ESERCIZIO 1

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\cos x} - e^x}{x} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$$

CONTINUITÀ

$$f_{a,b}(0) = b$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f_{a,b}(0) = b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{0}$$

USO DE L'HOPITAL:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}} \sin x - e^x}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - e^x = -1$$

LA FUNZIONE È CONTINUA IN 0 SE E SOLO SE $b = -1$.

DERIVABILITÀ

SIA $b = -1$, ALTRIMENTI LA FUNZIONE NON È CONTINUA E QUINDI NEANCHE DERIVABILE

$$f_{a,-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\cos x} - e^x}{x} & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ ax - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'^{+}_{a,-1}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{\sqrt{\cosh} - e^h}{h} + 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{\cosh} - e^h + h}{h^2} = \frac{0}{0}$$

USO DE L'HOPITAL:

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(\cosh)^{-1/2} \sinh h - e^h + 1}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-\dfrac{\sinh}{2\sqrt{\cosh}} - e^h + 1}{2h} = \frac{0}{0}$$

USO DE L'HOPITAL:

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}(\cosh)^{-3/2}(\sinh)^2 - \frac{1}{2}(\cosh)^{-1/2}\cosh - e^h}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{4}$$

$$f'^{-}_{a,-1}(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{ah-1+1}{h} = a$$

LA FUNZIONE È DERIVABILE IN $x=0$ SE E SOLO SE

$$b=-1 \quad E \quad a=-\frac{3}{4}$$

ESERCIZIO 2

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$$

DOMINIO

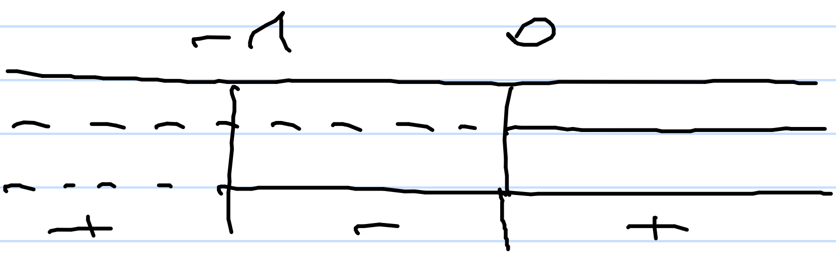
$$1+x^3 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq -1 \Rightarrow x \neq -1$$

SEGNO

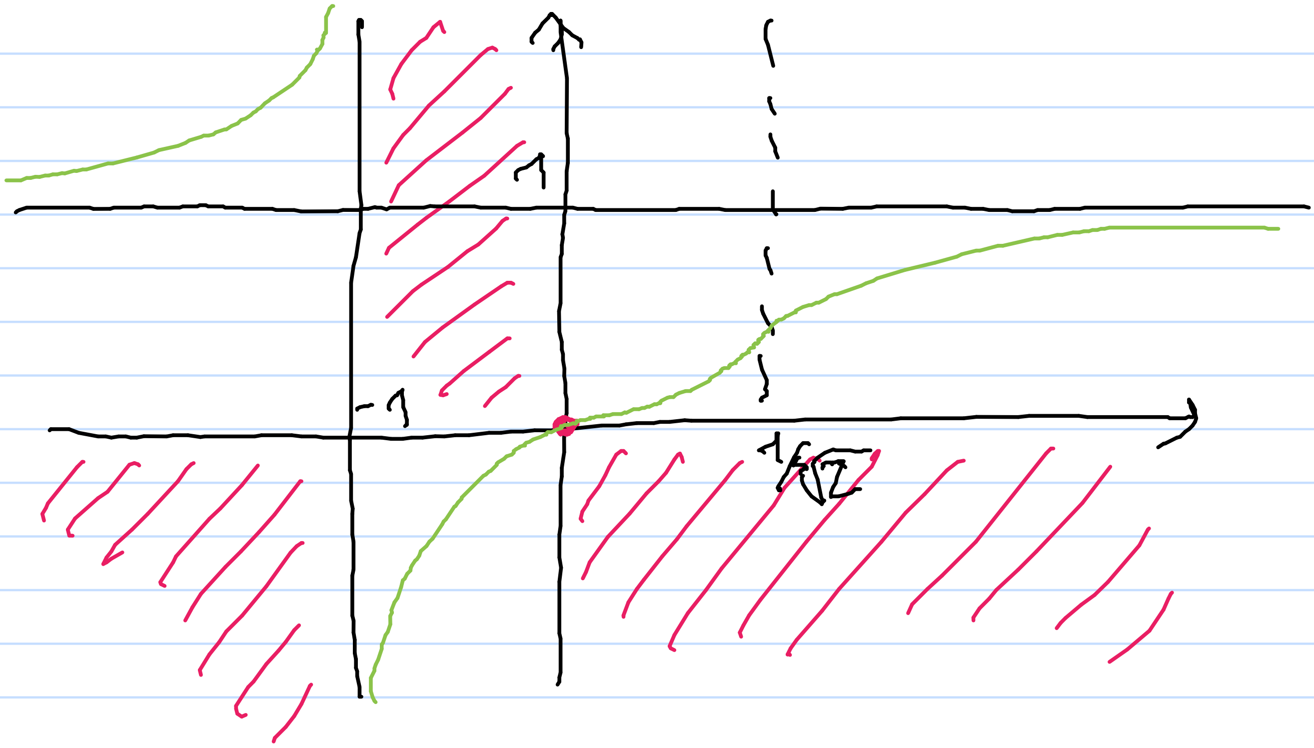
$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{1+x^3} > 0$$

