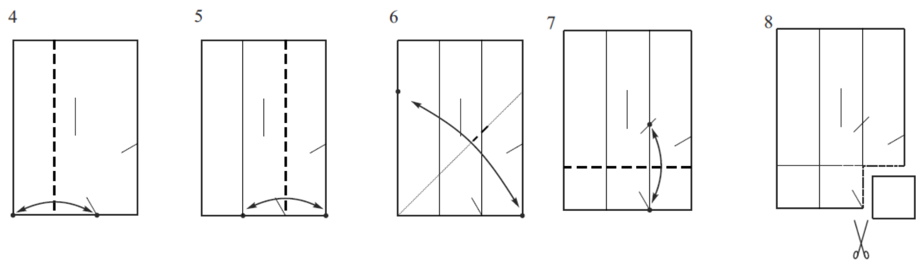
Problema, affrontato da Keplero nell'Epitomes Astronomiae

$$Spigolo_{Tetraedro} = \sqrt{2} \cdot Spigolo_{Cubo}$$

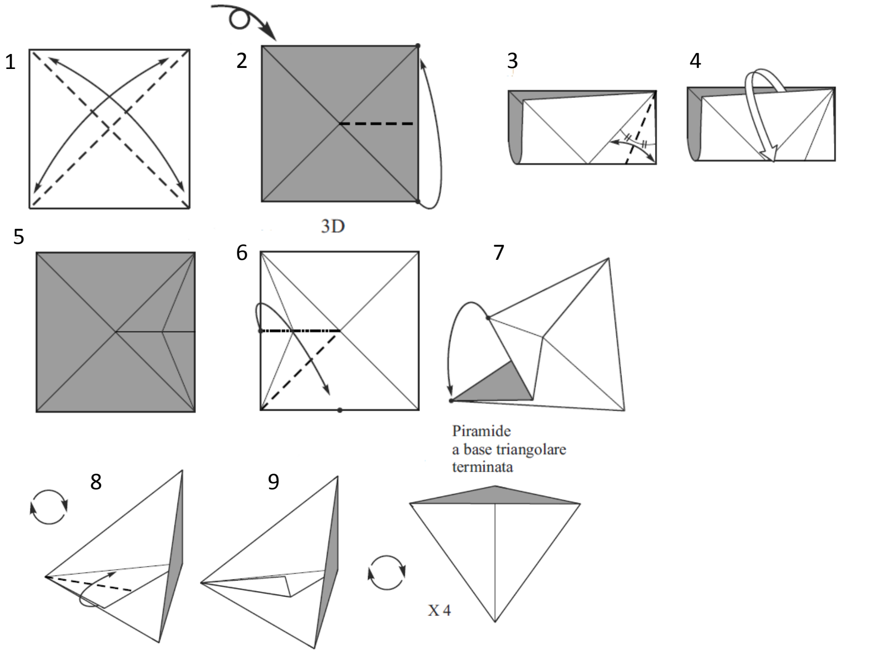
Il foglio per le quattro piramidi che riempiono gli spazi vuoti differenza tra cubo e tetraedro inscritto



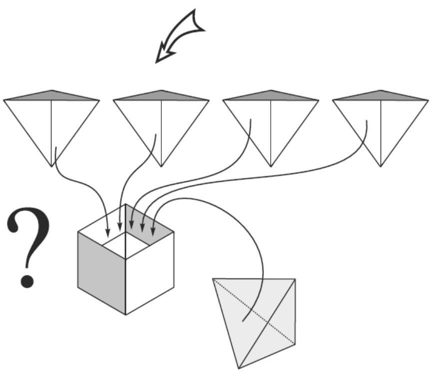
4 quadrati di lato $\frac{1}{3}$ del latocorto A4

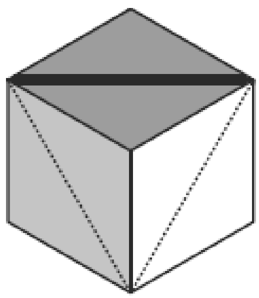


Costruzione delle quattro piramidi che riempiono gli spazi vuoti del cubo



Le quattro piramidi angolari differenza tra cubo e tetraedro inscritto





Le quattro piramidi, a base triangolare equilatera, hanno per spigoli di base gli spigoli del tetraedro e per spigoli laterali quelli del cubo.

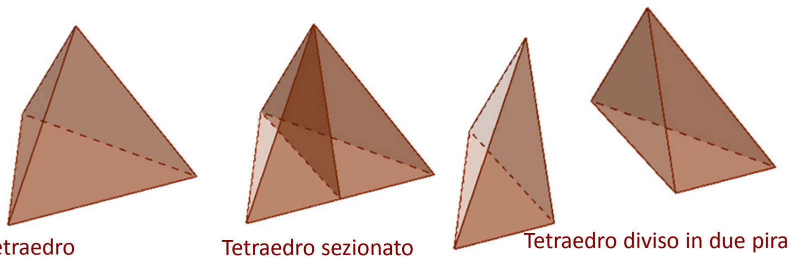
Confronto tra volumi: quanto vale il volume del tetraedro rispetto al volume del cubo?

1.Di che tipo sono i poliedri che si ottengono per differenza tra il cubo e il tetraedro inscritto?

2.Il volume di questi poliedri in che rapporto è con il volume del tetraedro?

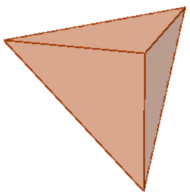
3.Quanto vale il rapporto tra il volume del tetraedro e quello del cubo?

