DAL PROBLEMA ALLE DIVERSE POSSIBILI RAPPRESENTAZIONI E ALLA SUA FORMALIZZAZIONE

Maddalena Andreoletti, Silvia Turlon

Centro MatNet , Università di Bergamo.

Si può vivere senza Matematica?

«Non ho mai capito niente di matematica eppure…

ho fatto strada o sono diventato qualcuno»

Un danno che oggi non si riverbera nell'incapacità di risolvere i conteggi immediati-ci sono strumenti per farli- ma che si manifesta in maniera più sottile e profonda nelle difficoltà ad **interpretare dati e situazioni**, nell'incapacità di **comprendere punti di vista diversi** o di **argomentare in maniera rigorosa**.

[Prof. Paolo Lorenzi in Rosetta Zan «Matematica un problema da risolvere», 2008]

Tutti sanno che c’è qualcosa che non va

P.Lockart, *Contro l’ora di matematica*, Rizzoli 2010

Politici sentenziano: «Abbiamo bisogno di standard più elevati.
Le scuole ribattono…
le indagini OCSE-PISA collocano i nostri studenti nelle ultime posizioni

Noi insegnanti cosa facciamo?

Breve scaletta dell’incontro di oggi

- Il punto di inizio, ovvero nulla nasce per caso
- Il cooperative learning come possibile metodologia
- Attività da svolgere in gruppi
- Riflessioni su un’esperienza condotta in classe

Laboratorio di accoglienza: il punto di partenza

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Centro per la didattica della matematica e delle sue applicazioni

PERCORSO DI MATEMATICA
per il biennio della scuola secondaria di secondo grado secondo gli obiettivi specifici di apprendimento previsti dalle Indicazioni Nazionali

Cosa insegnare?

Come procedere?

1° fase	lavoro di gruppo per la ricerca delle soluzioni dei quesiti dell’attività.	presentazione da parte di ciascun gruppo delle soluzioni e discussione collettiva.	ad ogni studente viene data una scheda con quesiti di approfondimento e di riflessione sugli argomenti dell'Attività da risolvere individualmente a casa.
2° fase	Correzione e condivisione in gruppo del lavoro svolto a casa.	Ogni gruppo relaziona sul lavoro svolto.	Discussione e condivisione collettiva del lavoro svolto.
3°fase	Sintesi dell’insegnante sui concetti fondamentali	PPT come guida per la sintesi e la sistematizzazione.	

Laboratorio biennio

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Centro per la didattica della matematica e delle sue applicazioni

algebra sincopata

(da Diofanto (circa 250 d.C.) alla fine del XVI secolo)

$\Delta^{Y}\ \bar{\xi}\ \mathring{M}\ \overline{,\beta\phi\kappa}$ ἐν μορίῳ $\Delta^{Y}\Delta\ \bar{\alpha}\ \mathring{M}$ ϡ ⋀ $\Delta^{Y}\ \bar{\xi}$

Ed ecco la traduzione nel nostro simbolismo:

$$(60\,x^2 + 2520)\,/\,(x^2 + 900 - 60\,x^2)$$

Laboratorio biennio

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

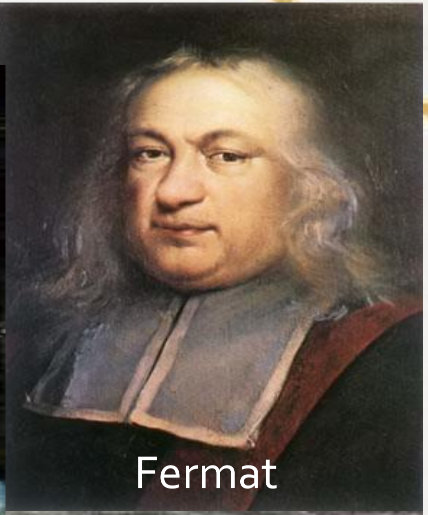
LA FASE SIMBOLICA

(dopo Viète 1540 – 1603)

L'ultima fase del l'algebra è quella simbolica.

Non viene più utilizzato il linguaggio naturale per indicare le quantità note e le incognite, ma lettere e simboli.

Nel 1591 pubblica un trattato dal titolo "Isagoge in artem analyticam" nel quale cerca di stabilire un legame tra la geometria antica e la nuova algebra. In questo trattato pone inoltre le basi del calcolo letterale, indicando le incognite con le vocali e i parametri con le consonanti.



Modello collaborativo

[**L.Vianello,** 1995; **A. Pesci**, *I suggerimenti della ricerca in didattica della Matematica per la pratica scolastica*, a.a.2011-2012]

Perché assegnare ruoli?

Il riconoscimento di un ruolo specifico ad una persona da parte degli altri [....] permette di sviluppare la propria autonomia nel prendere decisioni, valutare e controllare, **sentendosi autorizzati a svolgere determinati compiti**, tutti funzionali al raggiungimento dell'obiettivo comune.

[**A.Pesci** , 2004]

Perché assegnare i ruoli?
La parola agli studenti [Gennaio2014]

Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?

Bene, importante perché grazie ai ruoli ognuno deve svolgere qualcosa, portare a termine un suo obbiettivo.

Cosa ti è piaciuto di più dell’esperienza compiuta? Perché?

..*mi è piaciuta l’idea dei ruoli che ognuno aveva per non essere lasciato a parte e quindi ognuno aveva qualcosa da fare.*

I ruoli [Febbraio 2016]

1. ORIENTATO AL COMPITO (**PER LA RETTA VIA**)

   Fa sì che TUTTE le parti del problema siano analizzate e discusse

   Fa sì che il gruppo NON SI DISPERDA su aspetti secondari del problema

2. ORIENTATO AL GRUPPO (**UNO PER TUTTI, TUTTI PER UNO**)

   Fa sì che i contributi di tutti siano EQUILIBRATI nel tempo e nel modo

3. OSSERVATORE (**TUTTI SOTTO CONTROLLO**)

   AUTOESCLUSIONE di alcuni membri

4. RELATORE (**VOCE AL GRUPPO**)

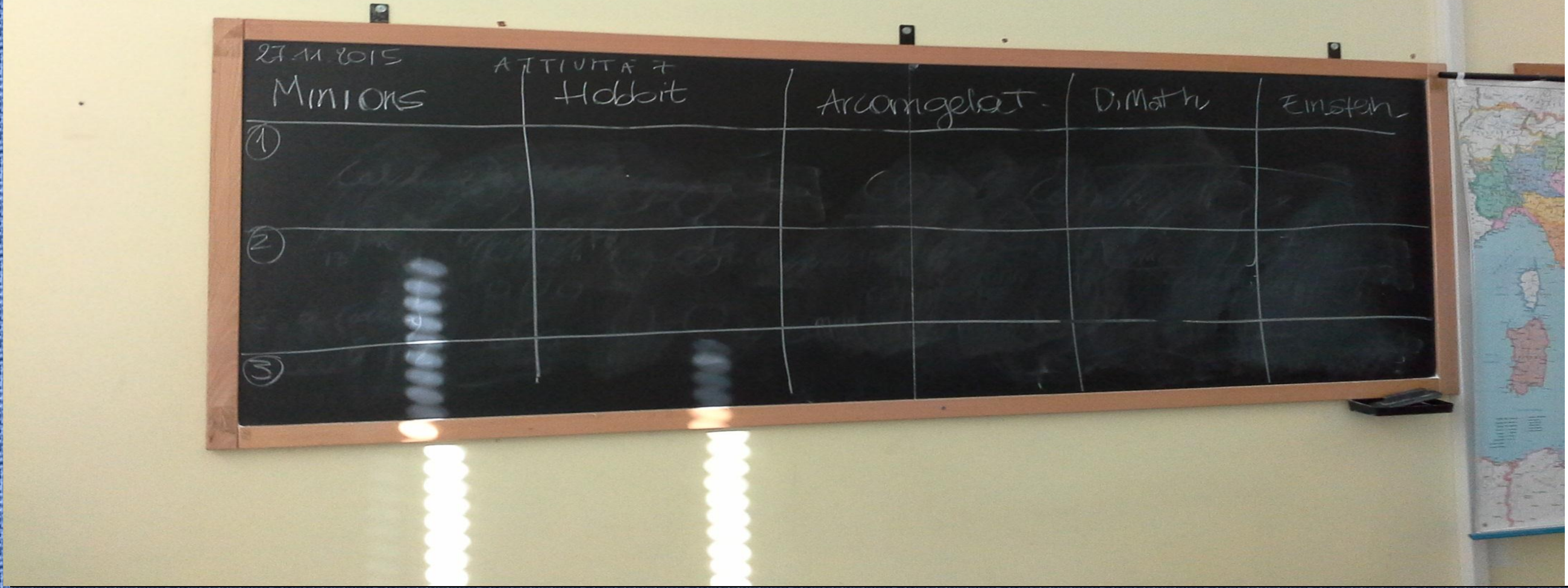
5. MEMORIA (**ORECCHIE OCCHI MANO**)

INTERDIPENDENZA POSITIVA

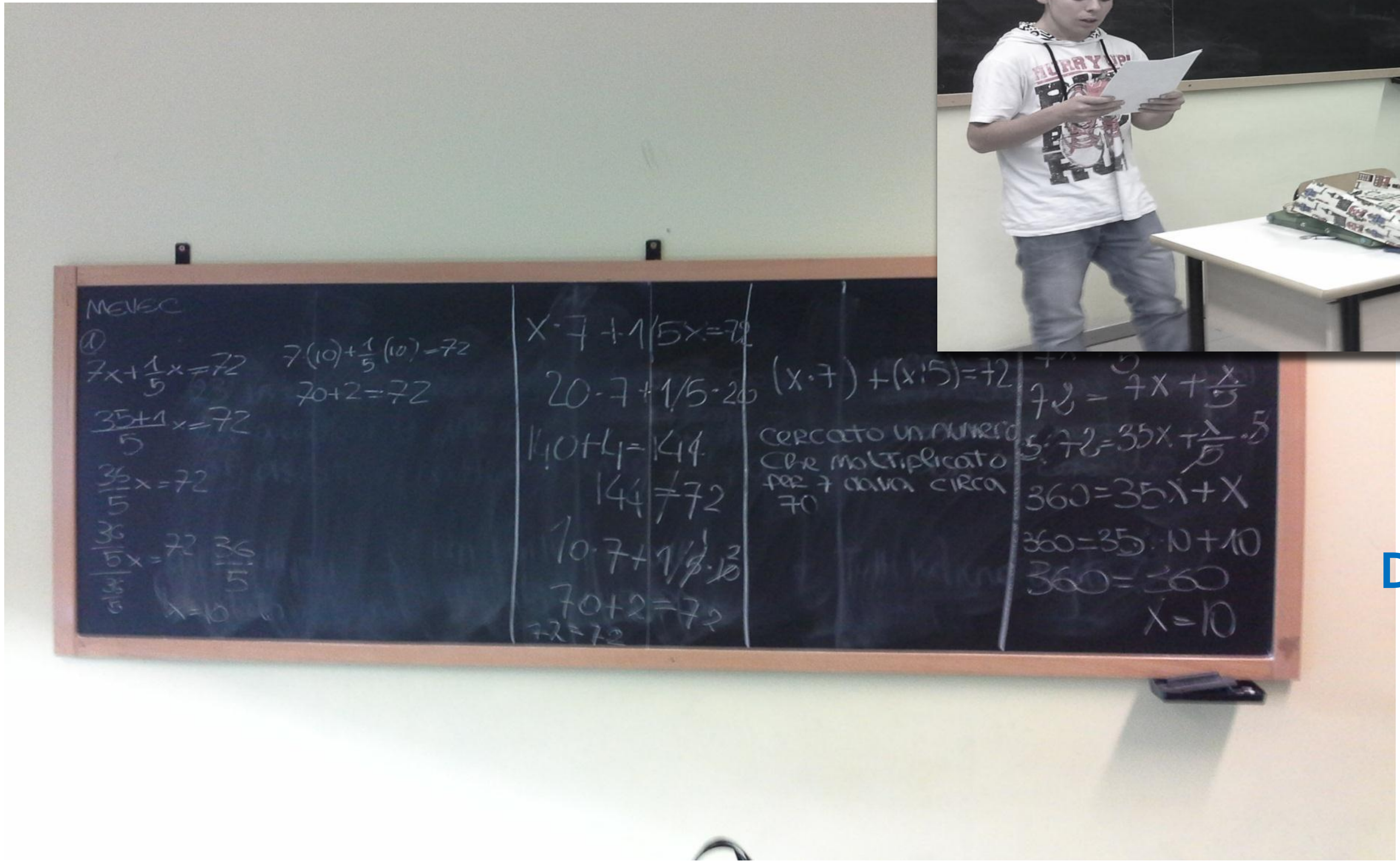
COME SI COSTRUISCE?

