1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

$$S_0 = 1 = \frac{1}{2^0}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} = S_0 + \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = S_1 + \frac{1}{4}$$

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = S_{k-1} + \frac{1}{2^k}$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n}$$

non possono essere uguali!!

$k \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$

$N \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad S_N = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2^j}$$

$\cancel{S_n = \sum_{n=0}^{n} a_n}$ $\qquad$ $\cancel{S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n}$

somma parziale!!

Serie convergente:

Data la serie $\quad S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$

diremo che essa è convergente se

$\exists$ finito $\lim_{k \to +\infty} S_k$ $\quad$ cioè se $\{S_k\}$ è

una successione convergente

Somma di una serie è il limite di una serie convergente

$$\lim_{k \to +\infty} S_k$$

che si denota

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

CARATTERE di una SERIE: converge, diverge, è irregolare

La serie $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ è divergente

se $\lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$
$(-\infty)$

cioè se $\{S_k\}$ è una successione divergente

La serie è irregolare se $\{S_k\}$ è una successione irregolare (cioè <u>NON ESISTE il limite</u> !)

<u>SERIE TELESCOPICHE</u>

$$\sum_{n=0}^{k} (b_{n+1} - b_n)$$

$\{b_n\}$ successione qualunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

RENGOLI

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)}$$

$$(A+B)\,n + A = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum (b_{n+1} - b_n)$$

$$b_m = -\frac{1}{m}$$

$$-\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m}\right) =$$

$$= -\Big[\underbrace{\left(\frac{1}{k+1} - \cancel{\frac{1}{k}}\right)}_{m=k} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k-1}}\right)}_{m=k-1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{k-2}\right)}_{m=k-2}$$

$$+ \cdots + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1\right)}_{m=1}\Big] =$$

$$= -\frac{1}{k+1} + 1 = S_k$$

Somma della serie: $\lim_{k \to +\infty} S_k = 1$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} =$$

$k = n - 1$

$n = k + 1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \cdot k}$$

$$\sum_{n=15}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=15}^{k} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{15} \to \frac{1}{15}$$

Aussi

$$\sum_{n=0}^{k} (b_{n+1} - b_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \left((b_{n+1} - b_n) + (b_n - b_{n-1}) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} (b_{n+1} - b_n) + \sum_{n=0}^{k} (b_n - b_{n-1})$$

$\{b_n\}_{n \geq 0}$

$$\sum_{n=2}^{k}\left(b_{n+1} - b_{n-2}\right) = \left(b_{n+1} - b_n\right) + \left(b_n - b_{n-1}\right) + \left(b_{n-1} - b_{n-2}\right)$$

$$S_k = \sum_{n=2}^{k}\left(b_{n+1} - b_n\right) + \sum_{n=2}^{k}\left(b_n - b_{n-1}\right) + \sum_{n=2}^{k}\left(b_{n-1} - b_{n-2}\right)$$

$$S_k = \left(b_{k+1} - b_2\right) + \left(b_k - b_1\right) + \left(b_{k-1} - b_0\right)$$

$$\lim S_k = -b_2 - b_1 - b_0 + 3 \lim_{n \to +\infty} b_n$$

---

o

TEOREMA : $A \Longrightarrow B$

A è condizione SUFFICIENTE per B

B è condizione NECESSARIA per A

Teorema: se Σ converge $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ I

NON è corretto:

se $a_n \to 0$ allora Σ può convergere

$a_n \to 0$ se Σ converge II

CORRETTO

Ip: Σ converge

Tesi: $a_n \to 0$

Se $a_n \to 0$ allora Σ converge

FALSO

ESEMPIO di serie che soddisfa la condizione necessaria ma NON converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{SERIE ARMONICA}$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$\left(\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1 \right)$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

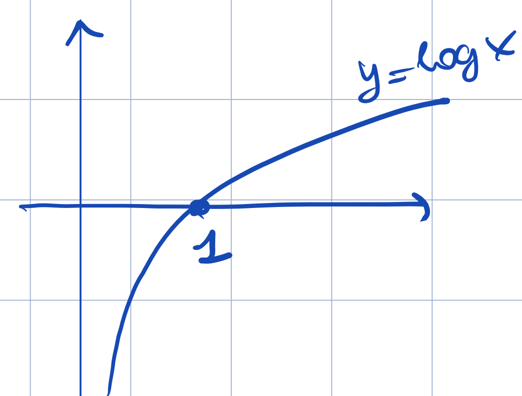
(NON soddisfa la condizione necessaria)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = +\infty \qquad \text{(è telescopica}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = b_{k+1} - b_k \qquad \text{qual è } b_k\text{?}$$

$$\log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k \qquad b_n = \log k\text{)}$$

$$a_k = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{k} \to 0, \quad 1+\frac{1}{k} \to 1$$