$$N: x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$D: 1+x^3 > 0 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x > -1$$



LA FUNZIONE È POSITIVA PER $x<-1$ E $x>0$



LIMITI

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{1+x^3} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{1+x^3} = \frac{-1}{1-1^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{1+x^3} = \frac{-1}{1-1^+} = +\infty$$

ASINTOTI

LA FUNZIONE HA UN ASINTOTO ORIZZONTALE DI EQUAZIONE $y=1$ A $+\infty$ E $-\infty$

HA UN ASINTOTO VERTICALE DI EQUAZIONE $x=-1$

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x^3) - x^3(3x^2)}{(1+x^3)^2} =$$

$$= \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

MONOTONIA

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{(1+x^3)^2} > 0 \quad \forall x \in D$$

LA FUNZIONE È SEMPRE CRESCENTE. NON CI SONO MAX E MIN.

INOLTRE $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

QUINDI $x=0$ È UN PUNTO STAZIONARIO: NON È PUNTO DI MAX E MIN. È UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{6x(1+x^3)^2 - 3x^2 \cdot 2(1+x^3)3x^2}{(1+x^3)^4}$$

$$= \frac{6x(1+x^3) - 18x^4}{(1+x^3)^3} =$$

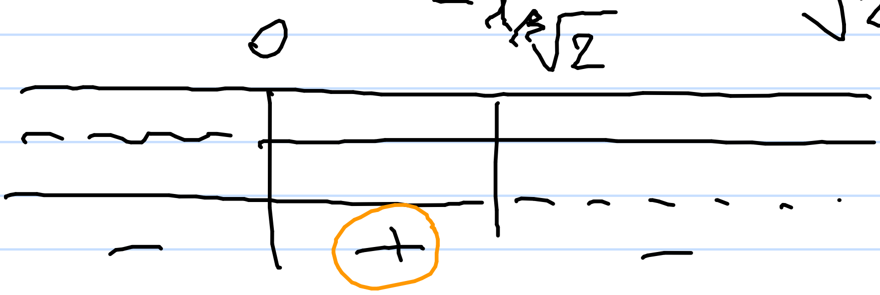
$$= \frac{6x(1-2x^3)}{(1+x^3)^3}$$

CONVESSITÀ

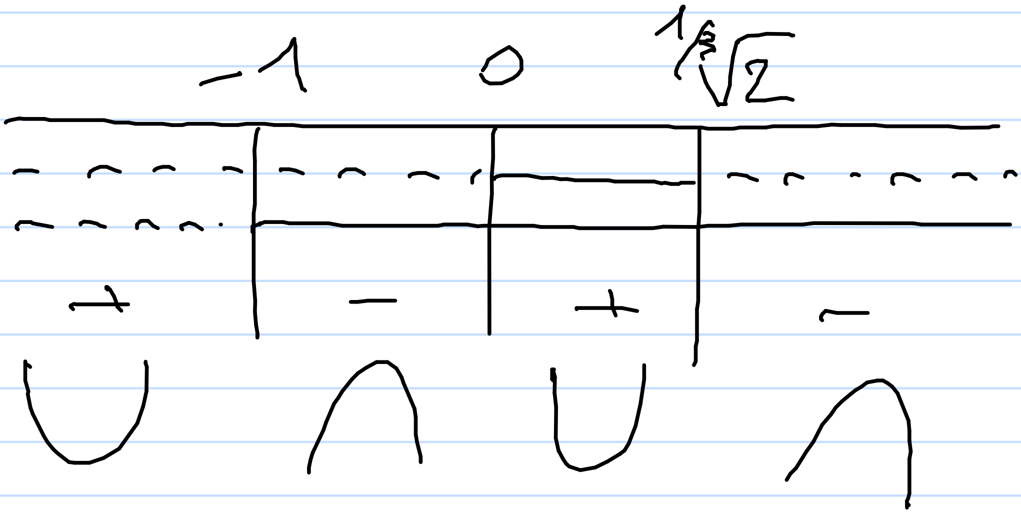
$$f''(x)>0 \Rightarrow \frac{6x(1-2x^3)}{(1+x^3)^3}>0$$

N: $6x(1-2x^3)>0$

- $6x>0 \Rightarrow x>0$
- $1-2x^3>0 \Rightarrow 2x^3<1 \Rightarrow x^3<\frac{1}{2} \Rightarrow x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$



D: $(1+x^3)^3>0 \Rightarrow 1+x^3>0 \Rightarrow x^3>-1 \Rightarrow x>-1$



LA FUNZIONE È CONVESSA PER $x<-1$ E PER $0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. LA FUNZIONE È CONCAVA PER

$-1 < x < 0$ E PER $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

LA FUNZIONE HA UN PUNTO DI FLESSO IN $x=0$ E IN $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