Fase preparatoria: gli alunni si dividono nei gruppi stabiliti; l'insegnante distribuisce il materiale, fornisce eventuali istruzioni e prepara la raccolta dei percorsi

Fase di gruppo: 2 minuti per leggere individualmente la consegna, attività proposta (tempo complessivo 20 minuti)



Esposizione dei relatori e degli osservatori



Discussione collettiva

Ruolo dell'insegnante

- Prima di cominciare
  - Fase di motivazione (es. perché sono necessari i gruppi?)
  - Scelta dell'attività da proporre
  - Scelta dei criteri di costituzione dei gruppi
  - Preparazione del *materiale didattico*
- Durante il lavoro di gruppo

Non deve dare suggerimenti relativi alla soluzione del compito disciplinare ma essere particolarmente attento ai processi interrelazionali.

[A. Pesci 2003]

Ruolo dell'insegnante

- Durante la discussione
  - ✓ Dirigere i diversi contributi senza fornire immediatamente la/le soluzione/i corretta/e
  - ✓ Cercare di controllare anche la comunicazione indiretta (espressività naturale e spontanea)
  - ✓ Accogliere in modo positivo tutti i contributi
  - ✓ **Prende decisioni in merito a cosa focalizzare (tutti i problemi, relazione osservatori…)**

Ruolo dell'insegnante: **L'errore fa orrore???**

Errare

sbagliare

Vagare senza meta

Esempio

Scena 6: Marco

Marco, quarta liceo scientifico, deve moltiplicare x + 1 per x + 2.

Scrive così:

$$x + 1\,(x+2)$$

Ma esegue così :

$$x + 1\,(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

Rosetta Zan *Difficoltà in matematica*, Springer, 2007

Verifica sospensione del giudizio

ES 6)

6) $(3x+1)^2 > 0$

$9x^2+6x+1>0$

$9x^2+6x+1=0$ $\quad \Delta = 36-36=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 0}{18} = -\dfrac{1}{3}$ $\quad S: \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{3}$

Errore

“Ma se lo studente sbaglia, lei cosa fa?

“Spiego un’altra volta così capisce”

Rosetta Zan *Difficoltà in matematica*, Springer,2007

“Questa accortezza didattica consiste nella scelta, da parte del professore abile, delle difficoltà che l’allievo incontrerà sulle vie del ragionamento in modo che l’occasione di commettere errori sia minima”

“Quello che è oscuro nel cervello dell’alunno rimane oscuro benchè il segnale “errore” non si accenda”

Zofia Krygowska, (1957)

Allenarsi serve??

Di fronte a certi errori viene forte la tentazione di far risolvere un gran numero di esercizi dello stesso tipo…

Siamo sicuri che l’errore dipenda da una non comprensione del concetto matematico?

Allenarsi sulle stesse cose, porta automatismi e memorizzazione e ….

“Insegnanti e studenti [...] non sono disposti ad assumersi i rischi del compromesso e si accontentano dei più sicuri ***compromessi delle risposte corrette”***

Howard Gardner (1991)

La resistenza a mettere gli alunni davanti a problemi di giusta complessità è secondo me strettamente legata all’ossessione del valutare (e dell’essere valutati…). Così da un lato bambini e ragazzi si sentono sempre sotto valutazione e quindi non esplorano, non osano: **sono ingessati nella ricerca della risposta corretta**. Dall’altro lato l’insegnante per paura di ottenere brutti risultati semplifica le richieste.

Rosetta Zan ,La vita scolastica, 11/02/2016

Facciamo il punto e esemplifichiamo

Potenze e percentuali rappresentano significativi esemplificazioni di «argomenti» che gli studenti assimilano come «pratiche» senza averne però capito il senso.

Dalle prove invalsi

D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

- ☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$
- ☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$
- ☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$
- ☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

Risposta A 19.8% Risposta B 59.2% Risposta C 12.1% Risposta D 8%

Dalle prove invalsi

D5. **L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?**

- ☐ A. $4{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ B. $3{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ C. $4{,}5 \times 10^6$ anni
- ☐ D. $4{,}5 \times 10^3$ anni

Risposta A 10.2% Risposta B 6.9% Risposta C 23.2% Risposta D 57%

Dalle prove invalsi

D25. Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: ………………… euro

Risposte corrette 12.2%

ATTIVITA' DI GRUPPO

DESCRIZIONE DEL LAVORO

Riflettere sui problemi assegnati, focalizzando l'attenzione sui seguenti aspetti:

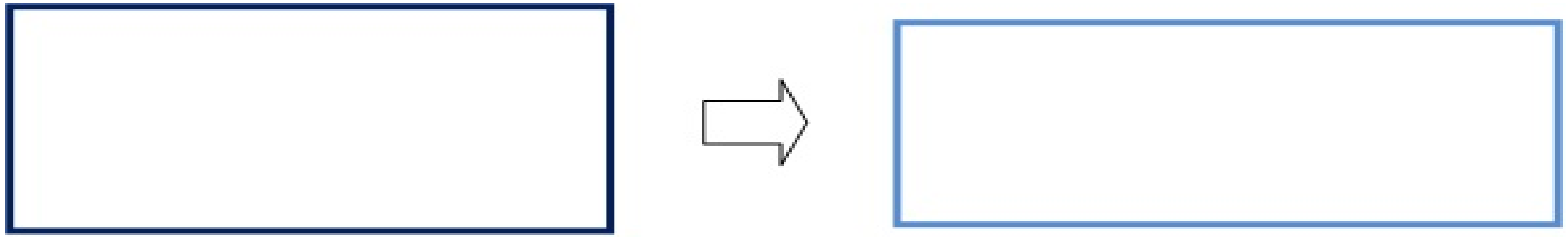
a) Collocazione del problema all'interno di un curricolo scolastico
b) Eventuali errori o difficoltà degli studenti
c) Possibili legami tra i tre problemi

TEMPO: 20 MINUTI

Dei quesiti sulle percentuali una tipologia spiazza un po' tutti, perfino gli adulti esperti, perché anti intuitiva.

PROBLEMA 1

Aumentando del 10% la base di un rettangolo e diminuendo del 10% la su altezza, cosa succede all'area?



Alcuni studenti rispondono subito che non c'è variazione dell'area, forse per un ragionamento basato sull'idea di "compensazione" tra aumento e diminuzione.

Altri studenti rispondono che la variazione dipende da quale delle due dimensioni è aumentata e quale è diminuita.

Una serie di prove numeriche fa intuire che l'area diminuisce, ma molti, guardano il risultato allibiti e rifanno più volte il calcolo pensando di avere sbagliato.

Il ricorso ai simboli fa davvero comprendere le ragioni per cui l'area diminuisce.

Il calcolo letterale viene utilizzato in modo "sensato", cioè riferito a situazioni problematiche e non fine a se stesso.

È un risultato inaspettato e proprio per questo stimolante per l'apprendimento

Se indichiamo con b la base e aggiungiamo il 10%, otteniamo $\frac{100+10}{100}b$, ovvero $\frac{110}{100}b$

Se indichiamo con h l'altezza e togliamo il 10%, otteniamo $\frac{100-10}{100}h$, ovvero $\frac{90}{100}h$.

Dunque l'area, che inizialmente era $b \cdot h$, diventa

$$\frac{110}{100}b \cdot \frac{90}{100}h = \frac{110}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot b \cdot h = \frac{99}{100}bh = 0{,}99bh$$

Mediante l'uso dei simboli, si vede che l'area diminuisce sempre e che il risultato non dipende da quale delle due dimensioni è aumentata e quale è diminuita.

E se cambiassimo la percentuale?

Nel caso del rettangolo, indicando con s la percentuale, otteniamo:

$$(b + sb) \cdot (h - sh) = bh - bhs + sbh - bhs^2 = bh \cdot (1 - s^2)$$

È il prodotto notevole somma per differenza

(nel caso $s = \frac{10}{100} = 0{,}1$ l'area diminuisce di $1 - 0{,}01 = 0{,}99$)

L'area del rettangolo diminuisce qualunque sia $s (0 < s < 1)$, infatti

$$1 - s^2 < 1$$

Le lettere sono servite a capire se un certo fenomeno dipende dalla scelta iniziale o no

Sul Quaderno dell'Unione Matematica Italiana "Matematica 2003" si legge:

"Risolvere e porsi problemi"

Spesso si dà molta enfasi al primo aspetto e si sottovaluta il secondo.

E certo chi sa risolvere problemi ha molte carte da giocare, (sul mercato del lavoro per esempio)
Ma certamente il porsi problemi, con la sua caratteristica di pensiero creativo e divergente
è atteggiamento necessario ad integrare la

costruzione di una cittadinanza riflessiva e consapevole

Le domande non finiscono mai…

E se allunghiamo la base di una percentuale s e diminuiamo l’altezza di un’altra percentuale p?

Può darsi che con certi valori di s e p l’area aumenti?

…………….

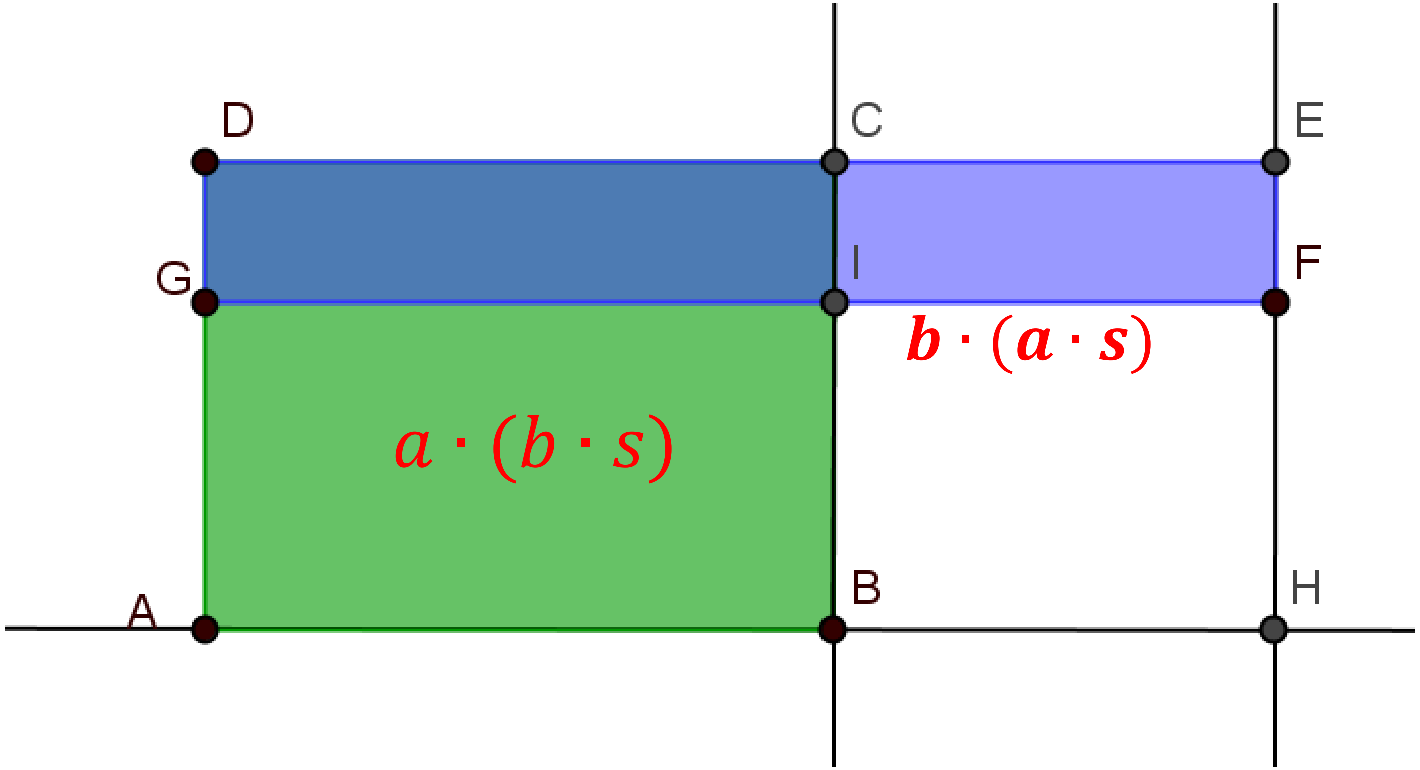
Un problema è "bello" se suscita domande,