Il rapporto tra i volumi del cubo e tetraedro inscritto



Tetraedro   Tetraedro sezionato   Tetraedro diviso in due piramidi

Dividendo il tetraedro con un piano passante per uno spigolo e il punto medio dello spigolo ad esso sghembo si ottengono due piramidi aventi per base facce del tetraedro



Le due piramidi in cui è diviso il tetraedro sono equivalenti alle quattro piramidi angolari:
basi uguali alla faccia del tetraedro e uguali altezze.

Il cubo è quindi costituito da sei piramidi equivalenti mentre il tetraedro da due di esse

Il volume del tetraedro è $\frac{1}{3}$ del volume del cubo in cui è inscritto

I risultati dallo studio dei modelli origami del cubo e del tetraedro inscritto.

E' possibile inscrivere il tetraedro nel cubo ?

Lo spigolo del tetraedro è maggiore dello spigolo del cubo ma nonostante ciò il tetraedro è inscrivibile nel cubo se il suo spigolo è uguale a $\sqrt{2}$ volte quello del cubo. Per inscrivere il tetraedro è sufficiente far coincidere un suo spigolo con la diagonale di una faccia «interna» del cubo.

Ingombro e dimensioni del tetraedro: quanto vale la distanza tra due spigoli opposti?

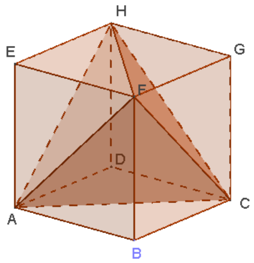
La distanza tra due spigoli opposti del tetraedro, distanza tra due rette sghembe, è pari allo spigolo del cubo, infatti due spigoli opposti del tetraedro coincidono con le diagonali di due facce opposte del cubo.

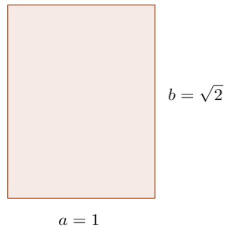
Confronto tra volumi: quanto vale il volume del tetraedro rispetto al volume del cubo?

I poliedri che si ottengono per differenza tra il cubo e il tetraedro inscritto sono quattro piramidi che hanno per base una faccia del tetraedro e per vertice un vertice del cubo.

Il volume di ciascuna di queste piramidi è uguale alla piramide che si ottiene dividendo il tetraedro con il piano passante per un suo spigolo e per la metà dello spigolo opposto. Queste due metà tetraedro, che hanno per base la faccia del tetraedro e per altezza metà dell'altezza del tetraedro, sono equivalenti a ciascuna delle quattro piramidi avendo la stessa base ed altezze che risultano congruenti al confronto. Quindi ciascuna delle sei piramidi in cui è suddiviso il cubo è pari ad un sesto del volume del cubo. Si può così concludere che il tetraedro occupa i $\frac{2}{6}$ *cioè* $\frac{1}{3}$ del volume del cubo in cui è inscritto.

Relazioni tra le dimensioni del foglio e lo spigolo del cubo

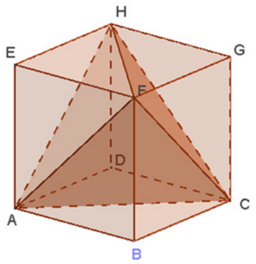


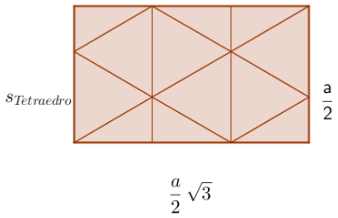


Poniamo il lato corto del foglio A4 uguale ad 1: $a = 1$

Lo spigolo del cubo è la metà del lato del foglio quadrato ottenuto dividendo in tre parti il lato lungo del foglio A4 $S_{Cubo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Relazioni tra le dimensioni del foglio e lo spigolo del tetraedro

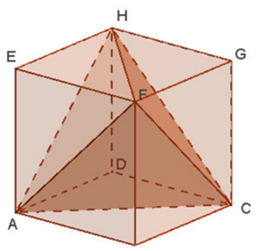


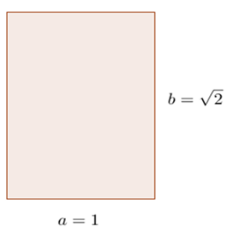


Lo spigolo del tetraedro è i $\frac{2}{3}$ della metà del lato corto del foglio A4:

$s_{Tetraedro} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ *lato corto* A4

Relazioni tra le dimensioni del foglio e gli spigoli delle piramidi angolari



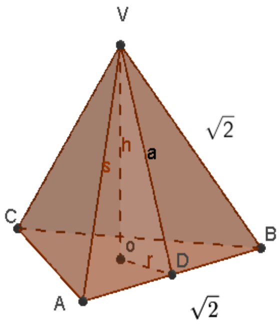


Digitare l'equazione qui.Le piramidi angolari hanno come spigolo di base lo spigolo del tetraedro e come spigoli laterali gli spigoli del cubo quindi:

$s_{base\ Piramidi} = \frac{a}{3}$ Un terzo lato corto

$s_{laterali\ Piramidi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b = \frac{\sqrt{2}a}{6}$ Un sesto lato lungo

Calcolo del volume del tetraedro di spigolo $\sqrt{2}$



$$\overline{CD} = \overline{VD} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\overline{VO} = \sqrt{\overline{VD}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'altezza del tetraedro è cateto del triangolo rettangolo che essa forma con l'apotema e il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero base del tetraedro.

$$V = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3}$$

Il volume del tetraedro inscritto nel cubo è un terzo di quello del cubo