

Parte A

Cognome e Nome _____ Matr. _____

**Gli esercizi valgono 11 punti ciascuno per un totale di 33 punti.
Giustificare in modo completo tutte le risposte.**

1. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n+1}{2n+3}.$$

- a. Stabilire se la successione è limitata o illimitata superiormente e se è limitata o illimitata inferiormente.
- b. Stabilire se la successione è monotona (crescente o decrescente) oppure no.
- c. Individuare l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{2n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti, giustificando tutti i passaggi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{\sin(n^{-3/2})};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin(n^3) + \log(n^2)}{e^{\frac{n^2+1}{n^2}} - e}.$$

3. Studiare la convergenza assoluta e semplice delle serie seguenti:

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+2}}{n!}$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+e^{2n})}{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{-3}}$$