ESERCIZIO 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x + x^2} - \sqrt{1+\sin x}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{\sin x}+x^{\cancel{2}}-\cancel{1}-\cancel{\sin x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\sin x+x^2}+\sqrt{1+\sin x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+\sin x+x^2}+\sqrt{1+\sin x}} = 0$$

ESERCIZIO 2

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)$$

DOMINIO

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} > 0$$

N: $x(x+2) > 0$

$x < -2 \lor x > 0$

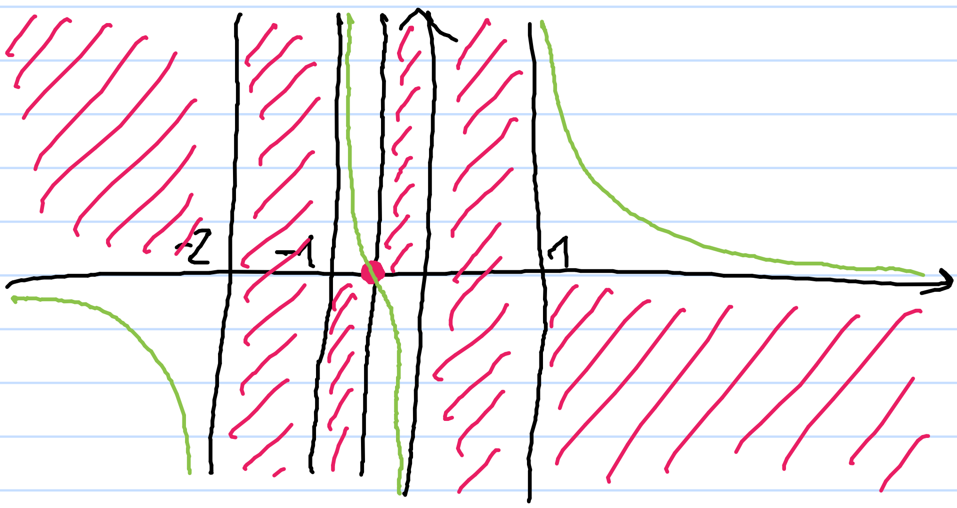
D: $x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1$

$x < -1 \lor x > 1$

	-2		-1		0		1	
		$- - -$		$- -$				
				$- -$		$- - \cdot$		
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

LA FUNZIONE È DEFINITA IN

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$



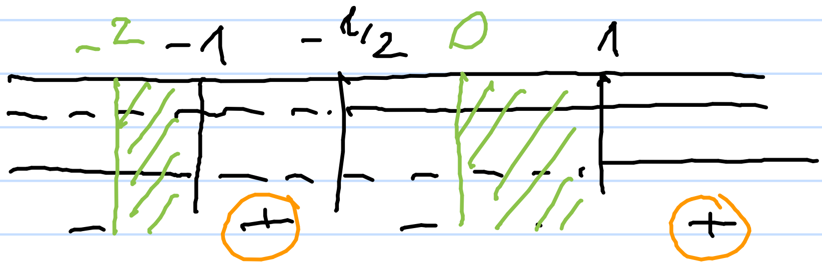
SEGNO

$$f(x)>0 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)>0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}>1 \Rightarrow \frac{x^2+2x-x^2+1}{x^2-1}>0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x+1}{x^2-1}>0 \qquad N:\ 2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

$$D:\ x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \lor x>1$$



LA FUNZIONE È POSITIVA PER

$$-1<x<-\frac{1}{2} \quad E \quad x>1$$

LA FUNZIONE SI ANNULLA IN $x=-\frac{1}{2}$.

SIMMETRIE

LA FUNZIONE NON È NÉ PARI NÉ DISPARI (DOMINIO NON SIMMETRICO)

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x^2-1+1+2x}{x^2-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(1+\underbrace{\frac{2x+1}{x^2-1}}_{\to 0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\frac{2x+1}{x^2-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-2^-} \log\left(\frac{x(x+2)}{x^2-1}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{-2\cdot 0^-}{3}\right) = -\infty \qquad \to 0^+$$

$$\lim_{x\to-1^+} \log\left(\frac{x^2+2x}{(x-1)(x+1)}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{-1}{-2\cdot 0^+}\right) = +\infty \qquad \to +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \log\left(\frac{x(x+2)}{x^2-1}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{0^-\cdot 2}{-1}\right) = -\infty \qquad \to 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x^2+2x}{(x-1)(x+1)}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{3}{0^+\cdot 2}\right) = +\infty$$

$+\infty$

ASINTOTI

LA FUNZIONE HA UN ASINTOTO ORIZZONTALE DI EQUAZIONE $y=0$ A $+\infty$ E A $-\infty$.