altrimenti è un *esercizio*

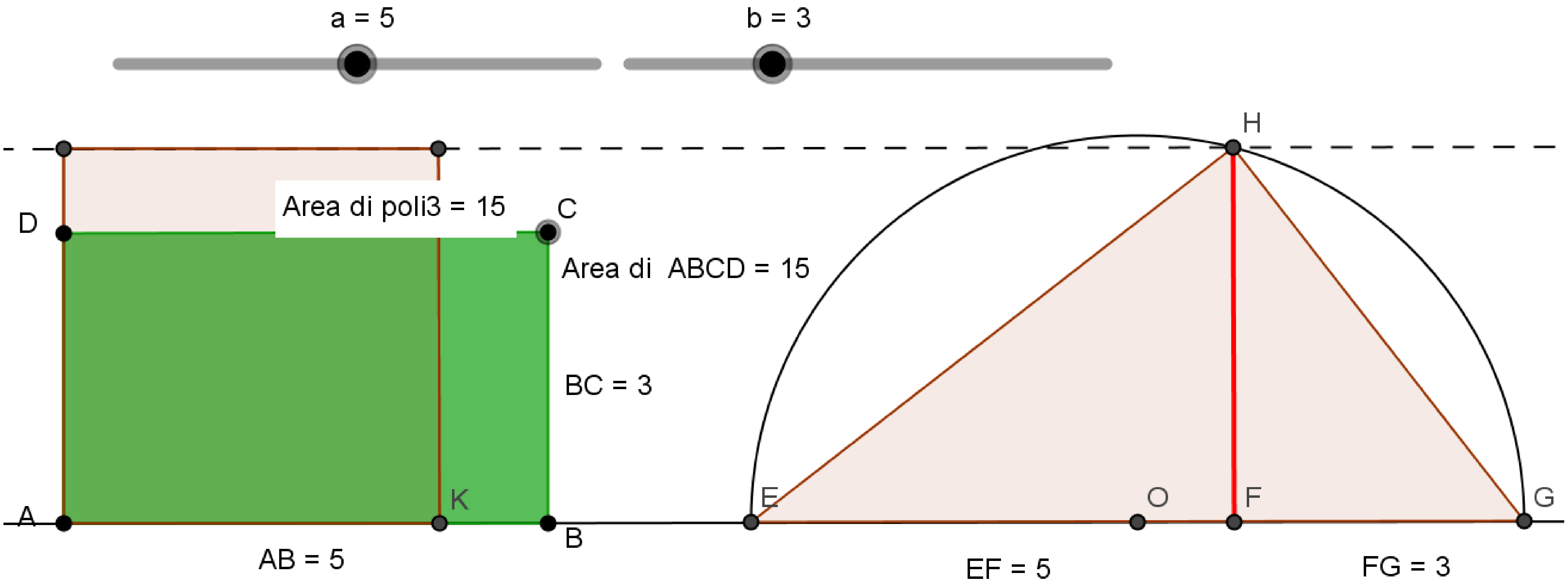
Lasciare ai ragazzi il momento della scoperta

