

Parte A

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1. Determinare, se esistono, i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\cos x} - e^x}{x} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ ax + b & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 0$ e quelli per cui è derivabile in $x_0 = 0$.

2. Sia data la funzione $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

Fornire uno studio completo della funzione, in particolare studiare l'insieme di definizione, il segno della funzione, i limiti al bordo del dominio, eventuali asintoti, monotonia, punti di massimo e di minimo sia locali che globali, convessità e punti di flesso. Inoltre

- fornire una stima asintotica della funzione in un intorno di ognuno dei suoi zeri
- disegnare un grafico probabile della funzione in base alle informazioni ottenute.

3. Stabilire il carattere della serie seguente al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\log \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right)^\alpha .$$

4. Calcolare il seguente integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{\log^2(x)}{x^2} dx$.