LA FUNZIONE HA QUATTRO ASINTOTI VERTICALI DI EQUAZIONE $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{\cancel{x^2-1}}{x^2+2x}\cdot\frac{(2x+2)(x^2-1)-(x^2+2x)2x}{(x^2-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-2x+2x^2-2-\cancel{2x^3}-4x^2}{(x^2+2x)(x^2-1)} =$$

$$= -\frac{2x^2+2x+2}{(x^2+2x)(x^2-1)}$$ 1

MONOTONIA

$$f'(x)>0 \Rightarrow -\frac{2x^2+2x+2}{(x^2+2x)(x^2-1)}>0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x^2+2x)(x^2-1)}<0$$

N: $2x^2+2x+2>0 \Rightarrow \forall x$

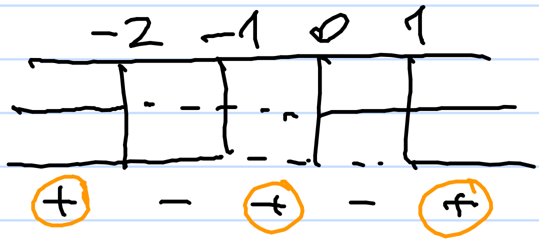
$\Delta = 4-16<0$

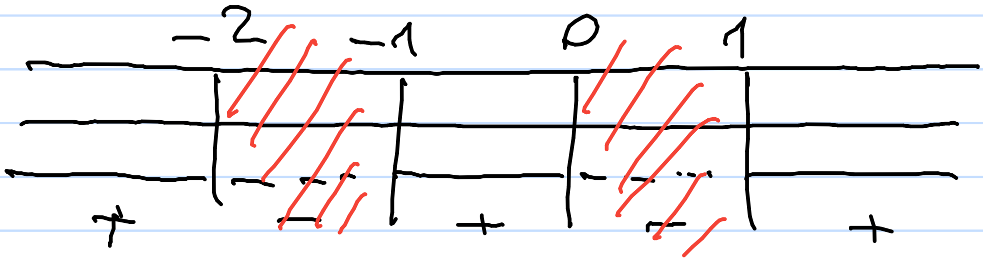
D: $(x^2+2x)(x^2-1)>0$

$x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0$

$x<-2 \vee x>0$

$x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \vee x>1$





LA DISEQUAZIONE $f'(x)>0$ NON È MAI VERIFICATA QUINDI LA FUNZIONE È SEMPRE DECRESCENTE.

NON CI SONO PUNTI DI MAX E MIN NÈ LOCALI NÈ GLOBALI.

ESERCIZIO 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-1 \cdot \frac{2}{3}\right)^n \cdot 2 =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

È UNA SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE $q = -\frac{2}{3}$. DATO CHE $|q| < 1$ LA SERIE CONVERGE.

CALCOLO LA SOMMA:

$$s = 2 \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2 \cdot \frac{3}{3+2} = \frac{6}{5}$$

ESERCIZIO 4

$$\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3+x} - x^{3/2}\right) dx$$

SIA $f(x) = \sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3}$. LA FUNZIONE È DEFINITA IN:

$$\begin{cases} x^3+x \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2+1) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE $[1, +\infty)$ LA FUNZIONE È CONTINUA E POSITIVA. POSSO USARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:

$$f(x) = \frac{x^3+x-x^3}{\sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3}} =$$

$$= \frac{x}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x^{3/2}} =$$

$$= \frac{x}{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \underset{(x\to+\infty)}{\sim}$$

$$\sim \frac{1}{2x^{3/2-1}} = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

DAL MOMENTO CHE PER $x \to +\infty$
SI HA

$$f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

L'INTEGRALE DI PARTENZA
NON CONVERGE $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$