Guardare lontano

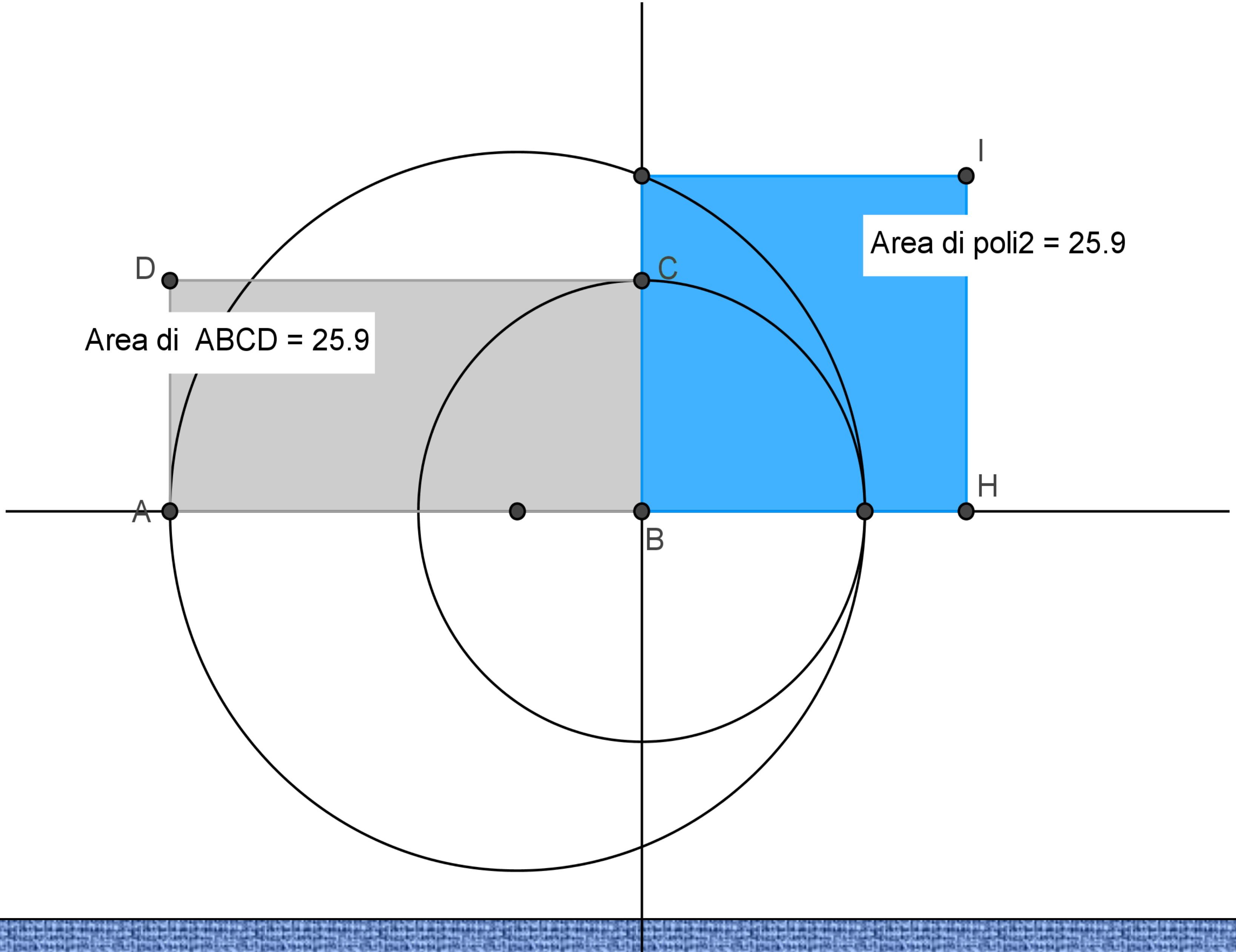
Risoluzione geometrica

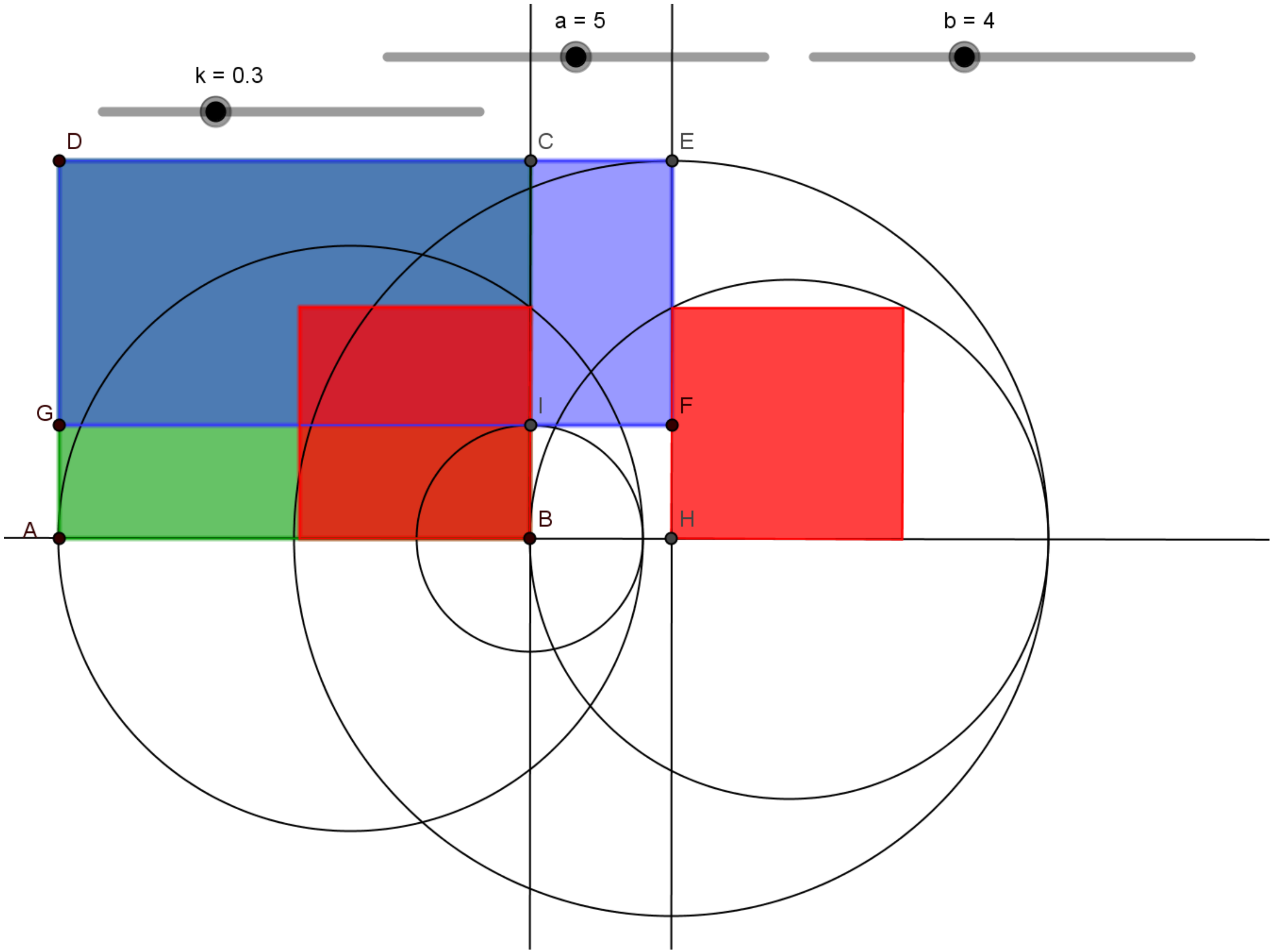


https://www.geogebra.org/m/wfejaWzY

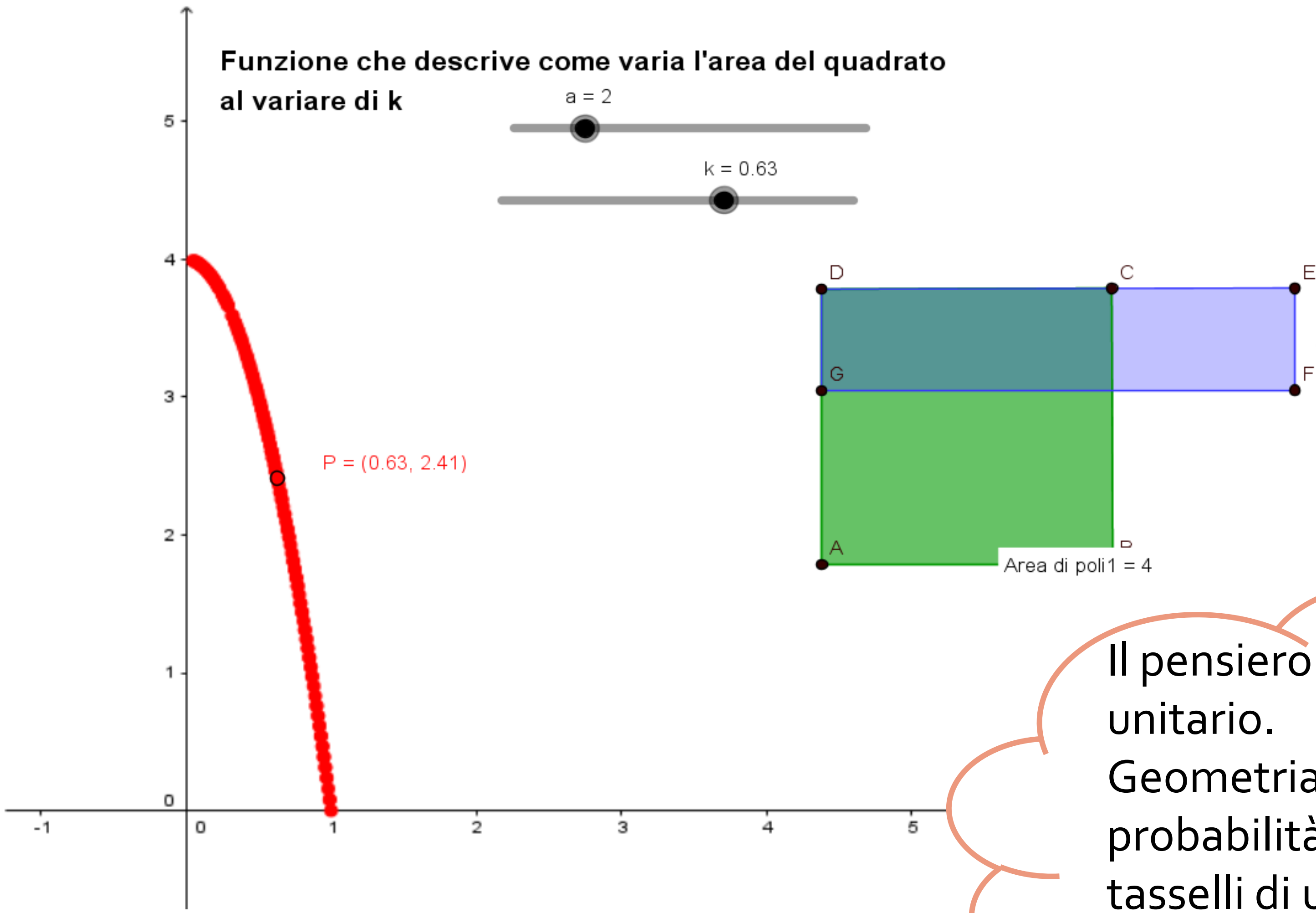


a = 5
b = 3
H
Area di poli3 = 15
C
D
Area di ABCD = 15
BC = 3
E
O
F
G
A
K
B
AB = 5
EF = 5
FG = 3


I
Area di poli2 = 25.9
D
C
Area di ABCD = 25.9
H
A
B



https://www.geogebra.org/m/wfejaWzY



Il pensiero matematico è unitario.
Geometria e aritmetica (e probabilità e algebra e…) sono tasselli di un unico corpo di conoscenze

https://www.geogebra.org/m/ZSMg25dv

Un’altra forma dello stesso problema

Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l’una o l’altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell’abito?

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO Sessione ordinaria 2007

Indichiamo con p il prezzo e aggiungiamo il 6%, otteniamo

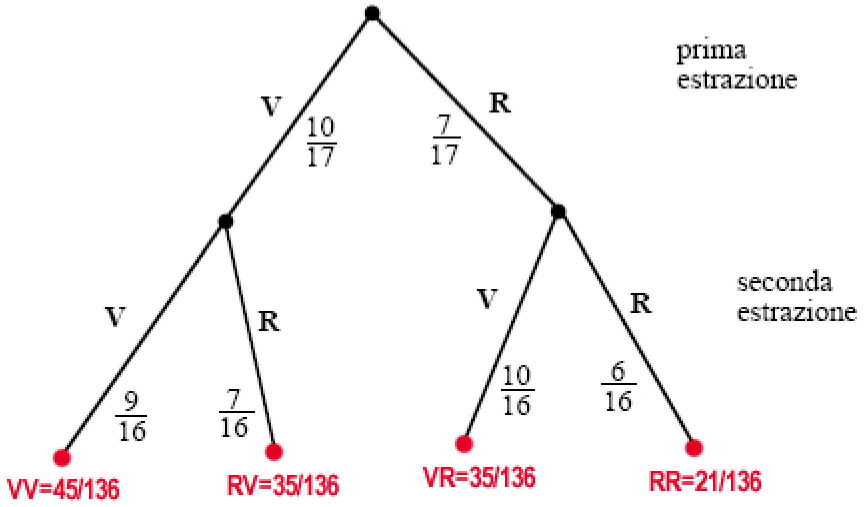
$$\frac{106}{100}p = 1{,}06p$$

togliamo il 6%, otteniamo $\frac{94}{100}\frac{106}{100}p = 0{,}9964p$

Invertendo le operazioni il costo finale non cambia

PROBLEMA 2 gennaio 2016

Nel gennaio 2002 un chilogrammo di pane costava 1,50 euro. Nell'ipotesi che ogni anno il prezzo aumenti del 3% rispetto all'anno precedente, quanto costava un chilogrammo di pane dello stesso tipo a gennaio del 2005 e quanto costerà, sempre lo stesso tipo di pane, nel gennaio 2017?



2005 = 1,65 €

2017 = 1,95/ 2,00 €

OGNI ANNO FINO AL 2005 AUMENTA DI MENO DI 5 CENTESIMI, MA ~~SE~~ VISTO CHE SI DEVE APPROSSIMARE AI CENTESIMI ESCE CHE AUMENTA DI 5 CENTESIMI

A. 9 GRUPPO 1 1 B

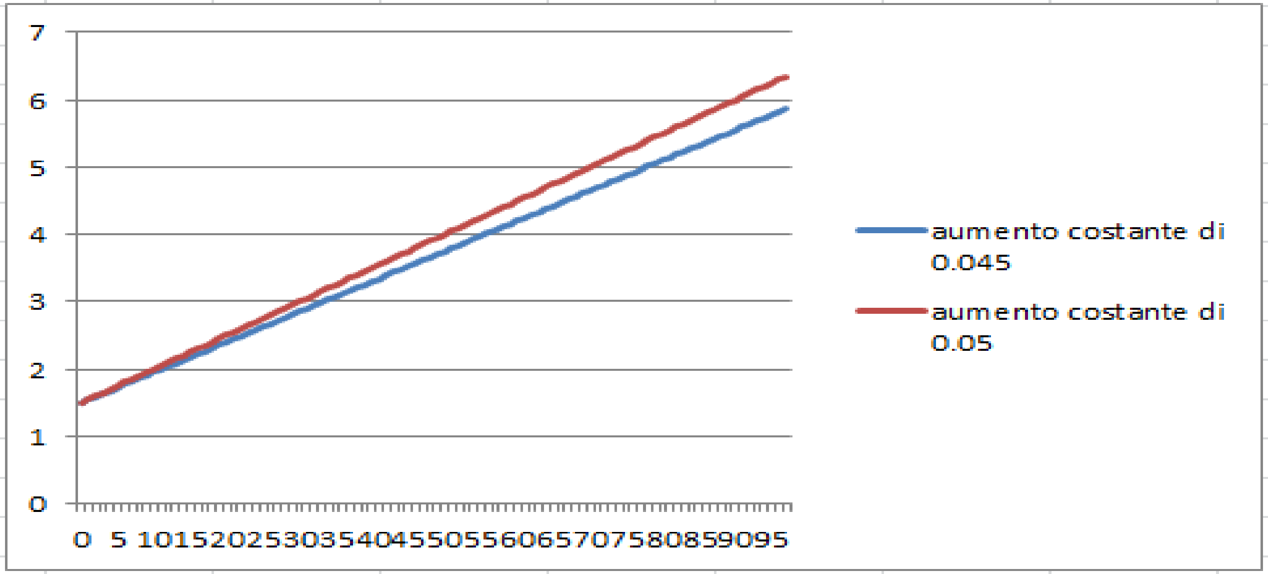
2002 1kg = 1,50 € 3% all'anno 2005? 2013?

$3:100 = x : 1,50 \qquad x = \frac{1,50 \cdot 3}{100} = (0,045 \cdot 3) = 0,135$

$1,50 + 0,135 = 1,64$ € nel 2002

$(0,045 \cdot 11) = 0,495 + 1,50 = 2,00$ € nel 2013

A	B	C	D	E
79	5,055		79	5,45
80	5,1		80	5,5
81	5,145		81	5,55
82	5,19		82	5,6
83	5,235		83	5,65
84	5,28		84	5,7
85	5,325		85	5,75
86	5,37		86	5,8
87	5,415		87	5,85
88	5,46		88	5,9
89	5,505		89	5,95
90	5,55		90	6
91	5,595		91	6,05
92	5,64		92	6,1
93	5,685		93	6,15
94	5,73		94	6,2
95	5,775		95	6,25
96	5,82		96	6,3
97	5,865		97	6,35



2003 = 1,50 : 100 · 3 = 0,045 + 1,50 = 1,545 = 1,55 → 1,545

2004 = 1,545 : 100 · 3 = 0,0465 + 1,50 = 1,5465 = 1,55 → 1,5465

2005 = 1,5465 : 100 · 3 = 0,046395 + 1,5 = 1,546 =

SIAMO ARRIVATI AD UNA CONCLUSIONE: IL RISULTATO NON AUMENTA MAI E SI AGGIUNGONO SOLTANTO NUMERI FRA IL 4 E IL 5

Una difficoltà non piccola per l’insegnante:
ascoltare i ragazzi

I ragazzi di fronte alla contraddizione del risultato ottenuto tendono a pensare di aver fatto errori di calcolo.

Occorre verificare il calcolo e formalizzare:

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{A}+\mathbf{1})$$

Primo passo $\quad \boldsymbol{p}\cdot\frac{3}{100}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\cdot\left(\frac{3}{100}+1\right)$

Secondo passo $\quad \boldsymbol{p}\cdot\left(\frac{3}{100}+1\right)\cdot\frac{3}{100}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\cdot\left(\left(\frac{3}{100}\right)^2+\frac{3}{100}+1\right)$

Terzo passo $\quad p\cdot\left(\left(\frac{3}{100}\right)^2+\frac{3}{100}+1\right)\cdot\frac{3}{100}+p=p\cdot\left(\left(\frac{3}{100}\right)^3+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\frac{3}{100}+1\right)$

n-simo passo $\quad p\cdot\left(\left(\frac{3}{100}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\frac{3}{100}+1\right)\cdot\frac{3}{100}+p=$

$$p\cdot\left(\left(\frac{3}{100}\right)^{n}+\cdots+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\frac{3}{100}+1\right)$$

PER PRIMA COSA ABBIAMO CALCOLATO IL 3% di 1,50€ E ABBIAMO PROSEGUITO, CON IL DIAGRAMMA AD ALBERO, FINO AL 2017.

NEL 2005 IL COSTO DEL PANE ERA DI 1,65€ MENTRE NEL 2017 IL COSTO DEL PANE SARÀ DI 2,30€.

PERÒ SECONDO NOI CI POTREBBE ESSERE ANCHE UN'ALTRA RISOLUZIONE ANCHE SE NON SIAMO RIUSCITI A TROVARLA.

