Università degli Studi di Bergamo — Scuola di Ingegneria
Analisi Matematica I — Tema del 17/01/2020 - Versione 4

Cognome e Nome ______________________ Matr. __________ Corso di studi __________

Intendo sostenere la prova di teoria nell'appello di GENNAIO ☐

1. (9 pt.) Si consideri la funzione
$$f(x) = e^x \left(x^2 + x - 2\right)$$
   a) Studiare la funzione f (insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, derivata prima, crescere e decrescere, punti di massimo e di minimo, eventuali punti di non derivabilità, **non è richiesto lo studio della derivata seconda**) e disegnarne un grafico approssimativo in base alle informazioni ottenute.
   b) Calcolare tramite la definizione l'integrale generalizzato
$$\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (6 pt.) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} - 1 \right).$$

3. (6 pt.) **Giustificando le proprie affermazioni,** determinare la più semplice successione asintotica alla seguente
$$a_n = (n+1)^2 \left(e^{\frac{1}{n}-n} - e^{-n}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right).$$

4. (6 pt.)
   a) Determinare per quali valori dei parametri $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-b)x + b & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{1+ax} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
   è continua nel punto $x_0 = 0$.
   b) Determinare poi i valori dei parametri $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

5. (6 pt.) Data la funzione
$$f(x) = (x+\alpha)e^{-\beta x}$$
determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché scrivendo lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ con resto secondo Peano della funzione $f(x)$ si abbia
$$f(x) = -1 + 3x - 4x^2 + o\left(x^2\right), \ x \to 0.$$