ⓐ ASINTOTICO IN UN INTORNO DI $x=0$:

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^3} \underset{(x\to 0)}{\sim} x^3$$

ESERCIZIO 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^{\alpha} \quad \text{CON } \alpha > 0$$

LA SERIE È A TERMINI POSITIVI:

$$a_n = \left(\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^{\alpha} > 0 \quad \forall n \geq 0$$

USO IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:

$$\left(\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^{\alpha} = \left(\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)^{\alpha} \underset{(n\to+\infty)}{\sim}$$

$$\sim \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

QUINDI SE $\alpha > 1$ LA SERIE CONVERGE, SE $0 < \alpha \leq 1$ LA SERIE DIVERGE

ESERCIZIO 4

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^2(x)}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{\log^2(x)}{x^2}\,dx$$

CALCOLO $I = \int \frac{\log^2(x)}{x^2}\,dx = \int \log^2(x)\, x^{-2}\,dx$

SIA $f = \log^2(x)$ $\qquad f' = 2\log(x)\frac{1}{x}$

$g' = x^{-2}$ $\qquad g = -x^{-1}$

QUINDI

$$I = -\frac{\log^2(x)}{x} + 2\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$$

SIA $II = \int \log(x)\, x^{-2}\,dx$:

$f = \log x$ $\qquad f' = \frac{1}{x}$

$g' = x^{-2}$ $\qquad g = -x^{-1}$

QUINDI

$$II = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\log x}{x} + \int x^{-2}\,dx =$$

$$= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

ALLORA

$$I = -\frac{\log^2(x)}{x} - \frac{2\log x}{x} - \frac{2}{x} + C$$

CALCOLO IL LIMITE:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\log^2(x)}{x^2}\,dx =$$

$$\lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{\log^2(x)}{x} - \frac{2\log x}{x} - \frac{2}{x}\right)_1^M =$$

$$\lim_{M\to+\infty} -\frac{\log^2 M}{M} - \frac{2\log M}{M} - \frac{2}{M} + 2 = 2$$

$\downarrow$ 0 (GI) $\quad \downarrow$ 0 (GI) $\quad \downarrow$ 0