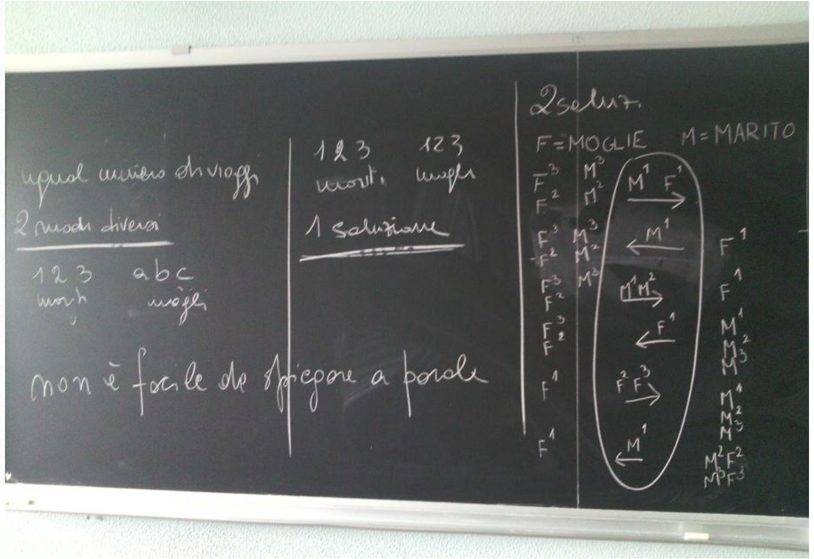
aumentando del 3% ogni anno, il pane costerà, nei seguenti anni, c

2002: 1,50€
2003: 1,50+3% = 1,54€
2004: 1,58~~€~~
2005: 1,64€
...
2017: 2,34€

cioè sempre il 3% in più dell'anno precedente

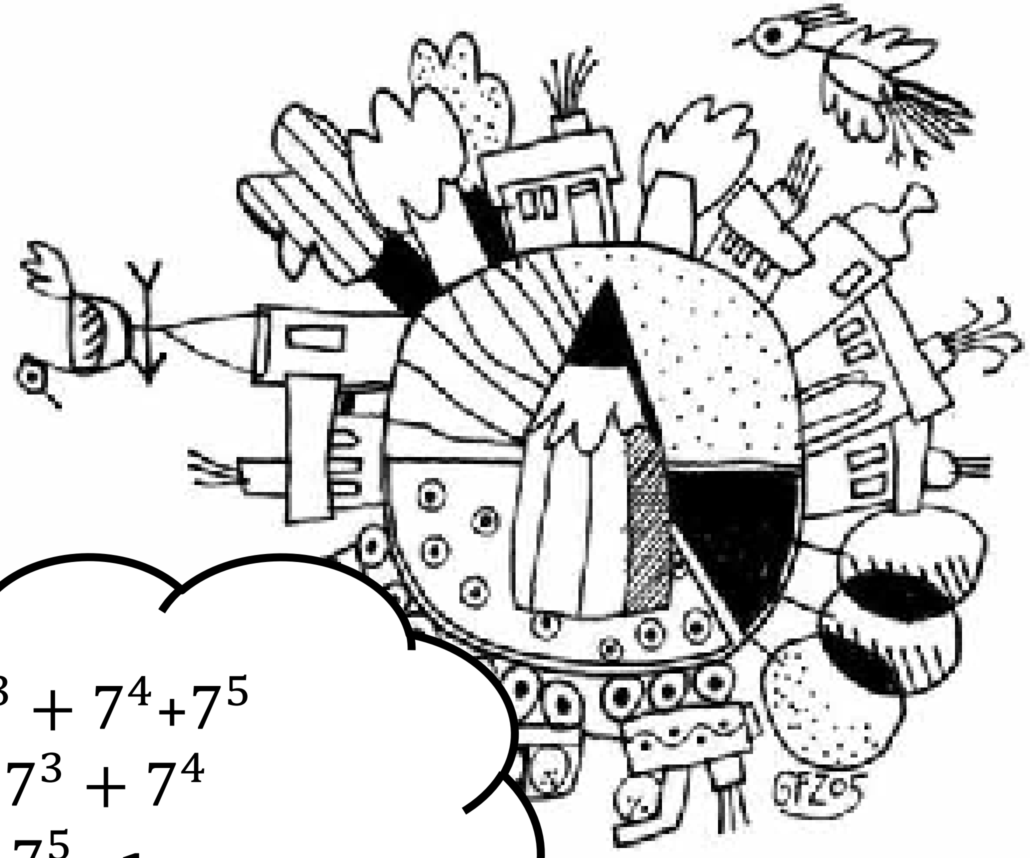
ecco una relazione.

(1) x
(2) $x + 3\%x$
(3) $x + 3\%(x + 3\%x)$
(4) ...



Somma di potenze

Filastrocca popolare:
Per una strada che andava a Camogli
Passava un uomo con sette mogli.
e ogni moglie avea sette sacchi,
e ogni sacco avea sette gatte,
e ogni gatta avea sette gattini.
Gattini, gatte, sacchi, e mogli,
in quanti andavano, dite, a Camogli?



$$S = 1+7+7^2 + 7^3 + 7^4$$

$$7S = 7+7^2 + 7^3 + 7^4+7^5$$
$$S= 1+7+7^2 + 7^3 + 7^4$$
$$(7-1)S = 7^5-1$$
$$S = \frac{7^5-1}{7-1}$$

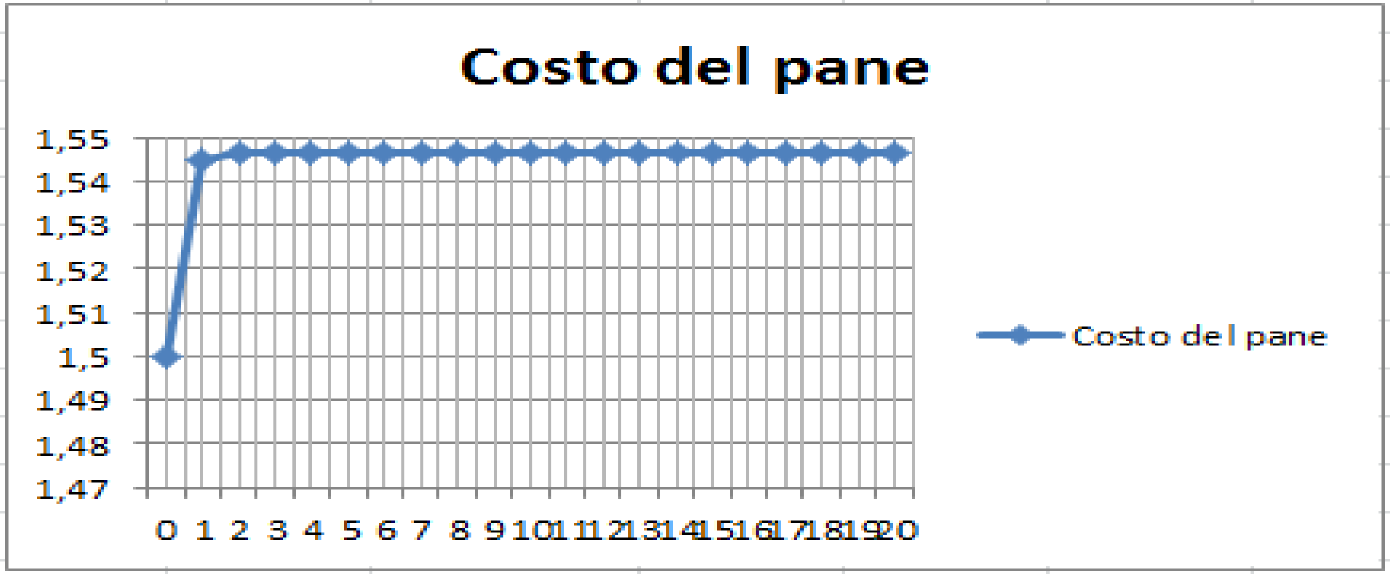
$$\left(\frac{3}{100}\right)^3+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\left(\frac{3}{100}\right)^1+\left(\frac{3}{100}\right)^0=\frac{1-(0{,}03)^4}{1-0{,}03}$$

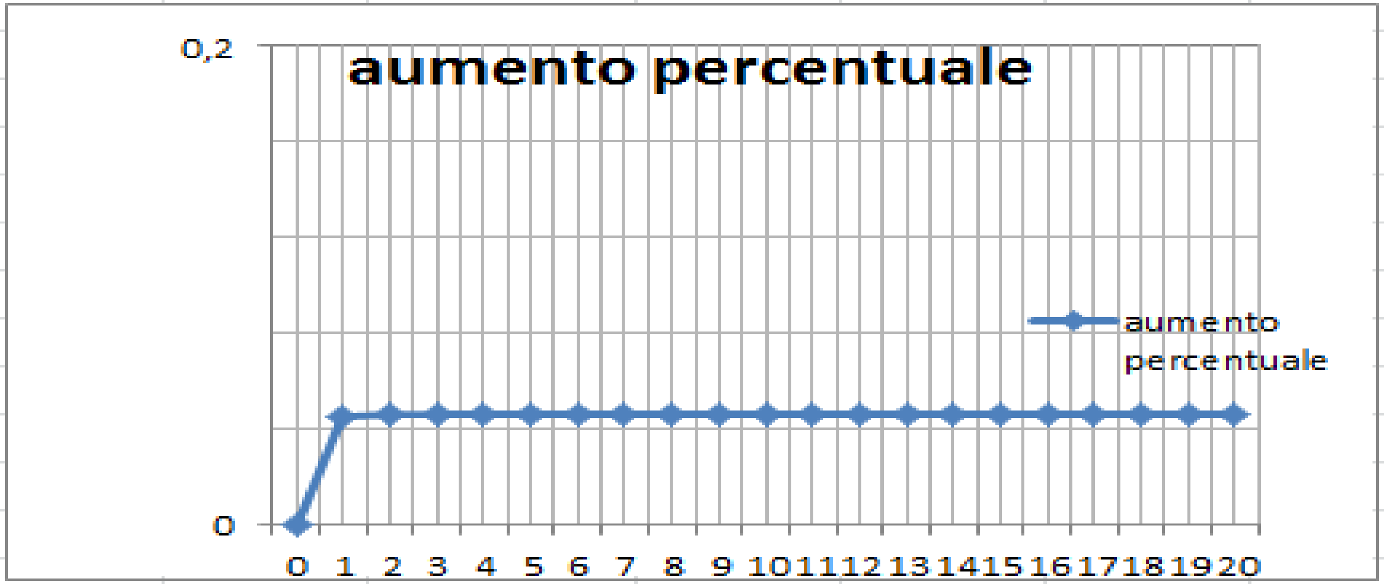
$$\left(\frac{3}{100}\right)^{11}+\dots\dots\dots+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\left(\frac{3}{100}\right)^1+\left(\frac{3}{100}\right)^0=\frac{1-(0{,}03)^{12}}{1-0{,}03}$$

$$\left(\frac{3}{100}\right)^{n}+\dots\dots\dots+\left(\frac{3}{100}\right)^2+\left(\frac{3}{100}\right)^1+\left(\frac{3}{100}\right)^0=\frac{1-(0{,}03)^{n+1}}{1-0{,}03}$$

La presa in carico di un errore può portare ad imparare cose nuove.

A	B	C	D
2002	0	0	1,5
2003	1	0,045	1,545
2004	2	0,04635	1,54635
2005	3	0,0463905	1,546391
2006	4	0,0463917	1,546392
2007	5	0,0463918	1,546392
2008	6	0,0463918	1,546392
2009	7	0,0463918	1,546392
2010	8	0,0463918	1,546392
2011	9	0,0463918	1,546392
2012	10	0,0463918	1,546392
2013	11	0,0463918	1,546392
2014	12	0,0463918	1,546392
2015	13	0,0463918	1,546392
2016	14	0,0463918	1,546392
2017	15	0,0463918	1,546392
2018	16	0,0463918	1,546392
2019	17	0,0463918	1,546392
2020	18	0,0463918	1,546392
2021	19	0,0463918	1,546392
2022	20	0,0463918	1,546392





1 2002 $1,5$

2003 $1,5 \cdot \left(\frac{103}{100}\right) \Rightarrow 1,5 \cdot \left(\frac{3}{100}+1\right)$

2004 $1,5 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^2$

2005 $1,5 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^3$

Modello matematico $\Rightarrow$ costo partenza $\cdot \left(\frac{100}{100} + \text{aumento in percentuale}\right)^n$

n = anni che passano

$n \geq 0$

1999 $1,5 \cdot \left(\frac{97}{100}\right)^3$ È SBAGLIATO

2000 $1,5 \cdot \left(\frac{97}{100}\right)^2$

2001 $1,5 \cdot \left(\frac{97}{100}\right) \rightarrow 1,5 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)$

2002 $1,5$

$n \leq 0$?