NON si scrive $\cancel{\sum a_k}$

~~$a_n \to 0$ quindi $\sum a_k$ converge a 0~~

SERIE GEOMETRICA

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

$$|q| < 1 \to S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-q}$$

$$\left(S_n = \sum_{k=k_0}^{n} q^k \to q^{k_0} \cdot \frac{1}{1-q} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{1-q} - \left(q^0 + q + q^2 + \dots + q^{k_0-1}\right) \right)$$

$$\cancel{S_n = \frac{1}{1-q}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

$$\|$$

Somma

PARZIALE

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

OK

$$\cancel{\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \begin{cases} k+1 & q=1 \\[2ex] \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

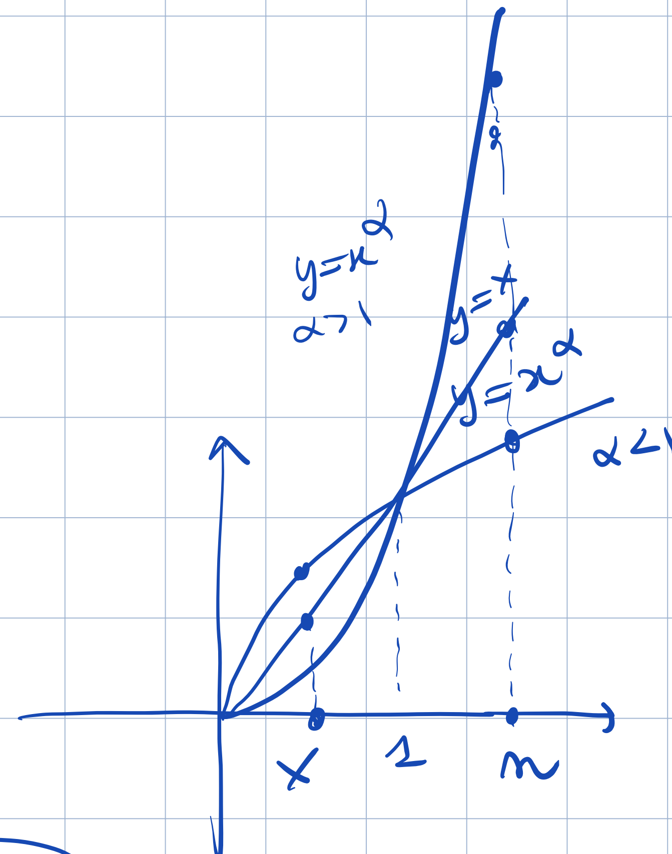
dim

$$S_k$$

$$qS_k$$

$$S_k - qS_k = \dots$$

Invece è possibile che S_k sia costante!!



$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$\alpha < 1$

$$n^\alpha < n^1$$

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$$

$n \geq 1$

$n > 0$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} > \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$\alpha > 1$

$$n^\alpha > n$$

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} < \sum \frac{1}{n}$$

$+\infty$

<u>Non</u> porta a concludere <u>NULLA</u>!

