

Cognome e Nome _____ Matr. _____ Corso di studi _____

1. (4 pt.) Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{x-2}{x+3} \right).$$

Determinare in particolare: insieme di definizione, segno, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti, derivata prima e derivata seconda, crescere e decrescere, concavità e convessità, punti di massimo e di minimo, punti di flesso. Disegnarne un grafico approssimativo.

2. (5 pt.) Sia data la seguente serie con parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n^\alpha)}{n^{2\alpha+3}}$$

- (a) Determinarne il carattere per $\alpha = 1$
(b) Determinarne il carattere per $\alpha = -2$
(c) Determinarne il carattere in tutti i casi $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.
3. (5 pt.) Stabilire con un opportuno criterio la convergenza del seguente integrale generalizzato e, in caso positivo, calcolarlo

$$\int_{\pi}^{+\infty} (1 + \cos x) e^{-x} dx$$

4. (5 pt.) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni **infinitesime**. Fornire la definizione di a_n è di ordine inferiore a b_n , a_n è di ordine superiore a b_n e di a_n è asintotica a b_n . Data $a_n = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, fornire tre esempi di successione b_n corrispondenti ai tre casi precedenti, giustificando le proprie affermazioni.
5. (5 pt.) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza di una serie. La condizione è anche sufficiente? Giustificare la propria risposta.