Modello matematico $\Rightarrow$ costo partenza $\left(\frac{100}{100} + \text{aumento in percentuale}\right)^n$

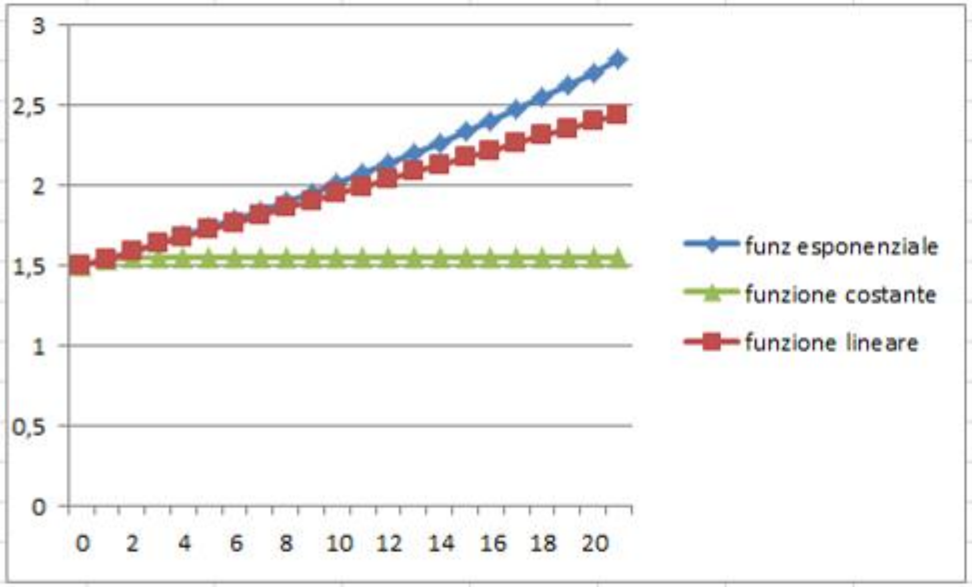
n = anni che passano

$n \geq 0$

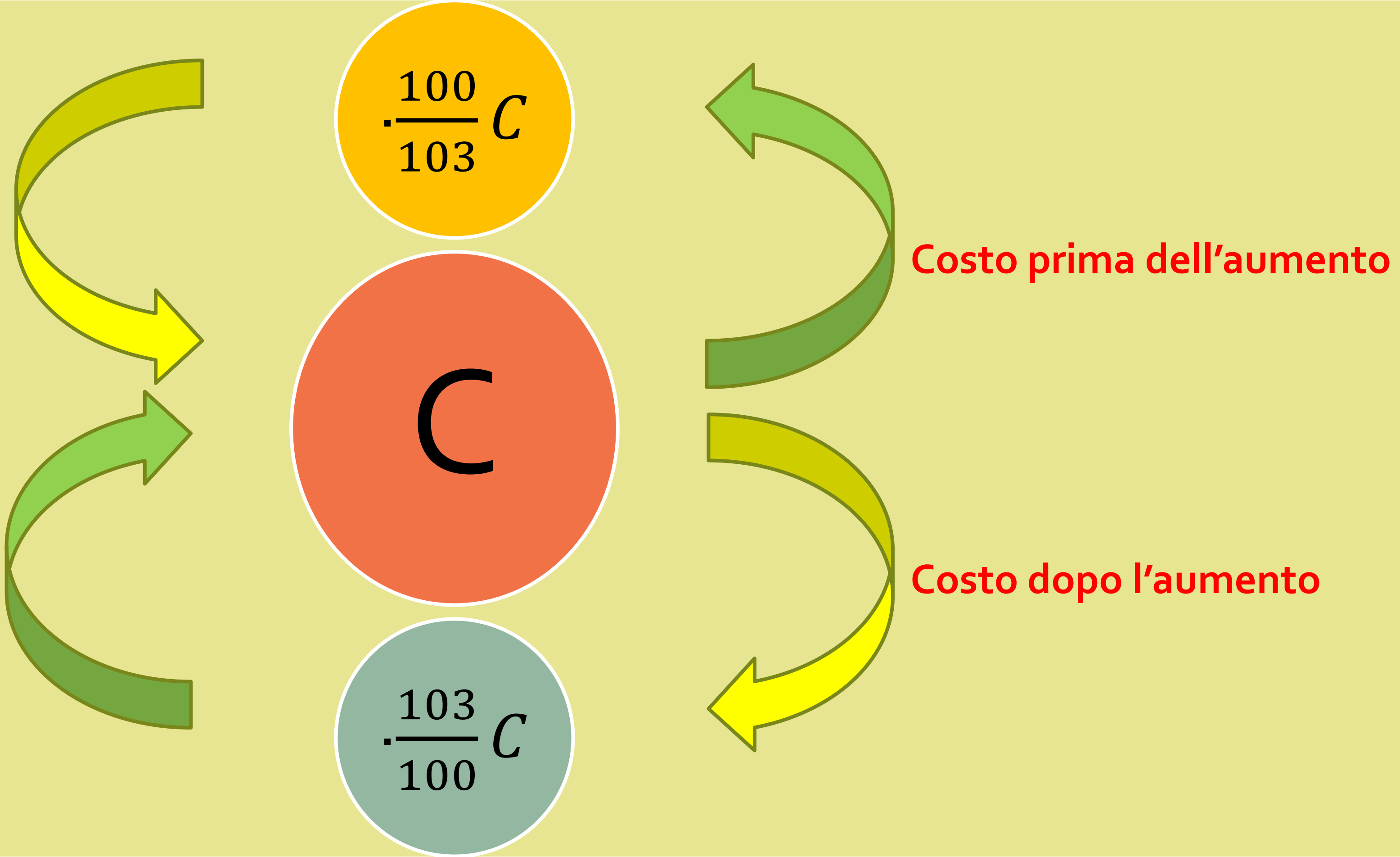
0	1,5
1	1,545
2	1,59135
3	1,639091
4	1,688263
5	1,738911
6	1,791078
7	1,844811
8	1,900155
9	1,95716
10	2,015875
11	2,076351
12	2,138641
13	2,202801
14	2,268885
15	2,336951
16	2,40706
17	2,479271
18	2,55365
19	2,630259
20	2,709167
21	2,790442

0	1,5
1	1,545
2	1,54635
3	1,546391
4	1,546392
5	1,546392
6	1,546392
7	1,546392
8	1,546392
9	1,546392
10	1,546392
11	1,546392
12	1,546392
13	1,546392
14	1,546392
15	1,546392
16	1,546392
17	1,546392
18	1,546392
19	1,546392
20	1,546392
21	1,546392

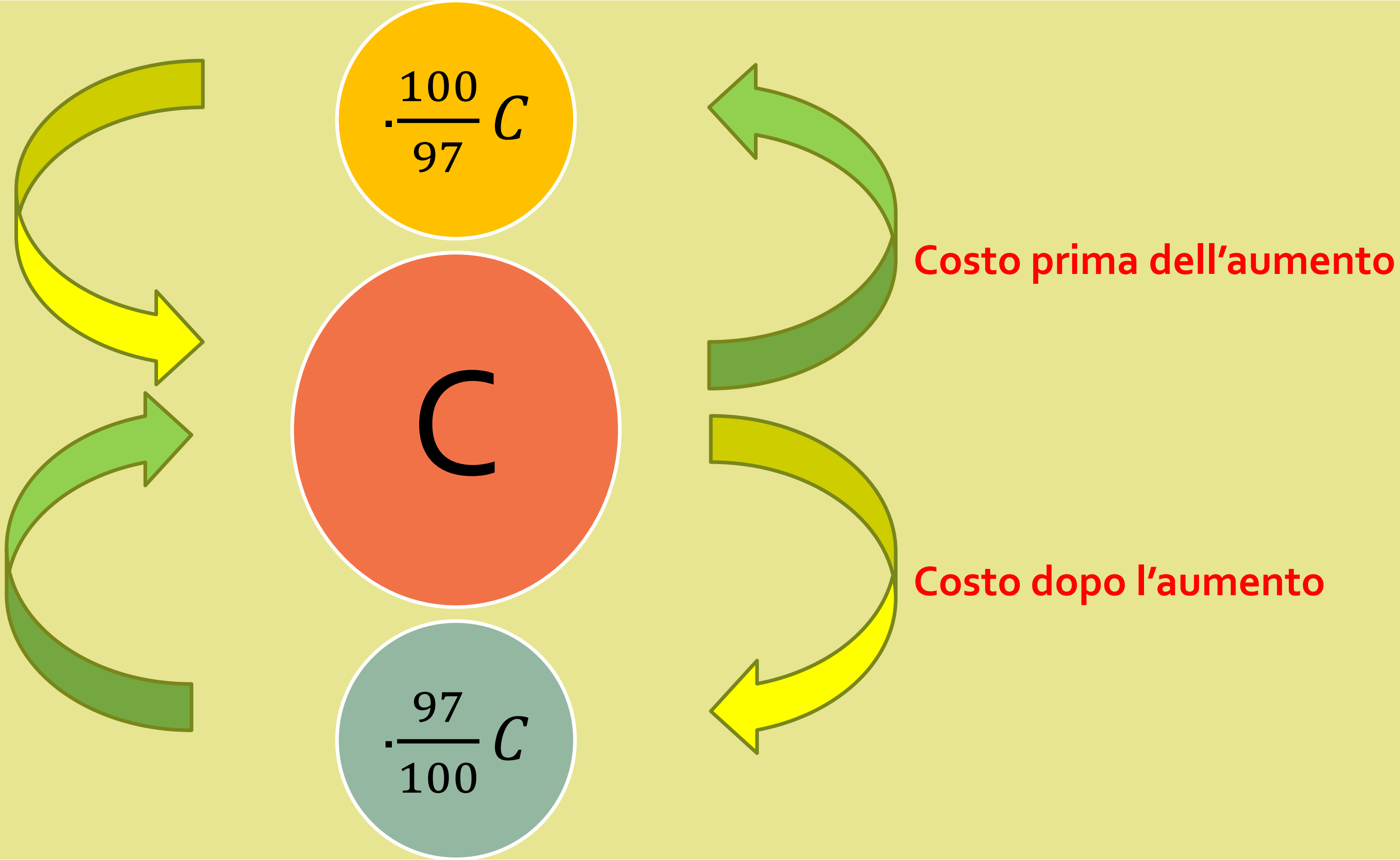
0	1,5
1	1,545
2	1,59
3	1,635
4	1,68
5	1,725
6	1,77
7	1,815
8	1,86
9	1,905
10	1,95
11	1,995
12	2,04
13	2,085
14	2,13
15	2,175
16	2,22
17	2,265
18	2,31
19	2,355
20	2,4
21	2,445



Aumento percentuale



Sconto percentuale



E se la percentuale non fosse la stessa per ogni anno?

Nel gennaio 2013 un chilogrammo di pane costava 1,50 euro. Nell'ipotesi che nel 2014 il prezzo sia aumentato del 2% rispetto all'anno precedente e che nel 2015 il prezzo sia aumentato del 4% rispetto all'anno precedente, qual è stato l'aumento medio?

$1{,}50 \cdot (1+x)$

$1{,}50 \cdot (1+x)^2 = 1{,}50 \cdot 1{,}0608$

$(1+x)^2 = 1{,}0608$

$1+x = 1{,}0299$

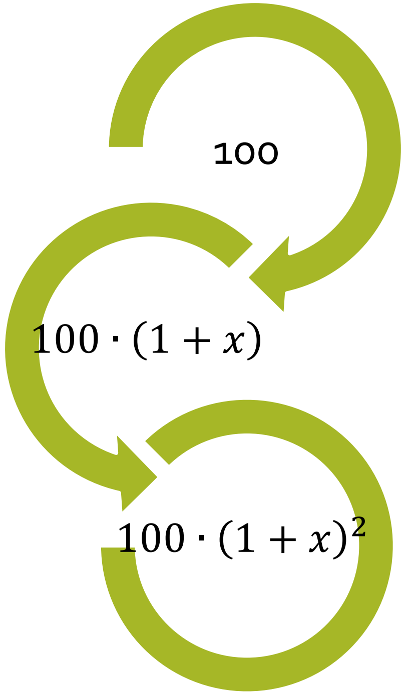
1,50

$1{,}50 \cdot 1{,}02$

$1{,}50 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04 = 1{,}50 \cdot 1{,}0608$

Dopo 2 anni di investimento il mio capitale di 100 euro è ora di 120, siamo portati a credere che l'interesse sia stato del 10% annuo. Sarà vero?

