

Cognome e Nome _____ Matr. _____ Corso di studi _____

1. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3x + 1 - 4\sqrt{x}}.$$

- (a) (3 pts) Determinare il campo di esistenza, il segno e gli eventuali asintoti di f .
- (b) (1 pts) Studiare il crescere ed il decrescere di f .
- (c) (1 pts) Determinare una espressione asintotica per la funzione per $x \rightarrow +\infty$ e discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx.$$

- (d) (1 pts) Sulla base delle informazioni ottenute nei punti a) e b) tracciare un grafico qualitativo di f .

2. Determinare il carattere (convergenza semplice e/o assoluta) delle serie seguenti

(a) (2 pts) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k^2+k+1}$

(b) (2 pts) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right)^{k^4}$

3. Sia data la funzione

$$f(x) = (\log(1+3x))^3.$$

- (a) (3 pts) Calcolare con la definizione la derivata di f in $x_0 = 1$ (senza utilizzare il teorema di de L'Hôpital).
 - (b) (1 pts) Verificare poi il risultato ottenuto tramite le usuali regole di derivazione.
4. (5 pts) Siano a_n e b_n due successioni. Fornire la definizione di “ a_n è un infinitesimo di ordine superiore, inferiore, di ugual ordine di grandezza rispetto a b_n ”. Fornire poi la definizione di “ a_n e b_n sono infinitesimi asintotici”. Per ogni caso, fornire anche un esempio.
5. (5 pts) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat. Discutere poi l'essenzialità delle ipotesi.