Università degli Studi di Bergamo — Scuola di Ingegneria
Analisi Matematica I — 7 Luglio 2022

Parte A

Cognome e Nome ______________________________ Matr. ____________

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1. a. Calcolare
$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx.$$

b. Si consideri
$$\int_3^4 \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx.$$

Stabilire se è un integrale definito oppure generalizzato. Se definito, calcolarlo. Se generalizzato, stabilire se è convergente o se è divergente usando un opportuno criterio, verificando prima che le ipotesi siano soddisfatte.

2. Calcolare il seguente limite, giustificando ogni passaggio:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5-1\right)\log(e^n+1)}{(n+\cos(n))\sin\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

3. a. Studiare la monotonia della funzione
$$g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

b. Calcolare la derivata seconda della funzione
$$h(x) = \operatorname{arctg}(1+x^2).$$

c. Rappresentare il grafico di una funzione $f(x)$ con le seguenti caratteristiche:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = 1$$
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 3+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$$
$$f'(-1) = 0, \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty, \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = +\infty.$$

Inoltre, la funzione è monotona crescente per $x \in (-\infty, -1] \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.
Una volta rappresentato il grafico, scrivere le equazioni di eventuali asintoti, determinare i punti di massimo e di minimo locali e globali, indicare gli eventuali punti di discontinuità deducibili dalle informazioni date e caratterizzarli, indicare gli eventuali punti di non derivabilità deducibili dalle informazioni date e caratterizzarli.

4. Si consideri la serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^\alpha - n - 2}.$$

a. Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha = 2$

b. Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha = 3$