$$\boxed{\alpha \geq 2}$$

$$n^{\alpha} \geq n^2$$

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \sum \frac{1}{n^2}$$

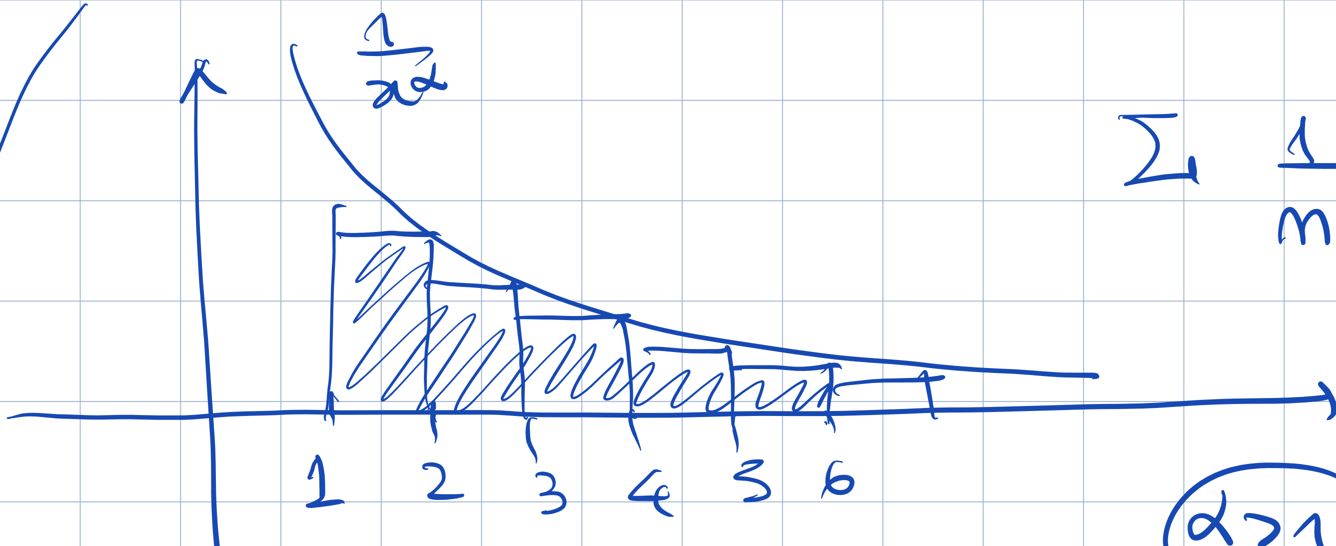
$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} \qquad n \to +\infty$$

$$\lim \frac{1}{n^2} \cdot (n)(n+1) = 1$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$ MENGOLI <u>converge</u>

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$$ converge (confr. asint.)

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$$ converge (confronto)



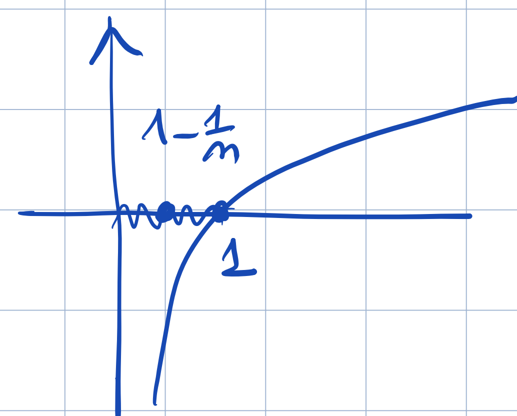
$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

$\alpha > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty$$

Serie a termini di segno costante (definitivamente)

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \underbrace{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<0\ \forall n}$$



$$S_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty$$

$$\cancel{S_k = \sum_{n=0}^{\infty}}$$

$a_k \geq 0 \quad \forall k$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = S_{k-1} + a_k \geq S_{k-1}$$

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}_{S_{k-1}} + a_k$$

cioè $\{S_k\}$ è monotona crescente

(non decrescente)

se $\{S_k\}$ è superiormente limitata allora converge (al $\sup\{S_k\}$)
se non è superiormente limitata allora diverge a $+\infty$.

NON PUÒ ESSERE IRREGOLARE

$\{S_k\}$ è inferiormente limitata?

$$S_0 = a_0$$
$$S_1 = a_0 + a_1 \geq a_0$$
$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \geq a_0$$

$\boxed{\text{SI}}$!!

Quindi se $a_k \geq 0 \ \forall k$

$\{S_k\}$ limitata $\Longleftrightarrow$ $\{S_k\}$ convergente

Domanda: Data una successione qualsiasi $\{b_k\}$

$\{b_k\}$ limitata $\Longleftarrow$ $\{b_k\}$ convergente

$\Longrightarrow$?

$\Longrightarrow$ NO

$$b_k = (-1)^k = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

limitata ma non convergente

$\Leftarrow$ VERA (TEOREMA!)

teorema del confronto per successioni

$$b_n \le a_n \le c_n$$

e $\quad b_n \longrightarrow l$

$\quad\; c_n \longrightarrow l$

allora $\quad a_n \longrightarrow l$

per SERIE a termini ≥ 0

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ conv.

$\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ div.

Non sappiamo il limite delle serie (se convergono)

OSS:

$$a_n \sim b_n \iff$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

$a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ definitivamente

$$\boxed{\text{NON HA SENSO} \qquad a_n \sim 0}$$

HA SENSO $\quad \lim a_n = 0$

CRITERIO DELLA RADICE / RAPPORTO

$a_n > 0 \ \forall n$

$\lim \sqrt[n]{a_n} = l$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$

- $l > 1$ $\sum$ diverge
- $l < 1$ $\sum$ converge
- $l = 1$?

