

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

Gli esercizi valgono 8 punti ciascuno per un totale di 32 punti

1. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x}$$

e dedurre (giustificando opportunamente) il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}.$$

2.

a. Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{5}{3}} \log(1 + |x|).$$

Studiare l'insieme di definizione della funzione, il segno, eventuali simmetrie, il comportamento asintotico negli zeri (cioè nei punti di annullamento) e all'infinito. Disegnare poi un grafico probabile della funzione in base alle sole informazioni ottenute.

b. Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$g(x) = e^{2x} \log(x^3 + 5x).$$

3. Si consideri la serie seguente dipendente dal parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n}}.$$

a. Per quali valori del parametro x si tratta di una serie a termini maggiori o uguali a zero?

b. Studiare per ogni valore del parametro x la convergenza semplice ed eventualmente assoluta della serie.

4. Stabilire tramite un opportuno criterio se il seguente integrale generalizzato converge e, in caso affermativo, calcolarlo mediante la definizione

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} dx.$$