

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1. Siano date le seguenti successioni:

$$a_n = -\frac{n!}{(n-3)!} \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}$$

$$c_n = n \log\left(1 + e^{\sqrt{n}}\right)$$

$$d_n = (2n + e^{-n}) \log(n).$$

- Trovare la più semplice successione asintotica a ciascuna di esse.
- Disporre le successioni in ordine crescente di infinito giustificando la propria disposizione calcolando opportuni limiti.

2. Sia data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

Fornire uno studio completo della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, eventuali simmetrie, i limiti al bordo del dominio, i punti di discontinuità, eventuali asintoti, monotonia, punti di massimo e di minimo sia locali che globali, convessità e flessi. Inoltre

- disegnare un grafico probabile della funzione in base alle informazioni ottenute.
- scrivere la formula di Taylor all'ordine $n = 2$ con resto secondo Peano centrata in $x_0 = 1$.

3. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\left(\frac{\sqrt{n^3+2n^3}}{2n^3}\right)} - e \right) \frac{1}{n^\alpha}.$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$$