

Cognome e Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ Corso di studi \_\_\_\_\_

1. (4 pt.) Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left( \frac{x-3}{x-1} \right).$$

Determinare in particolare: insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti, derivata prima e derivata seconda, crescere e decrescere, concavità e convessità, punti di massimo e di minimo, punti di flesso. Disegnarne un grafico approssimativo.

2. (5 pt.) Sia data la seguente serie con parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+n^\alpha)^{\frac{1}{3}} - 1}{n^{\alpha+3}}$$

- (a) Determinarne il carattere per  $\alpha = 1$   
(b) Determinarne il carattere per  $\alpha = -3$   
(c) Determinarne il carattere in tutti i casi  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha < 0$ .
3. (5 pt.) Stabilire con un opportuno criterio la convergenza del seguente integrale generalizzato e, in caso positivo, calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \log(x^2) dx$$

4. (5 pt.) Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori reali. Fornire la definizione di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  e di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ . Mostrare poi con la definizione che se  $0 < q < 1$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
5. (5 pt.) La convergenza della serie di Mc Laurin della funzione esponenziale: enunciato e dimostrazione.