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$0! = 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\cancel{\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty \rightarrow \sum \text{diverge}}$$

$$\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 = l < 1 \rightarrow \underline{\sum \text{converge}}$$

~~NON HA SENSO dire~~

$$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty}$$

$$\cancel{\text{allora} \quad \sum a_n = +\infty}$$

NON HA SENSO neanche

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$ $\quad \Sigma$ converge a 0

Non è possibile!

$S_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\geq a_0 > 0}$

$S_k \uparrow$

Non sappiamo a cosa converge la Σ !

ESEMPIO CRITERIO DELLA RADICE

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{\cancel{a}^{n} 1}{n^n} \qquad a > 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 = l$$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a > 0$

$\Rightarrow \sum$ converge

OPPURE

$$S_k = \sum \underset{\downarrow\, +\infty}{n^n}$$

$$\sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty \qquad \sum n^n \text{ diverge}$$

OSS. IMP

Se $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l > 1$

oppure

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l > 1$$

$\sum a_n$ diverge a $+\infty$ $\underline{\underline{e}}$ $\underline{\underline{a_n \longrightarrow +\infty}}$

$$a_n \not\longrightarrow 0$$

(Conseguenza della dimostrazione che non facciamo!!)

In particolare, se $\sum a_n$ non di segno costante e si studia la convergenza assoluta

$$\sum |a_n|$$

e la studio con il criterio della radice o rapporto)

Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l > 1$$

la serie NON converge assolutamente
MA anche $|a_n| \longrightarrow +\infty$ e

quindi $a_n \not\longrightarrow 0$
e quindi non può convergere neanche
semplicemente !!

$\sum$ a termini di segno qualunque

Se $\sum$ converge assolutamente
allora $\sum$ converge semplicemente

Non vale il viceversa

Es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

non converge assolutamente, ma converge semplicemente per Leibniz

Attenzione! Leibniz si applica così

se $\sum (-1)^n a_n$

con $a_n \geq 0$

$a_n \longrightarrow 0$

$a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

allora $\sum$ converge

Se le ipotesi non sono verificate NON posso dedurre niente

se $a_n \sim b_n$ e alla serie $\sum (-1)^n b_n$

posso applicare Leibniz **NON**

posso dedurre niente su $\sum (-1)^n a_n$

conv. assoluta è SUFFICIENTE per conv. semplice ma NON NECESSARIA

NON SI PUÒ DIRE

$\Downarrow$ non converge assolutamente e quindi neanche semplicemente

$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$$

NON CONV. ASS.

$$\frac{\sqrt{n}}{\underbrace{n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\to 1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty \qquad \frac{1}{2} < 1$$

Funzione Leibniz

$$\sum (-1)^n \frac{\sin n}{n^2+n}$$

$$\sum \left| (-1)^n \frac{\sin n}{n^2+n} \right| = \sum \left| \frac{\sin n}{n^2+n} \right|$$

$\sin n \rightarrow$ non è sempre ≥ 0!

$$\left| \frac{\sin n}{n^2+n} \right| \leq \frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$\sum \left| \frac{\sin n}{n^2+n} \right|$ conv $\quad \sum \frac{1}{n^2+n}$ conv $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ conv.

$$\sum \frac{\sin n}{n^2+n}(-1)^n \qquad \underline{\text{conv. ass.} \Rightarrow \text{sempl.}}$$

<u>Gennaio 2022</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(e^{\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3}} - e\right)\frac{1}{n^\alpha}}_{>0 \quad \forall \alpha} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$e^{\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

$$\left(e^{\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3}} - e\right) = e\left(e^{\overbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3}}_{\to 1}-1}^{\to 0}} - 1\right)\odot$$

$$e^{\varepsilon_n}-1 \sim \varepsilon_n \qquad \varepsilon_n \to 0$$

$$\odot \sim e\left(\frac{\sqrt{n^3}+2n^3}{2n^3}-1\right) = e\left(\cancel{1}+\frac{\sqrt{n^3}}{2n^3}-\cancel{1}\right)$$

$$\left(e^{\frac{\sqrt{n^3+2n^3}}{2n^3}} - e\right) \cdot \frac{1}{n^\alpha} \sim e \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{2n^3} \cdot \frac{1}{n^\alpha} =$$

numero

$$= \frac{e}{2} \frac{1}{n^{\alpha+3-\frac{3}{2}}} = \frac{e}{2} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

armonica generalizzata

Se $\alpha + \frac{3}{2} > 1$ converge

$\alpha + \frac{3}{2} \leq 1$ diverge a $+\infty$

$\alpha > 1 - 3/2 = -\frac{1}{2}$ converge

$\alpha \leq -\frac{1}{2}$ diverge at ∞