Formulazioni diverse dello stesso problema



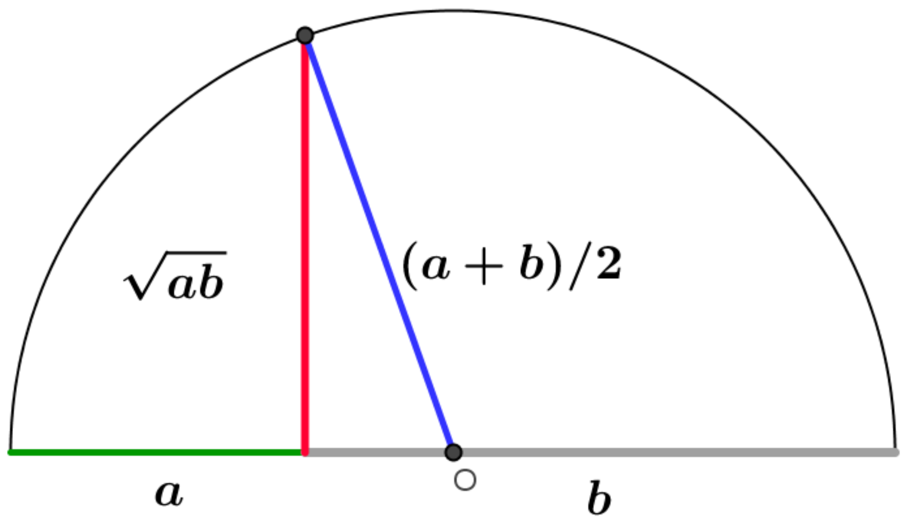
$100 \cdot (1+x)^2 = 120$

$(1+x)^2 = 1,2$

La media geometrica

La media aritmetica è sempre maggiore di quella geometrica, tranne nel caso in cui tutti i numeri di partenza siano uguali, e quindi lo siano anche le due medie.
Ci limitiamo al caso semplice di due soli elementi.

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ $a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$ $(a+b)^2 \geq 4ab$ $(a-b)^2 \geq 0$

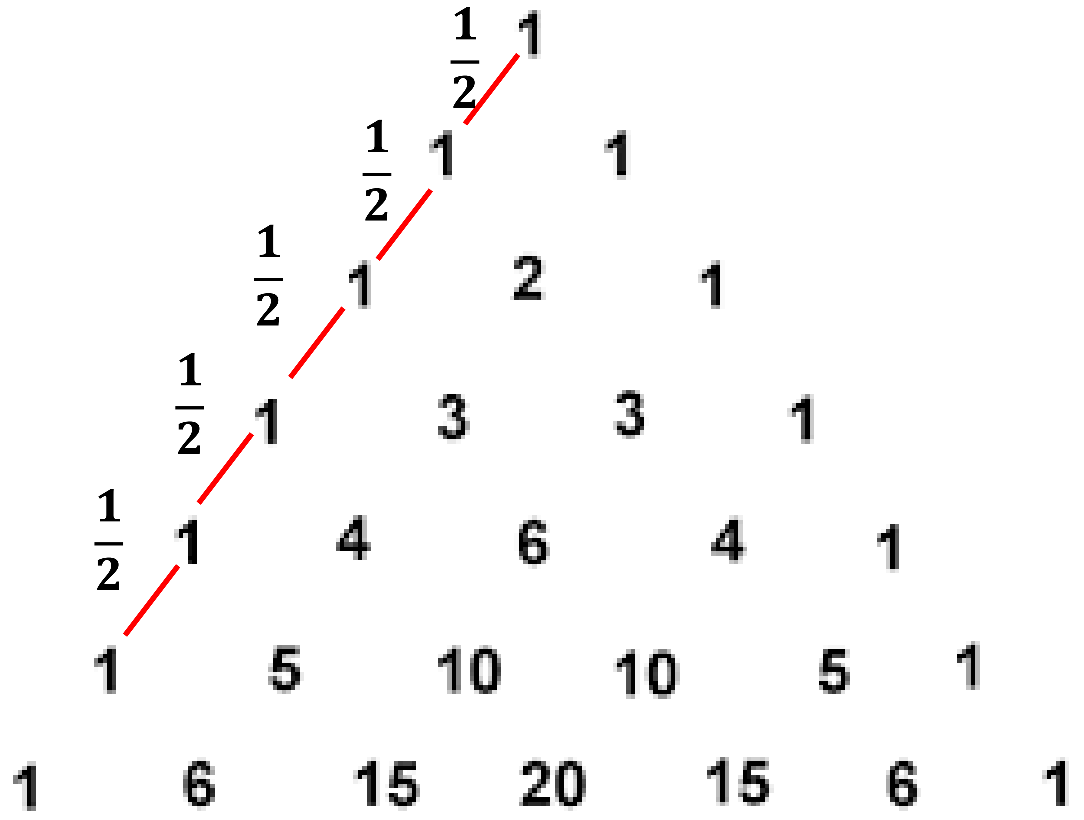


PROBLEMA 3

Lavoriamo sullo stesso modello

Sapendo che la probabilità esce “Testa” nel lancio di una moneta è 0,5, se lancio la moneta 5 volte qual è la probabilità che esca sempre “Testa”? E se la lancio 100 volte?

$$P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$



$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

1

T 1 1 C

$TT = T^2$ 1 2 TC 1 $CC = C^2$

$CTT = CT^2$ 1 3 3 1 $TCC = TC^2$

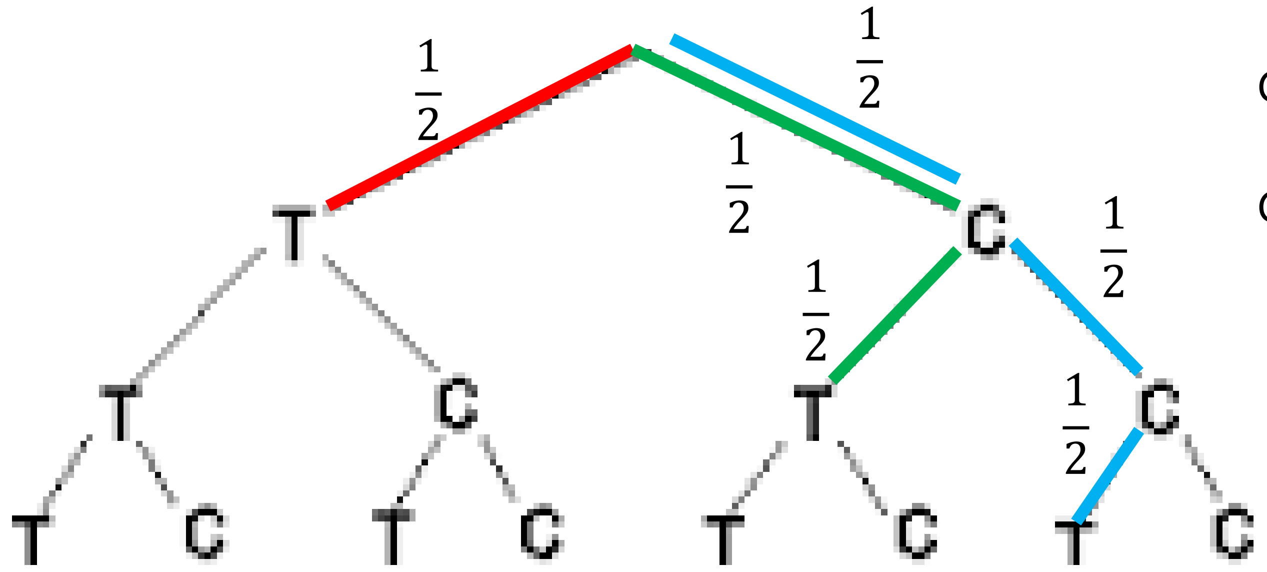
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Gioco aleatorio

Ci possiamo chiedere qual è la probabilità che, nel lancio di una moneta, l'uscita "testa" accada al primo lancio, al secondo lancio, al terzo ecc.



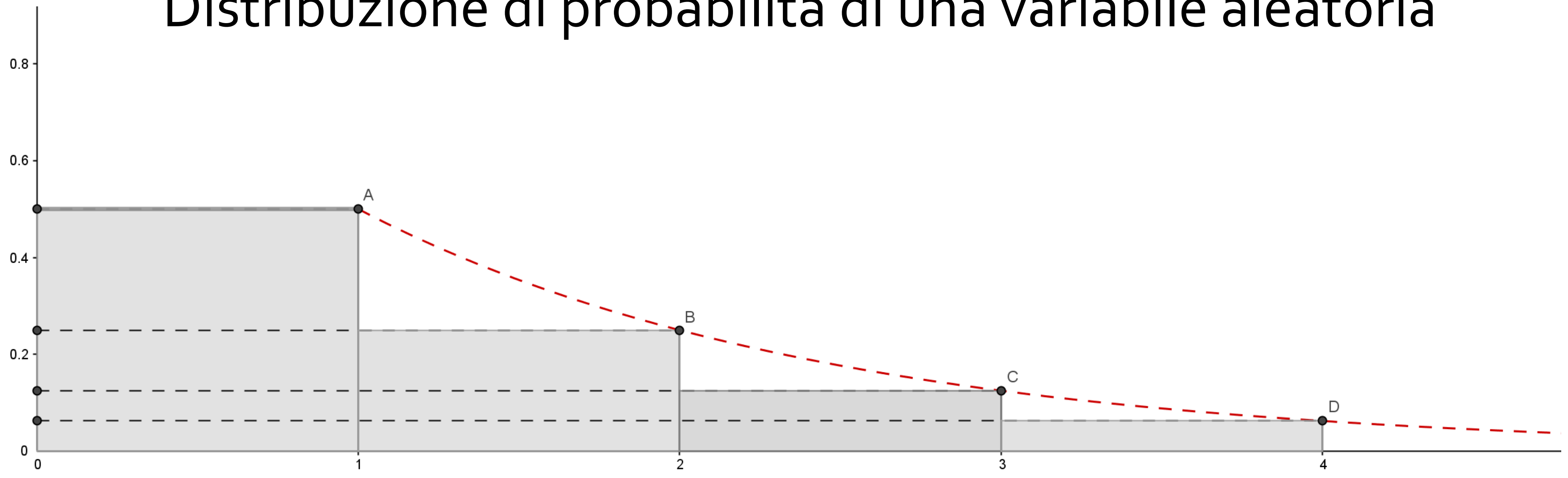
Compare al primo lancio con probabilità $\frac{1}{2}$

Compare al secondo lancio con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Compare al terzo lancio con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$\frac{1}{2};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \dots;\ \left(\frac{1}{2}\right)^n;\ \dots$$

Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria



$$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & \dots. & n & \dots \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \dots. & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \dots. \end{cases}$$

Con $\quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 1$

POSSIBILE apertura sulle funzioni esponenziali

- In scienze

La riproduzione per scissione

La fissione

Il decadimento radioattivo

- In economia

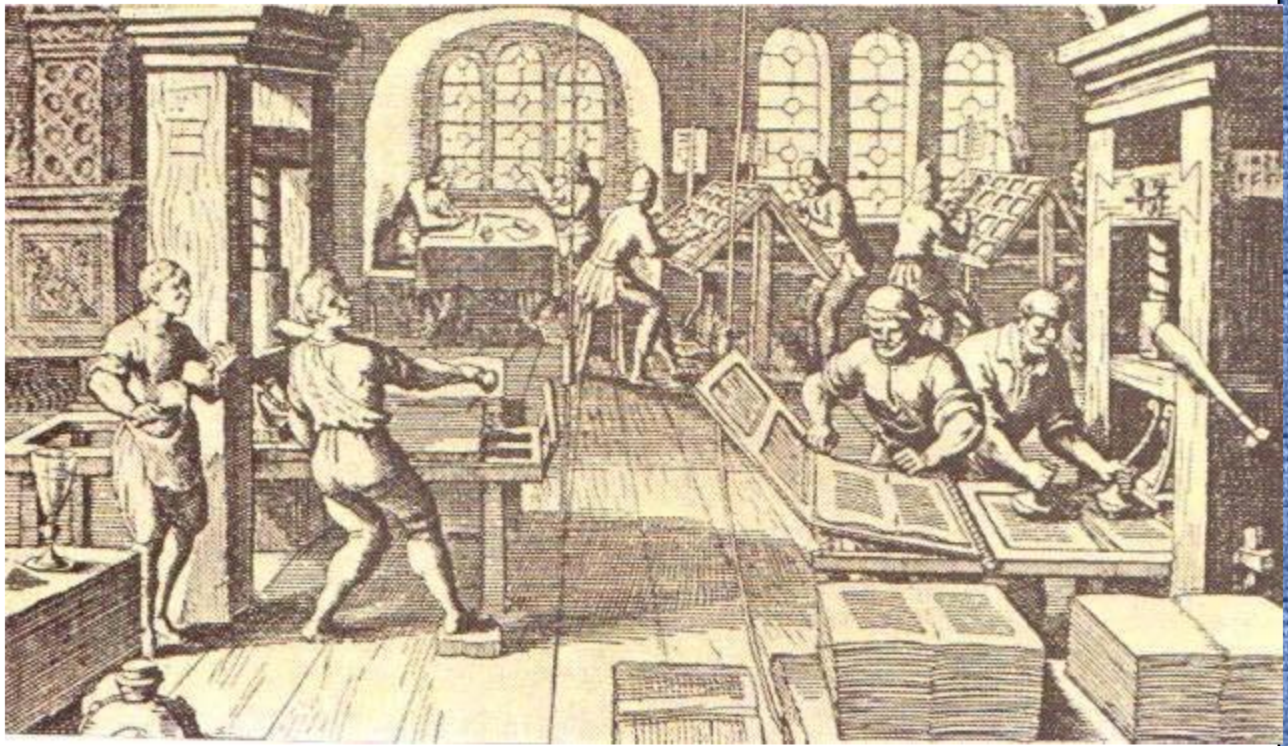
Ammortamenti

Tassi ad interesse composto

- Successioni e serie geometriche
- Calcolo combinatorio
- ....

PROBLEMA **27 aprile 2016**

In una classe di 12 studenti Piero, Claudio e Francesco sono molto amici. Qual è la probabilità che, dovendo scegliere a caso tre rappresentanti della classe, vengano eletti proprio loro tre?



(2) Abbiamo notato che la probabilità che un solo amico venga eletto è $\frac{1}{12}$, quindi abbiamo pensato che la probabilità fosse $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

(3) Successivamente, abbiamo pensato che la probabilità ragionata non fosse corretta, e quindi, per trovare una soluzione al problema, abbiamo provato ad usare il metodo usato per il calcolo della probabilità testa | croce con il lancio di 3 monete.

(4) (a) Usando questo metodo, abbiamo trovato i seguenti casi;

(a) Tutti e tre vengono eletti;
(b) Per 3 volte, due su tre vengono eletti;
(c) Per 3 volte, uno su tre viene eletto;
(d) Nessuno dei tre viene eletto.

(b) Con:

O = amico

X = compagno di classe (non amico)

Abbiamo riassunto con una generalità i calcoli eseguiti:

(a) OOO

(b) 3(OOX)

(c) 3(OXX)

(d) XXX

(c) La probabilità risulta $\frac{1}{8}$, perché in 1 caso su 8 si ~~xxx~~ verifica l'elezione di tutti e tre gli amici.

(5) (a) Successivamente, abbiamo notato che la probabilità, per essere verificata, aveva bisogno di un approfondimento; perciò abbiamo calcolato delle permutazione dei casi trovati:

(a) OOO → 9 permutazioni
(b) 3(OOX) → 27 permutazioni
(c) 3(OXX) → 27 permutazione
(d) XXX → 9 permutazioni

(b) La probabilità risulta $\frac{9}{72}$ e:

$$\boxed{\frac{9}{72} = \frac{1}{8}}$$

Regolarità osservata.

(6) (a) Dopodiché, corretti dalla prof, abbiamo riformulato le permutazioni:

(a) OOO → 6 permutazioni
(b) 3(OOX) → 18 permutazioni
(c) 3(OXX) → 18 permutazioni
(d) XXX → 6 permutazioni

(6) La probabilità risulta $\frac{6}{48}$ e:

$$\boxed{\frac{6}{48} = \frac{1}{8}}$$

Regolarità osservata.

(7) Infine, ci siamo posti la seguente domanda:
"Perché viene sempre $\frac{1}{8}$? È una proprietà delle operazioni o una conferma della bontà della soluzione?"

12 STUDENTI

PIERO, CLAUDIO, FRANCESCO (AMICI)

? = PROBABILITÀ CHE ESCANO TUTTI E TRE GLI AMICI.

IP_1: $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}} = 25\%$

poi ci sembrava troppo semplice e abbiamo deciso di trovare un'altra ipotesi, cercando anche analogie con problemi già svolti.

IP_2: $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{\cancel{12}^{6} \cdot 13}{\cancel{2}} = 78$

$P = \frac{1}{78} = 1{,}3\%$

abbiamo pensato che il problema fosse come quello delle strette di mano.

poi ci è venuto in mente che il problema fosse simile a quello dei cubetti. Però abbiamo deciso di scartare l'ipotesi perché nel problema dei cubetti era importante anche l'ordine di estrazione mentre in questo problema no. Quindi siamo passati ad altre ipotesi.

IP_3: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

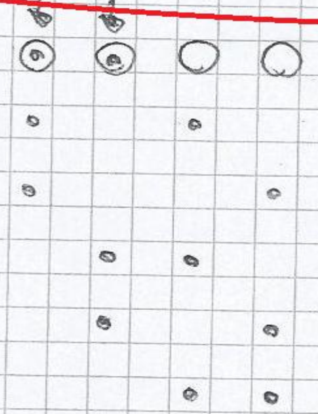
$P = \frac{1}{66} = 1{,}5\%$

Dopo abbiamo pensato che fosse come il problema delle strette di mano, ma con l'aggiunta della

DOM: Se aumentiamo i candidati, cambia la probabilità? Se sì aumenta o diminuisce?

poi ci siamo posti una domanda a cui non dobbiamo dato una risposta certa.

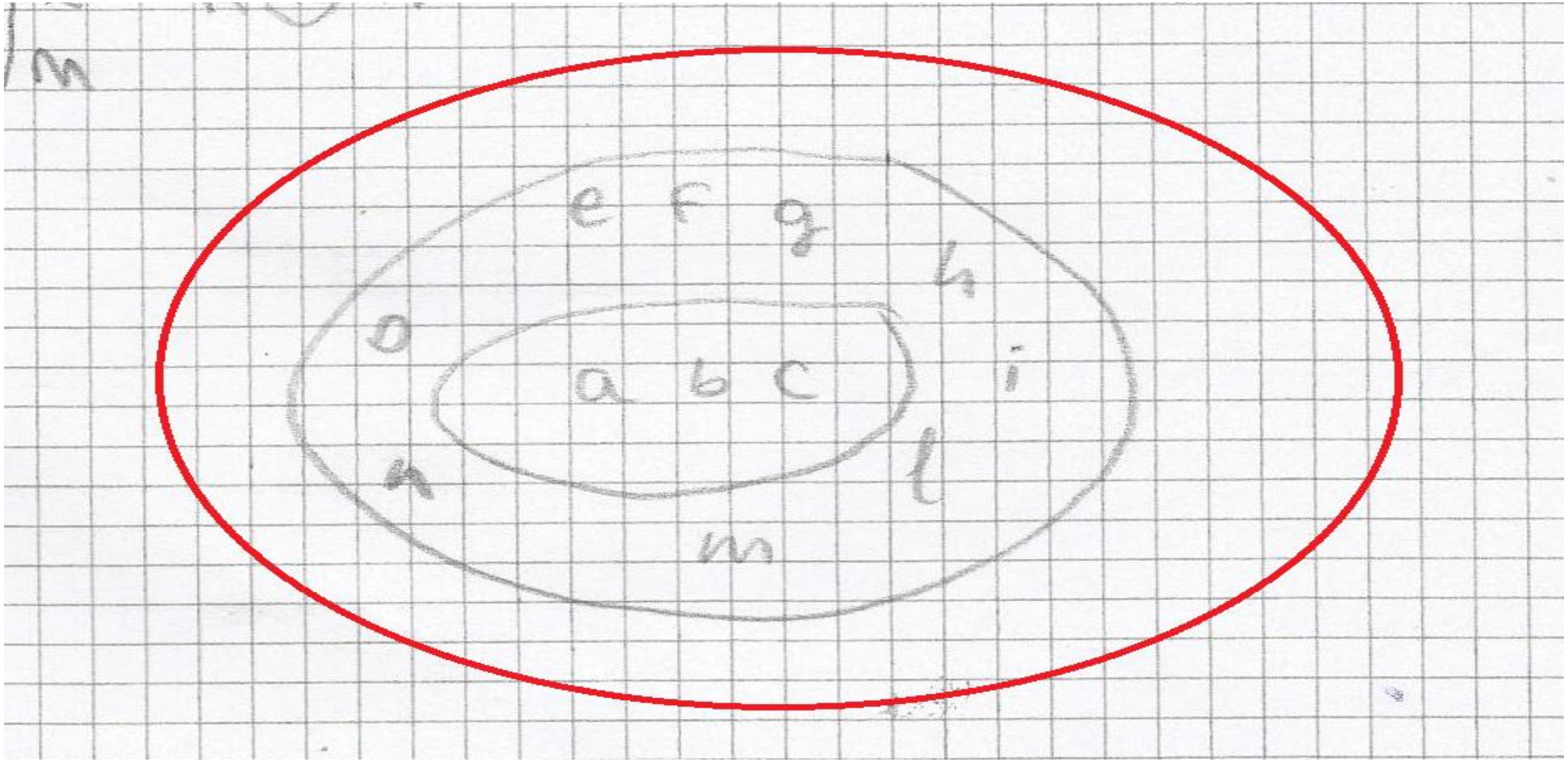
Abbiamo preso dei numeri più semplici per risolvere il problema e abbiamo provato con 4 studenti e 2 amici



Tutti casi possibil sono 6 e quelli favorevoli 1

Quindi la probabilità è $\frac{1}{6}$

Abbiamo provato con 5 studenti e 2 amici


m
e f g
h
a b c
i
l
m

- É ANALOGO AL PROBLEMA DEI CUBETTI
- PER IL PRIMO CANDIDATO C'È 1 POSSIBILITÀ SU 12, PER IL SECONDO 1 SU 11 E PER IL TERZO 1 SU 10
- CALCOLO PROBABILITÀ TOTALI: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1320} = \frac{\text{POSSIBILITÀ}}{\text{COMBINAZIONI TOTALI}}$
- CI SONO 6 POSSIBILITÀ CHE VENGANO ESTRATTI I 3 AMICI, QUINDI $\frac{6}{1320} = \frac{1}{220}$

“Una grande scoperta risolve un grande problema, ma nella soluzione di qualsiasi problema c'è un pizzico di scoperta.
Il tuo problema può essere modesto, ma se stimola la tua curiosità, tira in ballo la tua inventiva e lo risolvi con i tuoi mezzi, puoi sperimentare la tensione e gioire del trionfo della scoperta.”

GEORGE PÓLYA (1883 – 1985)

Nello scrivere articoli pubblicati nelle riviste scientifiche siamo abituati a presentare il lavoro quanto più terminato possibile, nascondere tutte le strade tentate, non preoccuparsi dei vicoli ciechi per cui si è passati o descrivere come si era iniziato dall'idea errata, e così via. Insomma, non c'è alcun posto dove pubblicare in maniera degna cosa si è davvero fatto per arrivare a quei risultati.

Discorso per il Nobel, 1966 **Richard Philips Feynman (1918 – 1988)**

BIBLIOGRAFIA

- http://www.indicazioninazionali.it/
- http://nuovilicei.indire.it/
- http://nuovitecnici.indire.it/
- http://nuoviprofessionali.indire.it/
- http://archivio.pubblica.istruzione.it

- GIUSTO O SBAGLIATO? QUESTO È IL PROBLEMA

M. Dedò, L. Sferch, Pubblicato originariamente col titolo "*Right or Wrong? That is the Question*", in Notices of the Amer.Math. Soc. , vol. **59**, n.ro 7 (Agosto 2012), pagg. 924-932

(http://www.ams.org/notices/201207/rtx120700924p.pdf).

- D.W. Johnson, R.T Johnson E. J. Holubec "Apprendimento cooperative in classe" Erickson, 1996 (seconda edizione marzo 2015)

- Maria Dedò Simonetta Di Sieno, *Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuti e metodologie*

9/11/2012 htpp://arXiv.org/abs/1211.2159

- S.Locatello, G. Meloni , *Apprendimento collaborativo in Matematica*, ed. Pitagora 2003, (con la prefazione di Lino Vianello)

- P. Lockart, *Contro l'ora di Matematica,* Rizzoli, 2010

- M. Comoglio, M.A. Cardoso, Insegnare e apprendere in gruppo, LAS Roma, 1996

bibliografia

- http://www.quadernoaquadretti.it/scuola/riflessioni/spirito_08.pdf
- R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer, 2007
- *Contro l'ora di matematica*, Rizzoli, 2010; originariamente come *A mathematician's lament.* ttp://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf.

- Giuliano Spirito

http://www.cidi.it/cms/doc/open/item/filename/334/asse-matematico.pdf

- Prof. Paolo Lorenzi in Rosetta Zan *«Matematica un problema da risolvere»*, Quaderni di Rassegna 3, edizioni Junior, 2008